Desarrollos asintóticos en varias variables complejas[1]

Por M. FERNÁNDEZ CASTILLO

Recibido: 2 febrero 1982

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA

1. EL ESPACIO A(T)

Sea $D \subset C^n$, $D = D_1 \times \cdots \times D_n$, un polidominio de Jordan, tal que $0 \in \partial_0 D$ (frontera distinguida de D), localmente convexo en 0, y $f: D \to C$ una función holomorfa.

1. **Definición.** La función f tiene desarrollo asintótico en $0 \in \partial_0 D$ si y sólo si existen formas u_p, $p = 0, 1, 2, \ldots$, donde $u_p: D \times D \times \overset{p}{\cdots} \times D \to C$, $u_p p$-lineal simétrica, de modo que, si se denota $u_p(\zeta^p) = u_p(\zeta, \ldots, \zeta)$, $\zeta \in D$, se verifica:

$$\lim_{\substack{\zeta \to 0 \\ \zeta \in D}} \frac{f(\zeta) - \sum_0^m u_p(\zeta^p)}{\|\zeta\|^p} = 0, \quad \forall m \in N$$

En este caso escribimos $f(\zeta) \simeq \sum_0^\infty u_p(\zeta^p)$.

2. **Proposición.** La función f determina, de modo único, las formas p-lineales u_p.

Demostración. En efecto, si existieran otras formas u'_p verificando las mismas condiciones, entonces $u_0 = \lim_{\zeta \to 0} f(\zeta) = u'_0$.

[1] Este artículo forma parte de la memoria *Algunos resultados sobre desarrollos asintóticos en una y varias variables complejas*, que realizada bajo la dirección de D. Manuel Valdivia, fue presentada en la Universidad de Valencia, para optar al grado de Doctor en Ciencias, sección de Matemáticas.

Aplicamos inducción completa. Si $u_0, u_1, ..., u_{q-1}$, coinciden con $u'_0, u'_1, ..., u'_{q-1}$, entonces

$$\frac{|u_q(\zeta^q) - u'_q(\zeta^q)|}{\|\zeta\|^q} = \frac{\left| f(\zeta) - \sum_0^q u_p(\zeta^p) - \left[f(\zeta) - \sum_0^q u'_p(\zeta^p) \right] \right|}{\|\zeta\|^q} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left| f(\zeta) - \sum_0^q u_p(\zeta^p) \right|}{\|\zeta\|^q} + \frac{\left| f(\zeta) - \sum_0^q u'_p(\zeta^p) \right|}{\|\zeta\|^q}$$

de donde se deduce que

$$\lim_{\zeta \to 0} \frac{|u_q(\zeta^q) - u'_q(\zeta^q)|}{\|\zeta\|^q} = 0$$

Por tanto, $u_q(\zeta^q) = u'_q(\zeta^q)$.

NOTA.—Como consecuencia del teorema de Colombeau (Colombeau), dada una sucesión $\{u_p\}_{p \in N}$, donde $u_p \in L_{p,s}(C^p, C)$, para cada p, existe una función $f \in H(D)$ tal que f posee desarrollo asintótico en 0, y este desarrollo es $f(\zeta) \simeq \sum_0^\infty u_p(\zeta^p)$.

3. **Definición.** Llamamos función resto de orden n a la función

$$R_{n,f}(\zeta) = \frac{f(\zeta) - \sum_0^n u_p(\zeta^p)}{\|\zeta\|^n}$$

Los restos son funciones continuas de D en C, y tanto la función f como las funciones $R_{n,f}$ se consideran prolongadas por continuidad al origen, ya que tienen límite en él.

4. **Definición.** Llamaremos $A = \{f \in H(D) \mid f$ posee desarrollo asintótico en $0 \in \partial_0 D\}$.

Teniendo en cuenta que D es un polidominio simplemente conexo, los polinomios son densos en $H(D)$ (Gunning-Rossi, pág. 37, t.ª 2) y los polinomios pertenecen a A, por lo que se tiene:

5. **Proposición.** A es un subespacio vectorial propio de $H(D)$, denso en él.

