Systèmes de base des solutions polynomiales concernant une classe d'équations polylinéaires d'ordre supérieur aux opérateurs différents, dont certains sont les opérateurs polyvibrants

Par D. L. FERNÁNDEZ[1], P. T. CRACIUNAS[2] et B. A. BONDARENKO[3]

Recibido: 3 febrero 1982

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO DE NÚMERO D. DARÍO MARAVALL

Resumen

Se construye en este trabajo los sistemas de base de las ecuaciones polilineales de un cierto tipo, utilizando polinomios binomiales. Se indican varias generalizaciones posibles de los resultados obtenidos.
En memorias anteriores el método de la representación operacional se había utilizado para la construcción de sistemas de base de las soluciones polilineales de orden superior.

Résumé

Dans quelques-uns de leurs travaux antérieurs la méthode de la représentation opérationnelle a été appliquée pour la construction des systemes de base des solutions polynomiales de toute une classe d'équations polylinéaires d'ordre supérieur aux opérateurs différents.
On construit dans ce travail les systemes de base des équations polylinéaires d'un certain type en utilisant dans ce but les polynomes binomiales. Quelques-unes des remarques placées a la fin du travail indiquent nombre d'extensions possibles des résultats acquis.

1. INTRODUCCION

L'essor, bien difficile à surestimer, du nombre des manifestations scientifiques consacrées aux nouvelles contributions dans les domaines des équations aux dérivées partielles, [1]-[3], dont certaines constitues importants modèles mathématiques de différentes classes de phénomènes que l'on étudie de nos jours, tels, par ex., [4]-[5], a donné aux auteurs une poussée pour en continuer leurs recherches, crystallisées, entre autres, dans ces derniers temps dans les séries de travaux appartenant à l'étude de certains modèles mathématiques qui intéressent la Biologie Mathématique, [6], à l'examen de certains systèmes différentiels de structure complexe, [7], ou bien à la détermination des solutions des différentes classes d'équations polylinéaires, [8]-[10].

Dans quelques-uns de leurs travaux antérieurs, élobórés parfois en collaboration avec d'autres chercheurs, [11]-[12], la méthode de la représentation opérationnelle a été appliquée pour la construction des systèmes de base des solutions polynomiale de toute une classe d'équations polylinéaires d'ordre supérieur, aux apérateurs différents, telle, par ex., l'équation

$$Mu(x, y) \equiv (M_2^{(m)} + \Delta_m)\, u(x, y) = f(x, y) \qquad [1]$$

---

[1] Instituo de Matemática, Estadística e Ciência da Computaçao, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Sp. Brasil.
[2] Institut Polytechnique de Jassy, Iasi, Roumanie-Romania.
[3] Institut de Cybernétique et de Mathématiques appliquées de l'Académie Uzbèque des Sciences, Tashkent, UzSSR, U.R.S.S.

où $M_2^{(m)}$ est l'opérateur polyvibrant d'ordre m à deux variables indépendantes, tandis que l'opérateur Δ_m est défini comme suit:

$$\Delta_m = \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} + \frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}$$

On construit dans ce qui suit les systèmes de base des équations polylinéaires de type [1] et on indique dans quelques unes des remarques placées à la fin de ce travail nombre d'extensions possibles des résultats acquis.

2. LES POLYNÔMES B ET QUELQUES-UNES LEURS PROPRIÉTÉS

On aboutit à la construction des systèmes de base des ensembles de solutions polynomiales des équations polylinéaires de type [1] en prenant pour le point de départ les polynômes binomiales, ou bien les polynômes B, à savoir:

$$B^n_{r,s}(x, y) = \sum_{k=0}^{\binom{n-s}{r}} \binom{n}{rk+s} x^{n-rk-s} y^{rk+s}$$

qui se relient au développement

$$(x + y)^n = \sum_{s=0}^{r-1} B^n_{r,s}(x, y)$$

On peut vérifier que les polynômes B jouissent de tout un ensemble de propriétés remarquables, telles, par ex., les propriétés de différentuabilité:

$$\frac{\partial}{\partial x} B^n_{r,s}(x, y) = nB^{n-1}_{r,s}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} B^n_{r,s}(x, y) = nB^{n-1}_{r,s-1}(x, y), \ s \neq 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} B^n_{r,0}(x, y) = nB^{n-1}_{r,r-1}(x, y)$$

