Una nota sobre la propiedad de Blumberg

Por MANUEL LÓPEZ PELLICER

Recibido: 3 febrero 1982

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA

Resumen

Se considera una clase $\mathscr{S}$ de espacios topológicos que verifican el primer axioma de numerabilidad para los que la propiedad de Blumberg respecto a un espacio topológico con base numerable que admita un subconjunto infinito discreto es equivalente a ser un espacio de Baire.

Abstract

A class $\mathscr{S}$ of first countably spaces for which Blumberg's property with respect to a second countably space, which contains an infinite discrete subset, is equivalent to be a Baire space is considered here.

Sea X un espacio topológico que verifica el primer axioma de numerabilidad. Sea $\{U(x, m)\colon m = 1, 2, ...\}$ una base decreciente de entornos abiertos del punto x.

1. **Definición.** Se dice que X verifica la condición S si dada una sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ de puntos de X y una sucesión $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ divergente a $+\infty$, siendo $m_k \in \{1, 2, ...\}$ se verifica

$$\bigcap \{U(x_k, m_k)\colon k = 1, 2, ...\} \subset \overline{\{x_k\colon k = 1, 2, ...\}} \tag{2}$$

La condición [2] se verifica en los espacios pseudo-semimétricos. Representaremos por $\mathscr{S}$ a la clase de espacios que verifican la condición S.

Sea $A \subset X$ y $x \in X$.

3. **Definición.** Se dice que x es un punto profundo (*heavy point* en [1], pág. 30, theor. 3.2) respecto a A si existe un m_0 tal que para cualquier punto $v \in U(x, m_0)$ se tiene que $A \cap U(v, p)$ es de segunda categoría en X, $p = 1, 2, ...$ Se tiene, pues, que:

4. Si $m \geqslant m_0$ y $v \in U(x, m)$, entonces $A \cap U(v, p)$ es de segunda categoría en X, $p = 1, 2, ...$

Sea Y un espacio topológico cuya topología admite una base numerable $\{G_k\colon k = 1, 2, ...\}$ tal que $G_1 = Y$. Sea $G_k(y) = \bigcap \{G_m\colon y \in G_m, m \leqslant k\}$. Entonces $\{G_k(y)\colon k = 1, 2, ...\}$ es una base de entornos del punto y que, por definición, tiene la siguiente propiedad:

5. Si $y' \in G_k(y)$ y $k' \geqslant k$, entonces $G_{k'}(y') \subset G_k(y)$.

Sea f una aplicación de X en Y. Para $z \in X$ convendremos en que $W_k(z) = f^{-1}(G_k(f(z)))$. Se sigue de 5 que:

6. Si $z' \in W_k(z)$ y $k' \geqslant k$, entonces $W_{k'}(z') \subset W_k(z)$.

Sea $Z = \{z \in X\colon z$ es un punto profundo respecto a $W_k(z), 1, 2, ...\}$. En [1], p. 30, th. 3.2, se prueba que:

7. $X - Z$ es un conjunto de primera categoría.

Si X es un espacio de Baire se tiene, de acuerdo con 7, que Z es denso en X. En la proposición siguiente supondremos que X es un espacio de Baire.

8. **Proposición.** Dados $z \in Z$ y un natural k, existe un m_0 tal que si $m \geqslant m_0$, entonces $U(z, m) \cap W_k(z) \cap Z$ es denso en $U(z, m)$.

Demostración. Por 4, con $A = W_k(z)$ y $x = z$, se tiene que si $m \geqslant m_0$ y $U(v, p)$ está contenido en $U(z, m)$, entonces $U(v, p) \cap W_k(z)$ es un conjunto de segunda categoría, que por 7 corta a Z. De aquí se sigue la conclusión.

De los resultados precedentes se deduce el siguiente teorema:

1. **Teorema.** Sea X un espacio de Baire que verifica la condición S, sea Y un espacio topológico con base numerable y f una aplicación de X en Y. Existe en X un subespacio D denso y metrizable tal que $f_{/D}$ es continua.