6. **Definición.** Llamaremos T a la topología definida sobre A por la familia de seminormas $q_{K,m}(f)$, donde

$$q_{K,m}(f) = \text{máx} \left\{ \sup_{\zeta \in K} |f(\zeta)|, \sup_{\substack{\zeta \in K \\ s \leqslant m}} |R_{s,f}(\zeta)|, \max_{\substack{0 \leqslant p \leqslant m \\ \|\zeta\| \leqslant 1 \\ \zeta \in K}} \{|u_p(\zeta^p)|\} \right\}$$

siendo K un compacto, $K \subset D \cup \{0\}$, $0 \in K$ y $m \in N$.

Por ser $q_{K,m}(f)$ seminormas sobre A, el espacio $A(T)$ es localmente convexo. Demostraremos que $A(T)$ es completo. Sin embargo, como la familia de compactos $\{K\}$ no admite ninguna sucesión fundamental, $A(T)$ no es metrizable. Es más, sobre el espacio A, no se puede definir ninguna topología, que lo haga Fréchet y que implique la convergencia puntual (Mira).

2. LOS ESPACIOS $A_\alpha(T_\alpha)$

7. **Definición.** Dada una sucesión fundamental de compactos de D, $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \subset \cdots$, llamamos $\{K_{\alpha,p}\}_{p=0}^{\infty}$, a una sucesión de compactos de $\overset{\circ}{D} \cup \{0\}$, tales que, para todo $p \in N$, verifican: $0 \in K_{\alpha,p}$; $\Delta_p \subset K_{\alpha,p}$; $K_{\alpha,p} - \{0\} \subset \overset{\circ}{K}_{\alpha,p+1}$.
α recorre un conjunto de índices Γ, infinito no numerable.

8. **Definición.** Decimos que $f \in H(D)$ tiene desarrollo asintótico en el origen a través de la sucesión $\{K_{\alpha,p}\}_{p=0}^{\infty}$ si y sólo si existen u_q^α, $q = 0, 1, 2, \ldots, u_q^\alpha : D^q \to C$, $u_q^\alpha \in L_{q,s}(C^q, C)$ tal que para todo $p, m \in N$

$$\lim_{\substack{\zeta \to 0 \\ \zeta \in K_{\alpha,p}}} \frac{f(\zeta) - \sum\limits_0^m u_q^\alpha(\zeta^q)}{\|\zeta\|^m} = 0$$

Expresaremos esto diciendo que el α-desarrollo asintótico de f es $f(\zeta) \overset{\alpha}{\simeq} \sum\limits_0^{\infty} u_q^\alpha(\zeta^q)$ y a las funciones $R_{m,f}^\alpha(\zeta)$ las llamaremos α-restos de orden m de f.

Designamos por A_α el espacio vectorial complejo de tales funciones y por T_α la topología sobre A_α definida por las seminormas:

$$q_m^\alpha(f) = \text{máx}\left\{ \sup_{\zeta \in K_{\alpha,m}} |f(\zeta)|,\ \sup_{\substack{\zeta \in K_{\alpha,m} \\ s \leqslant m}} |R_{s,f}^\alpha(\zeta)|,\ \max_{\substack{0 \leqslant q \leqslant m \\ \zeta \in K_{\alpha,m} \\ \|\zeta\| \leqslant 1}} |u_q^\alpha(\zeta^q)| \right\}$$

donde $m \in N$.

Como en (Mira), se demuestran las proposiciones siguientes:

9. **Proposición.** $A_\alpha(T_\alpha)$ es un espacio de Fréchet.

10. **Proposición.** $A_\alpha(T_\alpha)$ es un espacio de Schwartz.

11. **Corolario.** $A_\alpha(T_\alpha)$ es un espacio de Montel.

12. **Corolario.** $A_\alpha(T_\alpha)$ es separable.

13. **Proposición.** A es la intersección de todos los A_α.

Demostración. Es inmediato que $A \subset A_\alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma$. Recíprocamente, si $f \in A_\alpha$, para todo $\alpha \in \Gamma$, vamos a ver que $f \in A$. En efecto, dada $\{\zeta_r\}_{r \in N}$ una sucesión de puntos de D tal que $\lim\limits_{r \to \infty} \zeta_r = 0$, existe entonces $K_{\alpha,m}$ tal que $\{\zeta_r\} \subset K_{\alpha,m}$, $f \in A_\alpha$, por lo que

$$f(\zeta) = u_0^\alpha + u_1^\alpha(\zeta) + \cdots + u_q^\alpha(\zeta^q) + \|\zeta\|^q R_{q,f}^\alpha(\zeta)$$

y

$$\lim_{r\to\infty} f(\zeta_r) = \lim_{\substack{\zeta\to 0\\ \zeta\in K_{\alpha,m}}} f(\zeta) = u_0^\alpha$$