---

[4] Les équations aux opérateurs polyvibrants $M_n^{(m)}$ ou bien $M_n^{(m_1+m_2+\cdots+m_n)}$, à savoir:

$$M_n^{(m)} \equiv \partial^{mn}/\partial x_1^m \partial x_2^m \cdots \partial x_n^m$$

et

$$M_n^{(m_1+m_2+\cdots+m_n)} \equiv \partial^{n(m_1+m_2+\cdots+m_n)}/\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}$$

dont le prototype est l'équation polyvibrante

$$(*) \quad M_n^{(m)}[M_n^{(m)}[u(x)] + A(x)u(x)] + p[M_n^{(m)}[u(x)]B(x) + C(x)u(x)] = 0$$

et le problème qui s'y rattachent: (*) et

$$(**) \quad u(x)|_{\partial R} = 0, \quad M_n^{(i)}[u(x)]|_{\partial R} = 0 \quad (i = 1, 2, ..., m-1)$$

et dont la nouveauté consiste entre autres, dans le fait que

$$(x) = (x_1, x_2, ..., x_n) \quad \text{et} \quad R = \{a_j \leqslant x_j \leqslant b_j;\ J = 1, 2, ..., n\}$$

on été appellées, à la suite des travaux [13]-[14], «équations de Mangeron», [15]-[18]. On a découvert et on découvrira sans aucun diute dans l'avenir nombre d'applications de ces équations autres que [19]-[21].

les relations de récurrence

$$B^n_{r,s}(x, y) = xB^{n-1}_{r,s}(x, y) + yB^{n-1}_{r,s-1}(x, y)$$

$$B^n_{r,0}(x, y) = xB^{n-1}_{r,0}(x, y) + yB^{n-1}_{r,r-1}(x, y)$$

3. DÉTERMINATION DES SYSTÈMES DE BASE

Dans le but de déterminer à l'aide des polynômes B les systèmes de base des solutions polynomiales de la classe des équations polylinéaires représentée par son prototype [1], construisons les combinaisons linéaires des polynômes B qui suivent:

$$P^n_{m,s}(x, y) = B^n_{3m,s}(x, y) - B^n_{3m,m+s}(x, y) \qquad [3]$$

et

$$Q^{n+2m}_{m,v}(x, y) = B^{n+2m}_{3m,v}(x, y) - B^{n+2m}_{3m,3m+v}(x, y) \qquad [4]$$

Les combinaisons linéaires [3] et [4] permettent d'en déduire les théorèmes suivantes:

1. **Théoreme.** Les polynômes $P^n_{m,s}(x, y)$, constituent, pour $s = 0, 1, 2, ..., 2m - 1$, le système de base des solutions polynomiales de degré n de l'équation [1] si l'on y prend $f(x, y) = 0$. Ce système est constitué d'un nombre de $2m$ polynômes linéairement indépendants.

En effet, on aboutit à la démonstration de ce théorème si l'on applique les formules de differentiation ci-dessus tout en traitant séparémment les cas $0 \leqslant s \leqslant m - 1$ et $m \leqslant s \leqslant 2m - 1$.

2. **Théorème.** Les polynômes $Q^{n+2m}_{m,v}(x, y)$ constituent, pour $v = 0, 1, 2, ...$, les solutions particulières de l'équation [1] si l'on y prend $f(x, y) = \binom{n}{v} x^{n-v}y^v$.

Ce dernier théorème pernet de conclure qu'à l'aide des combinaisons linéaires ou bien des séries de polynômes [4] on peut trouver les solutions particulières de l'équation [1] dans le cas où $f(x, y)$ est aussi un polynôme ou bien une fonction analytique.

4. DÉTERMINATION EFECTIVE DES SYSTÈMES DE BASE

Considérons le cas où $m = 2$ et par suite le cas où l'équation [1] prend la forme cidessus:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\, \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \qquad [5]$$

On en conlut donc par le suivant.

