Compacidad débil en espacios de Orlicz de funciones vectoriales

Por F. BOMBAL y C. FIERRO

Recibido: 3 marzo 1982

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

Abstract

In this note we study some properties about weak convergence in Orlicz spaces of Bochner-integrable functions. Some of these results are used to determine the Banach spaces for which the natural extension f the characterization of weak compactness in Orlicz spaces of numerical-valued functions is true, extending a previous result of C. Fierro.

1. INTRODUCCION

El estudio de la topología débil en los espacios de funciones integrables Bochner, presenta serias dificultades por la estructura complicada del dual. En este trabajo se estudian algunas propiedades relativas a la convergencia débil de sucesiones en espacios de Orlicz de funciones vectoriales, y se aplican posteriormente para extender un resultado de Fierro sobre los espacios $L^p(X)$, según el cual los espacios de Banach X para los que es válida la extensión natural de la caracterización de los conjuntos débilmente compactos de $L^p(X)$, son precisamente aquellos que poseen la propiedad de Radon-Nikodym, así como su dual.

2. PRELIMINARES Y NOTACIONES

Sea $\phi: [0, \infty] \to [0, \infty]$ una función no decreciente, continua a la izquierda, verificando $\phi(0) = 0$ y no idénticamente nula. La inversa continua a la izquierda de ϕ puede expresarse por las fórmulas $\psi(0) = 0$ y $\psi(v) = \sup \{u: \phi(u) < v\}$. Si $\lim\limits_{u \to \infty} \phi(u) = a$ es finito, entonces $\psi(v) = \infty$ para todo $v > a$. Las funciones definidas por las fórmulas

$$\Phi(u) = \int_0^u \phi(t)\, dt \quad ; \quad \Psi(v) = \int_0^v \psi(t)\, dt$$

se llaman *funciones conjugadas de Young*. Se sigue que Φ y Ψ son convexas, crecientes, no idénticamente nulas y continuas, excepto a lo más en un punto, a partir del cual la función debe ser igual a ∞. Además, verifican la *desigualdad de Young:*

$$uv \leqslant \Phi(u) + \Psi(v) \quad , \quad u, v \geqslant 0$$

(Véase, por ejemplo, [9], pág. 77 y sgs.)

AMS (MOS) subject classifications (1970): Primary 46E40; Secondary 46G10.

En lo que sigue, Φ y Ψ designarán un par de funciones conjugadas de Young, (S, Σ, μ) un espacio de medida finito, que por comodidad supondremos completo, X un espacio de Banach y X' su dual topológico. Para cada función $f: S \to X$ medible Bochner, escribiremos

$$M_\Phi(f) = \int \Phi(\|f\|)\, d\mu$$

Se define $L^\Phi(\Sigma, \mu, X)$ $(=L^\Phi(X))$ como el espacio vectorial de todas las (clases de) funciones $f: S \to X$ medibles Bochner tales que $M_\Phi(kf) < \infty$ para algún $k > 0$. Cuando X sea el cuerpo de escalares K, escribiremos $L^\Phi(K) = L^\Phi$. Si $\Phi(t) = t^p$, $L^\Phi(X)$ coincide con el espacio $L^p(X)$. En general, $L^\Phi(X)$ coincide con el conjunto de funciones medibles Bochner de S en X tales que

$$\|f\|_\Phi = \sup\left\{\int \|f\| h\, d\mu : h \in L^\Phi \text{ y } M_\Phi(h) \leqslant 1\right\} < \infty$$

Esta última expresión define una norma de espacio de Banach en $L^\Phi(X)$. Se tiene siempre que $L^\Phi(X) \subset L^1(X)$, y la inclusión es continua.