Pero $u_0^\alpha = u_0^\beta$, para $\beta\in\Gamma$, pues si tomamos $\{\zeta_r'\}_{r\in N}$, que también converja a cero, tal que $\{\zeta_r'\} \subset K_{\beta,s}$, se verificará que

$$\lim_{r\to\infty} f(\zeta_r') = \lim_{\substack{\zeta\to 0\\ \zeta\in K_{\beta,s}}} f(\zeta) = u_0^\beta$$

Como la sucesión $\zeta_1, \zeta_1', \zeta_2, \zeta_2', \ldots$ también tiende a cero, existe $K_{\gamma,t}$ que la contiene, con lo que $u_0^\alpha = u_0^\beta = u_0^\gamma$, para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$.

Por inducción completa se demuestra que para todo $\alpha, \beta\in\Gamma$, $u_q^\alpha = u_q^\beta$, para todo $q\in N$.

Por otra parte, ya que

$$R_{q,f}^\alpha(\zeta) = \frac{f(\zeta) - u_0^\alpha - \cdots - u_q^\alpha(\zeta^q)}{\|\zeta\|^q} = \frac{f(\zeta) - u_0^\beta - \cdots - u_q^\beta(\zeta^q)}{\|\zeta\|^q} = R_{q,f}^\beta(\zeta)$$

se tiene que $f\in A$, es decir, posee desarrollo asintótico en el origen.

Sea $I_\alpha\colon A \to A_\alpha$ la inyección canónica de A en A_α.

14. **Proposición.** Cada I_α es continua.

Demostración. Sea

$$U = \left\{ f\in A \mid \sup_{\zeta\in K_{\alpha,m}} |f(\zeta)| < \varepsilon,\ \sup_{\substack{\zeta\in K_{\alpha,m}\\ s\leqslant m}} |R_{s,f}^\alpha(\zeta)| < \varepsilon,\ \max_{\substack{0\leqslant p\leqslant m\\ \zeta\in K_{\alpha,m}\\ \|\zeta\|\leqslant 1}} \{|_p^\alpha(\zeta^p)|\} < \varepsilon \right\}$$

un T_α-entorno de cero en A. Tomando

$$K \supset K_{\alpha,m} \quad \text{y} \quad V = \left\{ f\in A \mid \sup_{\zeta\in K} |f(\zeta)| < \varepsilon;\ \sup_{\substack{\zeta\in K\\ s\leqslant m}} |R_{s,f}(\zeta)| < \varepsilon;\ \max_{\substack{0\leqslant p\leqslant m\\ \zeta\in K\\ \|\zeta\|\leqslant 1}} \{|u_p(\zeta^p)|\} < \varepsilon \right\}$$

V es un T-entorno de cero tal que $V \subset U$. Por tanto, sobre A, $T_\alpha \subset T$ y cada I_α es continua.

Dotamos a Γ de una ordenación filtrante del siguiente modo: dados $\alpha, \beta\in\Gamma$, consideramos las familias de compactos $\{K_{\alpha,m}\}_{m=1}^\infty$, $\{K_{\beta,m}\}_{m=1}^\infty$. Decimos que $\alpha \leqslant \beta$ si y sólo si para todo $p\in N$, existe $m\in N$ tal que $K_{\alpha,p} \subset K_{\beta,m}$.

Consideremos la aplicación $I_{\alpha\beta}\colon A_\beta \to A_\alpha$ cuando $\alpha \leqslant \beta$, donde $I_{\alpha\beta}$ es la inyección de A_β en A_α. $I_{\alpha\beta}$ es continua y se verifica que si $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, $I_{\alpha\beta} \circ I_{\beta\gamma} = I_{\alpha\gamma}$; $I_\alpha = I_{\alpha\beta} \circ I_\beta$.

El sistema $(A_\alpha, I_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Gamma}$ es, por tanto, un sistema proyectivo y se verifica:

15. **Teorema.** $A(T)$ es el límite proyectivo topológico de los espacios $A_\alpha(T_\alpha)$ bajo las aplicaciones $I_{\alpha\beta}$.