Demostración. La densidad de Z, 8, y el lema de Zorn nos permiten determinar una familia maximal $\mathscr{U}_1$ de conjuntos disjuntos dos a dos de la forma

$$\mathscr{U}_1 = \{U(z_{n_1}, m_1(z_{n_1})) : z_{n_1} \in Z_1\}$$

tal que:

$$Z_1 \subset Z$$

$$m_1(z_{n_1}) \geqslant 1, \; z_{n_1} \in Z_1$$

$$U(z_{n_1}, m_1(z_{n_1})) \cap W_1(z_{n_1}) \cap Z \text{ es denso en } U(z_{n_1}, m_1(z_{n_1})), \; z_{n_1} \in Z_1$$

Por maximalidad se tiene que $\bigcup \mathscr{U}_1$ es densa en X. Supongamos que para $1 \leqslant i \leqslant k - 1$ se han determinado $k - 1$ familias $\mathscr{U}_i$ de conjuntos disjuntos dos a dos de la forma

$$\mathscr{U}_i = \{U(z_{n_1 n_2 \cdots n_i}, m_i(z_{n_1 n_2 \cdots n_i})) : z_{n_1 n_2 \cdots n_i} \in Z_i\}$$

tales que

$$Z_{i-1} \subset Z_i \subset Z \qquad [9]$$

donde $Z_0 = \phi$, $i = 1, 2, \ldots, k - 1$.

$$m_i(z_{n_1 n_2 \cdots n_i}) \geqslant \text{i} \qquad [10]$$

$$U(z_{n_1 n_2 \cdots n_i}, m_i(z_{n_1 n_2 \cdots n_i})) \cap W_i(z_{n_1 n_2 \cdots n_i}) \cap Z \qquad [11]$$

es denso en $U(z_{n_1 n_2 \cdots n_i}, m_i(z_{n_1 n_2 \cdots n_i}))$.

$$\bigcup \mathscr{U}_i \text{ es un subconjunto denso en } X \qquad [12]$$

$$U(z_{n_1 n_2 \cdots n_i}, m_i(z_{n_1 \cdots n_i})) \cap W_i(z_{n_1 \cdots n_i}) \subset U(z_{n_1 \cdots n_{i-1}} m_{i-1}(z_{n_1 \cdots n_{i-1}})) \cap W_{i-1}(z_{n_i \cdots n_{i-1}}) \quad [13]$$

Consideremos el conjunto $U(z_{n_1n_2\cdots n_{k-1}}, m_{k-1}(z_{n_1n_2\cdots n_{k-1}}))$. Entonces por [11], 8. y el lema de Zorn es posible determinar una familia maximal

$$\mathcal{U}_{z_{n_1\cdots n_{k-1}}} = \{U(z_{n_1\cdots n_{k-1}n_k}, m_k(z_{n_1\cdots n_{k-1}n_k})) : z_{n_1n_2\cdots n_{k-1}n_k} \in Z_{n_1n_2\cdots n_{k-1}}\}$$

de subconjuntos de $U(z_{n_1n_2\cdots n_{k-1}})$ disjuntos dos a dos tales que

$$z_{n_1\cdots n_{k-1}} \in Z_{n_1\cdots n_{k-1}} \subset U(z_{n_1\cdots n_{k-1}}, m_{k-1}(z_{n_1\cdots n_{k-1}})) \cap W_{k-1}(z_{n_1\cdots n_{k-1}}) \cap Z \qquad [14]$$

$$m_k(z_{n_1\cdots n_{k-1}n_k}) \geqslant k$$

$$U(z_{n_1\cdots n_k}, m_k(z_{n_1\cdots n_k})) \cap W_k(z_{n_1\cdots n_k}) \cap Z \text{ es denso en } U(z_{n_1n_2\cdots n_k}, m_k(z_{n_1\cdots n_k}))$$

Entonces se verifica, por maximalidad, que

$$\bigcup \{U(z_{n_1\cdots n_k}, m_k(z_{n_1\cdots n_k})) : z_{n_1\cdots n_k} \in Z_{n_1\cdots n_{k-1}}\}$$

es un subconjunto denso de $U(z_{n_1\cdots n_{k-1}})$

De 6. [14] y de la inclusión

$$U(z_{n_1\cdots n_k}, m_k(z_{n_1\cdots n_k})) \subset U(z_{n_1\cdots n_{k-1}}, m_{k-1}(z_{n_1\cdots n_{k-1}}))$$

se sigue, obviamente, que

$$U(z_{n_1\cdots n_k}, m_k(z_{n_1\cdots n_k})) \cap W_k(z_{n_1\cdots n_k}) \subset U(z_{n_1\cdots n_{k-1}}, m_{k-1}(z_{n_1\cdots n_{k-1}})) \cap W_{k-1}(z_{n_1\cdots n_{k-1}}) [15]$$