3. **Théorème.** Le système de base des solutions polynomiales de degré n de

l'équation polylinéaire [5] est constitué de quatre polynômes de degré n linéairement indépendants, exprimés par les polynômes B, â savoir:

$$P^n_{2,0}(x, y) = B^n_{6,0}(x, y) - B^n_{6,2}(x, y)$$
$$P^n_{2,1}(x, y) = B^n_{6,1}(x, y) - B^n_{6,3}(x, y)$$
$$P^n_{2,2}(x, y) = B^n_{6,2}(x, y) - B^n_{6,4}(x, y)$$
$$P^n_{2,3}(x, y) = B^n_{6,3}(x, y) - B^n_{6,5}(x, y)$$

Remarques. 1.° Les systèmes de base des solutions, donnés par [3] et les solutions particulières, données par [4], peuvent être utilisés pour la résolution de différent problèmes concernant l'équation [1].

2.° On peut généraliser les résultats acquis ci dessus de différentes manières, telle par ex. l'extension au cas d'un d'un nombre qualconque de variables indépendantes.

3.° On peut étudier en soi les polynômes trinomiales ou bien les polynômes T, etc.

4.° Les polynômes $B_{r,s}(x, y)$ satisfont â l'équation des ondes pour $s = 0, 1, 2, ..., r - 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Contemporary developments in continuum mechanics and partial differential equations.* Proc. Intern. Symp. held at the Inst. de Mat., Univ. Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Aug. 1-5, 1077. Edit.: Guilherme M. de la Penha et Luiz Andanto J. Modeiros. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, New York, Oxford, 1978, VIII + 616 p.

[2] *Équations aux dérivées partielles.* a) Proc. of a Conf. held at Saint-Jean-de-Monts, June 1-4, 1977. Edit.: Pham The Lai. Lecture Notes Math. 660. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1978, VI + 216 p. b) Proc. of a Conf. held at Saint-Cast, May 29-June 2, 1979. Centre de Math. Éc. Polytechn., Palaiseau, 1979, 102 p.; c) *Inverse and improperly posed problems in diff. equations.* Proc. Conf. on Math. a. numerical methods held in Halle from May 29-June 2, 1979. Ed.: Gottfried Anger. Math. Research, 1. Akademic-Verlag, Berlin. 1979, 296 p. d) *Journées des équations aux dérivées partielles.* Proc. of a Conf. held at Saint-Jean-de-Monts, June 6-10, 1978. Centre de Math., Éc. Polytechn., Palaiseau, 1978.

[3] *Proc. of an All-Union Conf. on Partial Differential Equations.* Moscow State University, Jan. 27-31, 1976. Dedicated to Acad. I. G. Petrovskii on the occasion of his 75th birthday. Edit.: P. S. Alexandrov and O. A. Oleinik. Gos. Univ., Meh.-Mat. Fakul'tet, Moscow, 1978; 511 p.; b) *Polynomial and spline approximation. Theort and applications.* Proc. NATO advanced study Inst. Univ. of Calgary. Calgary, Alta, Aug. 26-Sept. 2, 1978. Ed.: Badri N. Sahney. Ser. C. Math. and Phys. Sci. Series 49. D. Reidel Publ. Co., Dordrecht-B., Mass., London, 1979, VII + 321 p.; c) *Proc. Symp. on Volterra and delayed argument equations.* June 11-12, 1981. Blacksburg, Virginia State University. Math. Dept.

[4] LEUNG, K. V.; MANGERON, D.; OGUZTORELI, M. N., y STEIN, R. B.: «On the stability and numerical solutions of two neural models», *Utilitas Mathematica*, 5, 167-212, 1974.

[5] FERNÁNDEZ, D. L.; KRIVOSHEIN, L. E.; MANGERON, D. J., et VOINEA, R. P.: «Theorems concerning mixed structure mathematical systems which generalize the normal functioning of a single nerve fiber equations», *Bul. Inst. Politehn. Bucuresti* (à parà paraître).

[6] MARAVALL CASESNOVES, D.; MANGERON, D.; KRALL, A. M., et CRAXIUNAS, P. T.: «L'étude de certains modèles mathématiques d'excitation des nerfs», *Bul. Univ. Galati*, Sect. II (Math., Phys., Méc.) (à paraître).

[7] FERNÁNDEZ, D. L., et MANGERON, D.: «Problème de résolubilité d'une classe de systèmes non linéaires implicites aux opérateurs polyvibrants et héréditaoires et aux limites d'integration chargées d'autoréglages», *Bull. Acad. Soc. Lorraines Sci.* (à paraître).