Demostración. El límite proyectivo de los $A_\alpha(T_\alpha)$ es el subespacio del producto

$\prod_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha(T_\alpha)$ formado por aquellos elementos $\Phi = (\phi_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ tales que si $\alpha \leqslant \beta$, $\phi_\alpha = I_{\alpha\beta}(\phi_\beta)$. Podemos identificar cada $f \in A$ con el elemento $(f_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \in \prod_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$ tal que para todo $\alpha \in \Gamma$, $f = f_\alpha$.

Claramente, $A \subset \varprojlim I_{\alpha\beta}(A_\beta)$. Recíprocamente, como $I_{\alpha\beta}$ son identidades, $f_\alpha = f_\beta$, para todo $\alpha \leqslant \beta$, luego $\varprojlim I_{\alpha\beta}(A_\beta) \subset A$. Veamos que T es la mínima topología para la cual todas las aplicaciones $I_\alpha \colon A(T) \to A_\alpha(T_\alpha)$ son continuas. En efecto, sea $K \subset D \cup \{0\}$, un compacto tal que $0 \in K$. Existe $K_{\beta,m}$ tal que $K \subset K_{\beta,m}$. Sea

$$U = \left\{ f \in A \mid \sup_{\zeta\in K} |f(\zeta)| < \varepsilon;\ \sup_{\substack{\zeta\in K\\ s\leqslant m}} |R_{s,f}(\zeta)| < \varepsilon;\ \max_{\substack{0\leqslant p\leqslant m\\ \zeta\in K\\ \|\zeta\|\leqslant 1}} \{|u_p(\zeta^p)|\} < \varepsilon \right\}$$

y

$$U_{\beta m} = \left\{ f \in A_\beta \mid \sup_{\zeta\in K_{\beta,m}} |f(\zeta)| < \varepsilon;\ \sup_{\substack{\zeta\in K_{\beta,m}\\ s\leqslant m}} |R^\beta_{s,f}(\zeta)| < \varepsilon;\ \max_{\substack{0\leqslant p\leqslant m\\ \zeta\in K\\ \|\zeta\|<1}} \{|u^\beta_p(\zeta^p)|\} \in \varepsilon \right\}$$

Sea T_1 una topología sobre A tal que haga continuas todas las aplicaciones I_α, $\alpha \in \Gamma$. $I_\beta^{-1}(U_{\beta m})$ es un T_1-entorno de cero en A, pero $I_\beta^{-1}(U_{\beta m}) \subset U$, por tanto, $T \subset T_1$.

16. **Corolario.** $A(T)$ es un espacio de Schwartz, semirreflexivo completo y semi-Montel.

17. **Proposición.** Los subconjuntos compactos de $A(T)$ son metrizables.

Demostración. Sobre los compactos de $A(T)$, las topologías T y T_α coinciden, ya que T_α es de Hausdorff y $T_\alpha \subset T$. Como T_α es metrizable, cualquiera que sea $\alpha \in \Gamma$, queda demostrado.

3. EL ESPACIO E(T′)

Sea $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ un multiíndice, donde $\nu_1, \dots, \nu_n \in N$. Sea $f \in H(D)$. Designamos por

$$D^\nu f(\zeta) = \left(\frac{\partial f(\zeta)}{z_1^{\nu_1}}\right) \cdots \left(\frac{\partial f(\zeta)}{z_n^{\nu_n}}\right)$$

18. **Definición.** Llamamos $E = \{f \in H(D)\} \mid$ existe $\lim_{\zeta\to 0} D^\nu f(\zeta)$, para todo $\nu \in N^n\}$.

Es inmediato que se verifica la siguiente proposición.

19. **Proposición.** E es un subespacio vectorial propio de $H(D)$, denso en $H(D)$.

20. **Proposición** E es un subconjunto de A.

Demostración. Por ser D localmente convexo en el origen, existe un entorno de cero, V, tal que $V \cap D$ es convexo.