Diremos que Φ satisface la condición (Δ_2) si es finita en $[0, \infty)$ y existe $K > 0$, $t_0 \geqslant 0$ de modo que $\Phi(2t) \leqslant K\Phi(t)$ para $t > t_0$ (es decir, $\limsup_{t\to\infty} \Phi(2t)/\Phi(t) < \infty$). Puede probarse que si Φ verifica la condición (Δ_2), existe otra función de Young Φ_1 equivalente a Φ (es decir, L^Φ y L^{Φ_1} son iguales como conjuntos e isomorfos topológicamente) que satisface la desigualdad anterior para $t_0 = 0$ ([7], Ch. I, ap. 4.1).

Finalmente, recordemos que X tiene la propiedad de Radon-Nikodym (PRN) respecto de μ si para toda medida $m: \Sigma \to X$ numerablemente aditiva, μ-continua y de variación acotada, existe $f \in L^1(\Sigma, \mu, X)$ tal que $m(A) = \int_A f\, d\mu$ para cada A de Σ (véase, p. ej., [5]). Si X tiene la PRN para todo espacio de medida finito (S, Σ, μ), diremos simplemente que X tiene la PRN.

3. Compacidad débil en $L^\Phi(X)$

El siguiente resultado es análogo al lema II.7 de [6]:

1. **Proposición.** *Sea X un espacio de Banach y Φ, Ψ dos funciones conjugadas de Young verificando ambas la condición (Δ_2). La transpuesta de la inclusión canónica J de $L^\Phi(X)$ en $L^1(X)$ es una inyección continua de $L^1(X)'$ en un subespacio denso de $L^\Phi(X)'$.*

Demostración. Como $J(L^\Phi(X))$ es denso en $L^1(X)$, es claro que la transpuesta de J es inyectiva. Sea entonces $T \in L^\Phi(X)'$. Por la observación hecha en la introducción, podemos suponer que Ψ satisface la desigualdad de la condición (Δ_2) para todo $t > 0$ y, por tanto, se verifican las hipótesis del teorema III.19 de [8]. En consecuencia, existe $g: S \to X'$, unívocamente determinada en casi todo punto, que cumple:

a) Para cada $f \in L^\Phi(X)$, $\langle f, g\rangle$ es integrable y $T(f) = \int \langle f, g\rangle\, d\mu$.

b) La función $s \to |g|(s) = \|g(s)\|$ pertenece a L^{Ψ} y

$$\|T\| \leqslant \||g|\|_{\Phi} < 2\|T\|$$

Sea $A_n = \{s \in S : \|g(s)\| \leqslant n\}$ y definamos

$$T_n(f) = T(\chi_{A_n} f) = \int_{A_n} \langle f, g \rangle \, d\mu \quad , \quad \text{para todo } f \in L^{\Phi}(X)$$

De las condiciones *a*) y *b*) anteriores, resulta:

$$\|T - T_n\| \leqslant \|(1 - \chi_{A_n})|g|\|_{\Phi} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Además, T_n es continuo para la topología inducida por $L^1(X)$, pues

$$|T_n(f)| \leqslant n\|f\|_1$$

con lo que queda probada la proposición.

Si Φ y Φ^1 son funciones de Young tales que $L^{\Phi}(X) \subset L^{\Phi^1}(X)$, la inclusión es una aplicación continua, como consecuencia del teorema de la gráfica cerrada y del hecho de que la convergencia en $L^{\Phi}(X)$ implica la convergencia en $L^1(X)$. Se tiene entonces:

2. **Corolario.** *Sean Φ y Φ^1 dos funciones de Young tales que $L^{\Phi}(X) \subset L^{\Phi^1}(X)$. Si Φ y su conjugada verifican ambas la condición (Δ_2), entonces lla imagen de la transpuesta de la inclusión canónica es un subespacio denso de $L^{\Phi}(X)'$.*

Demostración. Si consideramos las incluones canónicas

$$L^{\Phi}(X) \xrightarrow{I} L^{\Phi^1}(X) \xrightarrow{J} L^1(X)$$

resulta que $I'(L^{\Phi^1}(X)') \supset I'J'(L^1(X)')$, que es denso por la proposición 1.