[8] BONDARENKO, B. A.; LEUNG, K. V.; MANGERON, D., et OGUZTORELI, M. N.: «Studi concernenti le equazioni polilineari», *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat.*, Napoli, IV. Ser., 44, 285-291, 1978.

[9] BONDARENKO, B. A., et SULEIMANOV, A.: «Polywave and quasipolynomial functions and their appl. to certain problems of oscillation theory» (Russian), dans le vol. *Direct and inverse problems for partial diff. equations and their appl.* (Russian). Ed.: M. S. Salahitdinov. Izd. FAN UzSSR, Teshkent, 1978, 188 p., pp. 175-182.

[10] BONDARENKO, B. A.; MANGERON, D.; DE OLIVEIRA SANTOS, J. P., et SHIMEMURA, E.: «Problèmes concernat certaines extensions des équations polyvibrantes, dites "équations de Mangeron"», *Bul. Inst. Politehn. Iasi*, N.S., Vol. XXX, Fasc. 1-2, Sect. I (Math., Méc., Phys.), 1980, pp. 9-12.

[11] BONDARENKO, B. A.; FERNÁNDEZ, D. L.; MANGERON, D., et TOPENTCHAROV, V. V.: «Étude d'une nouvelle classe d'équations polylinéaires aux opérateurs différentiels différents, dont certains sont des opérateurs polyvibrants», *C. R. Acad. Bulg. Sci.* (à paraître).

[12] BONDARENKO, B. A.; LEUNG, K. V.; MANGERON, D., et OGUZTORELI, M. N.: «Operational representation of solutions of a class of polylinear equations», *Notices Amer. Math. Soc.*, Febr., issue, 1977.

[13] MANGERON, D.: «Problèmes concernant les équations polyvibrantes», *C.R. Acad. Sci.*, Paris, 266A (1968), 870-873; 976-979; 1050-1052; 1103-1106; 1121-1124; 204 (1937), 94-96; 544-547; 1022-1024. Voir aussi: Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. sci., fis., mat., nat. (6)16 (1932), 305-310; Rend. Accad. Sci. fis., mat., Napoli, (4), 2 (1932), 29-40; Giorn. Mat. di Battaglini, 71, 89-139 (1933) et d'autres encore.

[14] MANGERON, D.; KRIVOSHEIN, L. E.: «New methods of numerical calculation of various integro-differentiel systems with polyvibrating operators, I, II, III», *Rev. Roumaine Sci. Techn.*, Série Méc. appl., 9, 1195-1221 (1964); 10, 3-34 (1965), 11, 733-756 (1966). Voir aussi: *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.*, *33*, 226-266 (1963); *34*, 344-368 (1964); *35*, 341-364 (1965).

[15] EASWARAN, S.: *A study on certain higher order partial differential equations of Mangeron.* Doctoral Dissertation. Dept. of Math. The University of Alberta, Edmonton, Alberta, 1972.

[16] BIRKHOFF, G., et GORDON, W.: «On the draftsman and related equations», *J. Approx. Theory*, *1* (1968), 199-208.

[17] BAINOV, D. D.; CHALÉAT, R.; KRIVOSHEIN, L. E., et SALANDI, D.: «Problèmes concernant différentes classes d'équations intégro-différentielles aux opérateurs polyvibrants de Mangeron, II», *Bul. Polytechn. Inst Jassy*, N.S., Sect. I, Fasc. 1-2, 27-31 (1976).

[18] CRACIUNAS, P.; AMBROSIO, U. D.; IONITA, N., et MARAVALL CASESNOVES, D.: «Problèmes à la frontière pour certains systèmes non linéaires aux opérateurs héréditaires et polyvibrants de Mangeron», *Bul. Stiint. Tehn. Inst. Politehn.*, Traian Vuia, Timisoara (sous presse).

[19] GORDON, W.: «Automatic design of free form surfaces», *General Motors Research Series*, Warren, Michigan, 1968.

[20] NIELSON, G.: «A triangular interpolation with linear coefficients based upon the fundamental bilinear interpolant of Mangeron», *Acta Math. Sinica* (à parâtre).

[21] OGUZTORELI, M. N.: «Cold homogeneous plasma oscillations», *J. Plasma Phys.*, 1976, 8 p.