Sea $\zeta \in V \cap D$; el segmento $[0, \zeta] \subset D$. Si $t \in [0, \zeta]$, $t = \lambda\zeta$, con $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Definimos la función $\Phi(\lambda) = f(\lambda\zeta)$. $\Phi\colon [0, 1] \to C$. Se verifica que

$$\lim_{\lambda \to 0} \Phi(\lambda) = \lim_{\zeta \to 0} f(\lambda\zeta) = a_{(0, \ldots, 0)}$$

$$\Phi'(\lambda) = D^{(1, 0, \ldots, 0)} f(\lambda\zeta) z_1 + D^{(0, 1, 0, \ldots, 0)} f(\lambda\zeta) z_2 + \cdots + D^{(0, \ldots, 0, 1)} f(\lambda\zeta) z_n = \sum_{|v|=1} D^v f(\lambda\zeta) \zeta^v$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \Phi'(\lambda) = \sum_{|v|=1} a_v \zeta^v, \ldots, \lim_{\lambda \to 0} \frac{\Phi^{(k)}(\lambda)}{k!} = \sum_{|v|=k} \frac{1}{v!} a_v \zeta^v$$

Llamando $u_k(\zeta^k) = \sum_{|v|=k} \frac{1}{v!} a_v \zeta^v$, que es un polinomio homogéneo de grado k, por tanto, una forma k-lineal simétrica se tiene:

$$\left| \Phi(1) - \Phi(0) - \Phi'(0) - \cdots - \frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!} \right| \leqslant \frac{\sup |\Phi^{(k+1)}(\lambda)}{(k+1)!}, \quad \forall k \in N$$

Es decir,

$$\left| f(\zeta) - a_0 - \sum_{|v|=1} a_v \zeta^v - \cdots - \sum_{|v|=k} \frac{1}{v!} a_v \zeta^v \right| \leqslant \sup \left| \sum_{|v|=k+1} \frac{1}{v!} D^v f(\lambda\zeta) \zeta^v \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|v|=k+1} \sup \left| \frac{1}{v!} D^v f(\lambda\zeta) \right| \|\zeta\|^{k+1}$$

Como tienen límite en el origen todas las derivadas, para todo v tal que $|v| = k + 1$, existe $M_v > 0$ tal que

$$\sup_{\zeta \in V \cap D} \left| \frac{1}{v!} D^v f(\zeta) \right| \leqslant M_v$$

Sea $M = \sum_{|v|=k+1} M_v$. Entonces,

$$|f(\zeta) - u_0 - u_1(\zeta) - \cdots - u_k(\zeta^k)| \leqslant M \|\zeta\|^{k+1}$$

cuando $\zeta \in V \cap D$. Luego

$$\lim_{\zeta \to 0} \frac{|f(\zeta) - u_0 - \cdots - u_k(\zeta^k)|}{\|\zeta\|^k} \leqslant \lim_{\zeta \to 0} M \|\zeta\| = 0$$

de donde $f \in A$.

Veamos que $E \neq A$. Necesitamos el siguiente lema:

21. **Lema.** Sea $D = D_1 \times \cdots \times D_n$ un polidominio de Jordan. Sea $f: D \to C$ tal que $f(\zeta) = g \circ \text{proy}_1(\zeta) = g(z_1)$, donde $g: D_1 \to C$ es holomorfa y con desarrollo asintótico en $0 \in \partial D_1$. Entonces, $f \in A$.

Demostración. a) f es holomorfa en D, pues es separadamente holomorfa, por el teorema de Hartogs (Narasimhan, pág. 43).

b) $f \in A$. En efecto, si $g(z_1) \simeq \sum_{p=0}^{\infty} a_p z_1^p$, entonces

$$f(\zeta) \simeq \sum_{p=0}^{\infty} u_p(\zeta^p)$$

donde $u_p(\zeta^p) = a_p z_1^p$, puesto que

$$\frac{\left|f(\zeta) - \sum_{p=0}^{q} u_p(\zeta^p)\right|}{\|\zeta\|^q} = \frac{\left|g(z_1) - \sum_{p=0}^{q} a_p z_1^p\right|}{|z_1|^q} \frac{|z_1|^q}{\|\zeta\|^q} = |R_{q,g}(z_1)| \frac{|z_1|^q}{\|\zeta\|^q}$$

de donde

$$\lim_{\zeta \to 0} \frac{\left|f(\zeta) - \sum_{p=0}^{q} u_p(\zeta^p)\right|}{\|\zeta\|^q} = 0$$

22. **Teorema.** E es distinto de A.

Demostración. Dado el dominio D_1, tomamos una sucesión de puntos $\{a_n\}_{n \in N}$ fuera de D_1, convergente a cero, de modo que si llamamos $\lambda_n = d(a_n, D_1)$, la sucesión

$$\left\{\frac{|a_{n+1} - a_n|^2 |a_n|^n}{2^n \lambda_n}\right\}$$

sea divergente a $+\infty$, y tal que la sucesión $\{|a_{n+1} - a_n|\}$ sea decreciente.