3. **Proposición.** *Sean Φ y Φ^1 dos funciones de Young en las hipótesis del corolario 2, y $\{f_n\}$ una sucesión acotada en $L^{\Phi}(X)$. Entonces son equivalentes:*

a) $\{f_n\}$ *converge débilmente (resp. es débilmente de Cauchy) en* $L^{\Phi}(X)$.
b) $\{f_n\}$ *converge débilmente (resp. es débilmente de Cauchy) en* $L^{\Phi^1}(X)$.
c) $\{f_n\}$ *converge débilmente (resp. es débilmente de Cauchy) en* $L^1(X)$.

Demostración. Una sucesión $\{x_n\}$ en un e.v.t. es de Cauchy si y sólo si para cada par de sucesiones estrictamente crecientes de enteros positivos $\{k_n\}$ y $\{j_n\}$ se verifica que la sucesión $\{x_{k_n} - x_{j_n}\}$ converge a 0. Por tanto, bastará probar el resultado relativo a la convergencia débil. Es evidente que a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c). Supongamos entonces que $\{f_n\}$ converge débilmente a $f \in L^1(X)$ y sea $\|f_n\|_{\Phi} \leqslant M$, para todo $n \in N$. Por el lema 2.3 de |3|, $f \in L^{\Phi}(X)$ si y sólo si es integrable y

$$\sup\left\{\left|\int \langle f, g \, d\mu\right| : g : S \to X', \ \Sigma\text{-simple y } M_{\Psi}(g) \leqslant 1\right\} < \infty$$

siendo Ψ la conjugada de Young de Φ. Pero si $g: S \to X'$ es Σ-simple, entonces $g \in L^\infty(X') \subset L^1(X)$, luego

$$\lim_{n\to\infty} \int \langle f_n, g\rangle \, d\mu = \int \langle f, g\rangle \, d\mu$$

Por tanto, si, además, $M(g) \leqslant 1$,

$$\left|\int \langle f, g\rangle \, d\mu\right| \leqslant \sup_n \left\{\left|\int \langle f_n, g\rangle \, d\mu\right|\right\} \leqslant \|f_n\|_\Phi \leqslant M$$

lo que prueba que $f \in L^\Phi(X)$. Como $L^1(X)'$ es denso en $L^\Phi(X)'$ por la proposición 1, resulta que $\{f_n\}$ converge a f débilmente en $L^\Phi(X)$.

4. **Corolario.** *Sean Φ y Φ^1 dos funciones de Young que verifican las hipótesis del corolario 2, y $K \subset L^\Phi(X)$ un conjunto acotado. Entonces son equivalentes:*

a) *K es débilmente relativamente compacto (resp. débilmente condicionalmente compacto[1]) en $L^\Phi(X)$.*

b) *K es débilmente relativamente compacto (resp. débilmente condicionalmente compacto) en $L^{\Phi^1}(X)$.*

c) *K es débilmente relativamente compacto (resp. débilmente condicionalmente compacto) en $L^1(X)$.*

Demostración. Consecuencia inmediata del teorema de Eberlein y la proposición 3.

En cuanto a la completitud secuencial débil, se tiene:

5. **Corolario.** *En las hipótesis del corolario 2, si $L^{\Phi^1}(X)$ es débilmente secuencialmente completo, también lo es $L^\Phi(X)$.*

Demostración. Resulta inmediatamente de la proposición 3.

3.1. La propiedad P_Φ (μ)

En [1] se estudia la compacidad débil en los espacios de Orlicz de funciones escalares, extendiendo la caracterización dada por Dunford de la compacidad débil en L^1. El problema correspondiente para espacios de funciones vectoriales, presenta dificultades por la estructura complicada del dual (véase, p. ej., [2], [3] y [4]). Sin embargo, si X y X' poseen la PRN, es fácil ver que se obtienen caracterizaciones de la compacidad débil que resultan ser la extensión natural de las correspondientes al caso escalar. Esto nos lleva a introducir la siguiente definición:

6. **Definición.** Sea (S, Σ, μ) un espacio de medida finito y Φ, Ψ dos funciones conjugadas de Young. Un espacio de Banach X diremos que *tiene la propiedad $P_\Phi(\mu)$* si para cada subconjunto K de $L^\Phi(\mu, X)$ son equivalentes:

a) K es débilmente relativamente compacto.