Se tiene, por tanto, que

$$\mathcal{U}_k = \bigcup \{\mathcal{U}_{z_{n_1\cdots n_{k-1}}} : z_{n_1\cdots n_{k-1}} \in Z_{k-1}\}$$

es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos que se puede escribir en la forma

$$\mathcal{U}_k = \{U(z_{n_1\cdots n_k}, m_k(z_{n_1\cdots n_k})) : z_{n_1\cdots n_k} \in Z_k\}$$

y verifica las propiedades [9], [10], [11], [12] y [13]. Por el principio de inducción tenemos determinada una familia $\{\mathcal{U}_i, i = 1, 2, \ldots\}$ que verifica las antedichas propiedades.

Sea D la unión de la familia expansiva $\{Z_i : i = 1, 2, \ldots\}$. Vamos a probar que f/D es continua. Sea $z \in D$. Existe j_0 tal que si $j \geqslant j_0$, entonces $z = z_{l_1\cdots l_j}$. Por construcción $U(z_{l_1\cdots l_j}, m_j(z_{l_1\cdots l_j})) \cap D$ sólo contiene puntos que se pueden escribir en la forma $z_{l_1\cdots l_j n_{j+1}\cdots n_i}$. Se tiene, aplicando [15]:

$$\begin{aligned} z_{l_1l_2\cdots l_jn_{j+1}\cdots n_{i-1}n_i} \in\ & U(z_{l_1\cdots n_i}, m_i(z_{l_1\cdots n_i})) \cap W_i(z_{l_1\cdots n_i}) \subset \\ & \subset U(z_{l_1\cdots n_{i-1}}, m_{i-1}(z_{l_1\cdots n_{i-1}})) \cap W_{i-1}(z_{l_1\cdots n_{i-1}}) \subset \\ & \subset \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \subset \\ & \subset U(z_{l_1\cdots l_j}, m_j(z_{l_1\cdots l_j})) \cap W_j(z_{l_1\cdots l_j}) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$U(z_{l_1 \dots l_j}, m_j(z_{l_1 \dots l_j})) \cap D \subset U(z_{l_1 \dots l_j}) \cap W_j(z_{l_1 \dots l_j})$$

de lo que se sigue que

$$f(U(z_{l_1 \dots l_j}, m_j(z_{l_1 \dots l_j})) \cap D) \subset G_j(f(z_{l_1 \dots l_j}))$$

y, por tanto, la continuidad de f en z.

D, con la topología inducida, es metrizable, por el teorema de Nagata-Smirnov, pues $\mathcal{U}_{i/D}$, $i = 1, 2, \dots$ genera por [10] una base de la topología inducida, siendo cada $\mathcal{U}_i$ una familia de conjuntos disjuntos dos a dos.

Finalmente, D es denso en X, pues por [2] y [10] D es denso en $\bigcap_i \{\bigcup \mathcal{U}_i : i = 1, 2, \dots\}$ y esta intersección es densa en X, puesto que X es un espacio de Baire y se verifica [12].

Se dice que un espacio topológico X tiene la propiedad de Blumberg respecto a Y si para cada aplicación f de X en Y existe un subespacio D denso en X tal que $f_{/D}$ es continua. En [1], p. 29, th. 3.1, se prueba que si Y contiene un subconjunto infinito discreto y X tiene la propiedad de Blumberg respecto a Y, entonces X es un espacio de Baire. De este resultado y del teorema precedente se obtiene como corolario directo que:

2. **Teorema.** Sea $X \in \mathcal{Q}$ e Y un espacio que verifica el segundo axioma de numerabilidad y contiene un subconjunto infinito discreto. Entonces X es un espacio de Baire si y sólo si tiene la propiedad de Blumberg respecto a Y.

BIBLIOGRAFIA

[1] HAWORTH, R. C., y MCCOY, R. A.: «Baire spaces», *Dissertationes Mathematicae*, CXLI, Polska Akademia Mauk, Instytut Matematyczny, 1977.

Universidad Politécnica (ETSIA)
Valencia 22. España