Consideremos la serie

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|a_n|^n \lambda_n}{z_1 - a_n}$$

Esta serie proporciona una función $g(z_1): D_1 \to C$, holomorfa en D_1 y con desarrollo asintótico en $0 \in \partial D_1$ (Herrero, t.ª 1.1).

Sea $f: D \to C$ tal que $f(\zeta) = g \circ \text{proy}_1(\zeta) = g(z_1)$. Por el lema 21, $f(\zeta)$ tiene desarrollo asintótico en $0 \in \partial_0 D$. Sin embargo, $f \notin E$, pues la derivada $D^{(1,0,\ldots,0)} f(\zeta)$ no está acotada en ningún entorno de cero.

23. **Definición.** Llamamos T' a la topología definida sobre E por la familia de seminormas

$$P_{K,m}(f) = \sup_{\substack{\zeta \in K \\ |\nu| \leq m}} |D^{\nu} f(\zeta)|$$

siendo K compacto, $K \subset D \cup \{0\}$, $0 \in K$.

NOTA.—Convenimos en que $D^{(0,\ldots,0)} f(\zeta) = f(\zeta)$.

Por ser $P_{N,m}$ seminormas, $E(T')$ es localmente convexo.

24. **Proposición.** La topología T' es más fina que la inducida por $A(T)$ sobre E.

Demostración. En efecto, dado un T-entorno de cero cualquiera

$$W = \left\{ f \in E \mid \sup_{\zeta \in K} |f(\zeta)| < \varepsilon;\ \sup_{\substack{\zeta \in K \\ s \leq m}} |R_{s,f}(\zeta)| < \varepsilon;\ \max_{\substack{0 \leq p \leq m \\ \|\zeta\| \leq 1 \\ \zeta \in K}} \{|u_p(\zeta^p)|\} < \varepsilon \right\}$$

construimos $V = \left\{ f \in E \mid \sup_{\substack{\zeta \in K' \\ |\nu| \leq m+1}} |D^{\nu} f(\zeta)| < \delta \right\}$, donde $K \subset K'$.

c = número de n-uplas ν tal que $|\nu| = m + 1$ y $\delta = \min\left\{\varepsilon, \frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{cd(K)}\right\}$.

V es un T'-entorno de cero y se verifica que $V \subset W$.

25. **Definición.** Dada la sucesión de compactos $\{K_{\alpha,p}\}_{p=0}^{\infty}$ (definición 7), llamamos E_{α} al conjunto de las funciones $f: D \to C$, tales que $f \in H(D)$ y existe $\lim_{\substack{\zeta \to 0 \\ \zeta \in K_{\alpha,p}}} D^{\nu} f(\zeta)$, para todo $\nu \in N^n$, para todo $p \in N$.

26. **Definición.** Llamamos T'_{α} *a la topología sobre* E_{α} definida por la familia de seminormas $P_m(f) = \sup_{\substack{\zeta \in K_{\alpha,m} \\ |\nu| \leq m}} |D^{\nu} f(\zeta)|$, $m \in N$.

$E_{\alpha}(T'_{\alpha})$ es localmente convexo y metrizable.

27. **Proposición.** $E_{\alpha}(T'_{\alpha})$ es un espacio de Fréchet.

Demostración. Hay que ver que es completo. En efecto, sea $\{f_r\}_{r \in N}$ una sucesión T'_{α}-Cauchy de funciones de E_{α}. Esto significa que $\forall \varepsilon > 0, \forall m \in N$, existe n_0 tal que si $r, r' \geq n_0$, $P_m(f_r - f_{r'}) < \varepsilon$, es decir,

$$\sup_{\substack{\zeta \in K_{\alpha,m} \\ |\nu| \leq m}} |D^{\nu} f_r(\zeta) - D^{\nu} f_{r'}(\zeta)| < \varepsilon$$

Para $|\nu| = 0$, esto significa que $\sup_{\zeta \in K_{\alpha,m}} |f_r(\zeta) - f_{r'}(\zeta)| < \varepsilon$ y, por tanto, $\{f_r\}_{r \in N}$ es uniformemente convergente en el interior de D, a una función $f \in H(D)$, ya que $H(D)$ es completo con la topología de la convergencia compacta.

Consideremos la sucesión $\{D^{\nu} f_r(\zeta)\}_{r \in N}$, con ν fijo. Esta sucesión es uniformemente convergente en todo compacto del interior de D, a $D^{\nu} f(\zeta)$. Además, $\{D^{\nu} f_r(\zeta)\}_{r \in N}$

converge uniformemente sobre todo compacto $K_{\alpha,m}$, a una función $\Phi_\nu(\zeta)$, que es holomorfa en D y coincide con $D^\nu f(\zeta)$ en los compactos de interior de D.

Sea $\{a_r^\nu\}_{r\in N}$ la sucesión de los límites de $D^\nu f_r(\zeta)$, cuando $\zeta \to 0$, $\zeta \in K_{\alpha,m}$. $\{a_r^\nu\}_{r\in N}$ es una sucesión de Cauchy en C, y su límite $a^\nu = \lim\limits_{\substack{\zeta\in 0\\ \zeta\in K_{\alpha,m}}} \Phi_\nu(\zeta)$; por tanto, existe $\lim\limits_{\substack{\zeta\to 0\\ \zeta\in K_{\alpha,m}}} D^\nu f(\zeta)$, por lo que $f \in E_\alpha$, y $E_\alpha(T_\alpha)$ es completo.

De modo análogo a como en (Mira), se demuestra que $E_\alpha(T_\alpha')$ es un espacio de Schwartz, y como corolario, se verifica que $E_\alpha(T_\alpha')$ es Montel y separable.

Procediendo igual que en las proposiciones 13 y 14 y teorema 15, se estructura $E(T')$ como límite proyectivo de los espacios $E_\alpha(T_\alpha')$, obteniéndose como corolarios que $E(T')$ es completo, semi-Montel, Schwartz y semirreflexivo.

28. **Proposición.** Sobre E, las topologías T y T' son distintas.

Demostración. Si $T = T'$ sobre E, como $E(T')$ es completo, $E(T)$ sería completo y, por tanto, E sería T-cerrado en $A(T)$. Veamos que esto no ocurre. Consideramos la función

$$g(\zeta) = f \circ \mathrm{proy}_1(\zeta) = f(z_1) = \sum_0^\infty \frac{1}{2^m} \frac{|a_m|^m \lambda_m}{z_1 - a_m}$$

donde $\{a_m\}_{m\in N}$ es una sucesión de puntos en el plano z_1, fuera de D_1. $g(\zeta) \in A$ y $g(\zeta) \notin E$.

Sea ahora

$$g_m(\zeta) = f_m \circ \mathrm{proy}_1(\zeta) = f_m(z_1) = \frac{1}{2^m} \frac{|a_m|^m \lambda_m}{z_1 - a_m}$$

Las funciones $g_m \in E$, para todo $m \in N$, pues si $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$, entonces $D^\nu g_m(\zeta) = g_m^{(\nu_1)}(z_1)$

$$D^\nu g_m(\zeta) = g_m^{(\nu_1)}(z_1) = \frac{1}{2^m} \frac{|a_m|^m \lambda_m (-1)^{\nu_1} \nu_1!}{(z_1 - a_m)^{\nu_1+1}}$$

y existe $\lim\limits_{\zeta\to 0} D^\nu g_m(\zeta)$, para todo $\nu \in N^n$ y para todo $m \in N$. Además, la serie $\sum\limits_0^\infty g_m$ es T-convergente a $g(\zeta)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] COLOMBEAU, J. F. (1979): «A results of existence of holomorphic maps which admit a given asymptotic expansion», *Advanced in Holomorphy*, J. A. Barroso (ed.), North-Holland, Pub. Co.

[2] HERRERO, M. C. (1981): «Espacios de funciones holomorfas cuyas derivadas se extienden a un punto de la frontera», *Revista de la R.A.C.E.*, t. LXXV, cuaderno 3.º.
[3] GUNNING, R., y ROSSI, H. (1965): *Analytic functions of several complex variables*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall.
[4] MIRA, J. A. (1981): «Espacios de funciones holomorfas con desarrollo asintótico», *Revista de la R.A.C.E.*, t. LXXV, cuaderno 3.º.
[5] NARASIMHAN, R. (1971): *Several complex variables*, University of Chicago Press.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Alicante