[1] Un conjunto K de un e.v.t. se llama *condicionalmente compacto* si toda sucesión en K posee una subsucesión de Cauchy.

b) K verifica:

i) Es acotado en la norma de $L^{\Phi}(\mu, X)$.

ii) Para cada $g \in L^{\Psi}(\mu, X')$:

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \sup \left\{ \int_A |\langle f, g\rangle \, d\mu : f \in K \right\} = 0$$

iii) Para cada $A \in \Sigma$,

$$K(A) = \left\{ \int_A f \, d\mu : f \in K \right\}$$

es débilmente relativamente compacto.

$P_p(\mu)$ designará la propiedad $P_{\Phi}(\mu)$ para $\Phi(t) = t^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

7. **Observación.** 1) La condición a) de la definición 6 implica siempre la b) (véase, p. ej., [3]).

2) Es evidente que la propiedad $P_{\Phi}(\mu)$ se hereda por subespacios cerrados.

3) Si $X = K$ y Φ tiene la propiedad (Δ_2), las condiciones i) y ii) de 6.b) caracterizan los conjuntos débilmente relativamente compactos de $L^{\Phi}(\mu)$ ([1]).

La propiedad $P_p(\mu)$ ha sido introducisa por C. Fierro en [6] con un enunciado ligeramente distinto, aunque equivalente, al dado aquí. También en [6] se prueba el siguiente resultado:

(F) X verifica la propiedad $P_p(\mu)$ para algún p, $1 \leqslant p < \infty$, si y sólo si tanto X como X' poseen la PRN respecto de μ.

Se tiene entonces la siguiente extensión de (F):

8. **Teorema.** *Sea (S, Σ, μ) un espacio de medida finito, X un espacio de Banach y Φ una función de Young que cumple la condición (Δ_2). Entonces X verifica la propiedad $P_{\Phi}(\mu)$ si y sólo si X y X' tienen la* PRN *respecto de μ.*

Demostración. Si Φ verifica la propiedad (Δ_2), existe $p > 1$, $K > 0$ y $t_0 \geqslant 0$ de modo que $\Phi(t) \leqslant Kt^p$ para $t > t_0$ (véase, p. ej., [7], teorema I.4.1) y, por tanto, $L^p(\mu, X) \subset L^{\Phi}(\mu, X)$. Supongamos entonces que X tiene la propiedad $P_{\Phi}(\mu)$ y sea $K \subset L^p(\mu, X)$ con las propiedades:

i') K es acotado en norma.

ii') Para cada $A \in \Sigma$, $K(A)$ es débilmente relativamente compacto.

De i') se deduce que K es uniformemente integrable, luego K verifica las condiciones de la definición 6.*b*). Por hipótesis, resulta que K es débilmente relativamente compacto en $L^{\Phi}(\mu, X)$ y, por tanto, también es débilmente relativamente compacto en $L^p(\mu, X)$ por el corolario 4. De (F) se deduce entonces que X y X' tienen la PRN respecto de μ.

Recíprocamente, si X y X' tienen la PRN respecto de μ, es fácil ver procediendo como en [5] IV.1.1, que $L^{\Phi}(\mu, X)'$ se puede identificar con $L^{\Psi}(\mu, X')$ mediante la aplicación $L^{\Psi}(\mu, X') \ni g \to T_g \in L^{\Phi}(\mu, X)'$, donde

$$T_g(f) = \int \langle f, g\rangle \, d\mu \quad ; \quad \text{para todo } f \in L^{\Phi}(\mu, X)$$

(véase también [3], observación 4.*b*)). Si $K \subset L^{\Phi}(\mu, X)$ verifica la condición *b*) de la definición 6, resulta entonces del teorema 3 de [3] que K es débilmente relativamente secuencialmente compacto y, por tanto, débilmente relativamente compacto por el teorema de Eberlein.

Las hipótesis sobre Φ en el teorema anterior no pueden omitirse, como prueba el siguiente resultado:

9. **Teorema.** *Sea* (S, Σ, μ) *un espacio de medida finita que contiene un conjunto de medida positiva sin átomos y* Φ *una función de Young. Si* Φ *no satisface la condición* (Δ_2), *ningún espacio de Banach* $X \neq \{0\}$ *verifica la propiedad* $P_{\Phi}(\mu)$.

Demostración. Por la observación 7.2 bastará probar que K no posee la propiedad $P_{\Phi}(\mu)$. Si existe $t_0 > 0$ tal que $\Phi(t) = \infty$ para $t > t_0$, $L^{\Phi}(\mu)$ y $L^{\infty}(\mu)$ son iguales como conjuntos y topológicamente isomorfos. Todo acotado de $L^{\infty}(\mu)$ cumple las condiciones de la definición 6.*b*) y, sin embargo, no es necesariamente débilmente relativamente compacto.

Supongamos entonces que Φ es finita sobre $[0, \infty)$. Si Φ no verifica (Δ_2) el subespacio E de las funciones simples no es denso en $L^{\Phi}(\mu)$ ([7], ap. 10). Sea $f \in L^{\Phi}(\mu)\backslash\bar{E}$. Existe entonces una sucesión $\{f_n\} \subset E$ tal que $|f_n(t)| \leqslant |f(t)|$ para todo n, y $\{f_n(t)\}$ converge a $f(t)$ en μ-casi todo punto. En particular, $\|f_n\|_{\Phi} \leqslant \|f\|_{\Phi}$ para todo n de N, luego

$$K = \{f_n : n \in N\}$$

es acotado en $L^{\Phi}(\mu)$ y en consecuencia cumple las condiciones i) y iii) de 6.*b*). Si Ψ es la conjugada de Young de Φ y $g \in L^{\Psi}(\mu)$, del teorema de la convergencia dominada resulta que $\{f_n g\}$ converge a fg en $L^1(\mu)$. Por tanto, $\{f_n g : n \in N\}$ es uniformemente integrable (véase, p. ej., [5], III.2.15) y en consecuencia se cumple la condición ii) de 6.*b*). Sin embargo, K no es débilmente relativamente compacto, pues si lo fuera existiría una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ débilmente convergente a una función $h \in \bar{E}$. Pero entonces $\{f_{n_k}\}$ convergería débilmente a h en $L^1(\mu)$ y, por tanto, h coincidiría con f, lo que contradice el que $f \notin \bar{E}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDO, T. (1962): «Weakly compact sets in Orlicz spaces», *Canad. J. of Math.*, *14*, 170-176.

[2] BATT, J. (1974): «On weak compactness in spaces of vector-valued measures and Bochner-integrable functions in connection with the Radon-Nikodym property of Banach spaces», *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, XIX, 285-304.

[3] BOMBAL, F. (1981): «Sobre los espacios de Orlicz de funciones vectoriales», *Collec. Math.*, XXXII, 3-12.

[4] BROOKS., J. K., y DINCULEANU, N. (1977): «Weak compactness in spaces of Bochner integrable functions and applications», *Adv. in Math.*, *24*, 172-188.

[5] DIESTEL, J., y UHL, J. (1977), «Vector Measures», *Math. Surveys*, n.º 15, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[6] FIERRO, C. (1980): *Compacidad débil en espacios de funciones y medidas vectoriales*, tesis doctoral, Publicaciones de la Universidad Complutense.

[7] KRASNOSEL'SKII, M. A., y RUTICKII, YA. B. (1961): *Convex functions and Orlicz spaces*, Noordhoff Lts., Groningen.
[8] MONTAÑÉS, M. T. (1978): *Espacios de Orlicz de funciones vectoriales. Dualidad*, tesis doctoral, Universidad Complutense.
[9] ZAANEN, A. C. (1953): *Linear Analysis*, North-Holland Pub. Co., Amsterdam.

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid