Medidas de inquietud en el caso continuo

Por María Angeles Gil Alvarez y Pedro Gil Alvarez

Recibido: 14 enero 1982

Presentado por el académico numerario D. Sixto Ríos García

1. INTRODUCCION

Antes de introducirnos en el tema central del que va a tratar este trabajo, vamos a justificar la introducción, consideración e interpretación de las *medidas de inquietud.*

En [6], A. M. Yaglom e I. M. Yaglom observaban que la entropía de Shannon no tenía en cuenta todos los factores que determinan la *indeterminación* de una experiencia en todos los sentidos que pueden encontrarse en la vida, ya que la medida propuesta por Shannon depende de la medida de probabilidad establecida sobre el conjunto de los resultados de dicha experiencia, pero no de la «naturaleza» de dichos resultados, del hecho de que estén «próximos» o «alejados».

Este es el fundamento de la introducción de las medidas de *inquietud*, que miden la *indeterminación* promovida por la incorporación a un esquema probabilístico de ciertos factores subjetivos, utilidades, relacionados intrínsecamente con la naturaleza de los resultados (en el sentido de que dos resultados se considerarán próximos o alejados con arreglo a la proximidad o alejamiento entre sus utilidades). Dicha *indeterminación correspondiente a las utilidades* es interpretada en este trabajo como la *inquietud* que la diversidad de las utilidades y el desconocimiento del resultado que va a ocurrir reporta a cierto indivudo.

Entrando ahora en el tema particular del presente artículo, consideremos una experiencia cuyos resultados posibles, x, conforman un conjunto A y están caracterizados por una medida de probabilidad absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue y que, en consecuencia, puede describirse por medio de una función de densidad $f(x)$.

Supongamos que, para cierto individuo (decisor), los diversos resultados de la experiencia considerada representan distintos intereses que es capaz de evaluar subjetivamente de forma numérica a través de una función $u(x)$, que establece una valoración comparativa y que denominaremos *función de utilidad.* (Conviene señalar que la denominación «función de utilidad» es apropiada para designar a $u(x)$ desde un punto de vista intuitivo, pero no fuerza a que sea una función de utilidad en el sentido clásico; $u(x)$ es una función subjetiva carente, en principio y para un estudio general, de restricciones.)

Si antes de la realización de la experiencia existe duda o incertidumbre acerca del resultado de dicha realización y existen diferencias, entre los valores subjetivos asociados a los distintos resultados, tales que la función $u(x)$ no sea casi seguro constante en A, puede considerarse que dicha experiencia «reporta inquietud».

En otras palabras, la inquietud surge como consecuencia de dos factores: incertidumbre y diversidad de intereses; es entonces natural admitir que ambos deban intervenir en la construcción de las medidas del concepto de inquietud.

En relación con el primer factor, subrayaremos su intervención en una de las propiedades posteriormente analizadas.

Para que la diversidad de intereses quede puesta de manifiesto en una medida de inquietud, un camino inmediato a seguir es emplear en la construcción de tal medida una operación elemental que permita comparar los distintos valores de la función de utilidad. Esa operación elemental puede ser el *cociente* o la *sustracción*. A continuación vamos a exponer una medida para cada una de esas operaciones.

El problema general por resolver es el siguiente:

Sea A el conjunto de resultados, x, de una experiencia, los cuales llevan asociada una función de densidad $f(x)$ y una función de utilidad $u(x)$ tal que $E(u) = \int_A u(x) f(x)\, dx$ existe.

* Si $u(x) > 0$, $\forall x \in A$, proponemos como medida para la inquietud que la experiencia considerada reporta al individuo, el valor, si existe, dado por:

$$HU^*(f; u) = \int_A \lg \left\{ \int_A \frac{u(y)}{u(x)} f(y)\, dy \right\} f(x)\, dx$$

que fácilmente puede comprobarse es equivalente a:

$$HU^*(f; u) \leqslant - \int_A f(x) \lg \frac{u(x)}{E(u)}\, dx = \lg E(u) - \int_A f(x) \lg u(x)\, dx \qquad [1]$$

* Si $u(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in A$, proponemos como medida para la inquietud que la experiencia considerada reporta al individuo, el valor, si existe, dado por:

$$HU^*(f; u) = \int_A \left\{ \int_A [u(x) - u(y)] f(y)\, dy \right\}^2 f(x)\, dx$$

que equivale a:

$$HU^*(f; u) = \int_A [u(x) - E(u)]^2 f(x)\, dx = \int_A [u(x)]^2 f(x)\, dx - [E(u)]^2 \qquad [2]$$

Las primeras expresiones de las medidas [1] y [2] evidencian la incorporación del cociente y sustracción, respectivamente, entre los valores asignados por $u(x)$ a los resultados de la experiencia, a fin de comparar éstos.

La intervención del cociente en [1] determina que dicha medida sea *invariante por homotecias* y que, por tanto, la situación para la cual es más eficiente su empleo es aquella en la que el individuo que define la función de utilidad lo hace fijando su atención en el *cociente* entre los distintos valores asignados a los diferentes resultados (lo que permite suponer $u(x) > 0$).

La intervención de la sustracción en [2] determina que dicha medida sea *invariante por traslaciones* y que, por tanto, la situación para la cual es más eficiente su empleo es aquella en la que el individuo que define la función de utilidad lo hace fijando su atención en la *diferencia* entre los distintos valores asignados a los diferentes resultados.

No obstante, ambas medidas pueden aplicarse a otras situaciones, aunque las conclusiones obtenidas sean más acordes con la realidad en cada una de las que acabamos de mencionar. Por otro lado, éstas son las situaciones que, aun de una forma inconsciente por parte del individuo, más suelen presentarse.

En la siguiente sección, vamos a analizar algunas de las propiedades significativas de [1] y [2] que justifican su consideración como *medidas de inquietud.*

2. PROPIEDADES

Las propiedades que conforman la presente sección se enuncian en forma única, pero sus demostraciones incluyen dos etapas, una relativa a cada medida. Por otra parte, todas ellas son generalizaciones de propiedades satisfechas por las medidas correspondientes, en el caso discreto.

2.1. La inquietud que una experiencia reporta a cierto individuo, es una función no negativa que únicamente se anula cuando la función de utilidad definida sobre el conjunto de los resultados de una experiencia es casi seguro constante.

En efecto:

a) $$HU^*(f;u) = -\int_A f(x) \lg \frac{u(x)}{E(u)}\, dx = \lg E(u) - \int_A f(x) \lg u(x)\, dx$$

y, en virtud de la desigualdad de Jensen y de la concavidad (concavidad hacia arriba) de la función $f(t) = -\lg t$, la diferencia última es no negativa, anulándose si y sólo si $u(x) = u$, para casi todo x en A.

b) $$HU^*(f;u) = \int_A f(x)[u(x) - E(u)]^2\, dx \geqslant 0$$

con igualdad si y sólo si $u(x) \overset{\text{c.s.}}{=} E(u)$, es decir, si y sólo si $u(x)$ es casi seguro constante en A.

(Recuérdese que esta propiedad de no negatividad en el caso continuo no era satisfecha por la entropía de Shannon y ésta era una de las propiedades fundamentales del caso discreto no generalizable al caso continuo —ver, p. ej., [5]—. Sin embargo, para las medidas de inquietud propuestas dicha propiedad se mantiene.)

2.2. Consideremos que el conjunto A de resultados de una experiencia lleva asociada una función de densidad $f(x)$ y una función de utilidad $u(x)$. Si sobre A se define una nueva función de utilidad $u'(x)$, relacionada con la primera según la expresión:

$$u'(x) = \int_A u(y) f(y/x)\, dy \quad , \quad \forall\, x \in A$$

(siendo $f(y/x)$ la función de densidad condicionada, definida a partir de una función de densidad sobre $A \times A$, $f(x, y)$, y de $f(x)$), entonces:

$$E(u') = \int_A f(x)\, u'(x)\, dx = \int_A f(x) u(x)\, dx = E(u)$$

y

$$HU^*(f; u') \leqslant HU^*(f; u)$$

En efecto:

$$E(u') = \int_A f(x) u'(x)\, dx = \int_A f(x) \left[\int_A f(y/x) u(y)\, dy \right] dx =$$

$$= \int_A \int_A u(y) f(x, y)\, dy\, dx = \int_A u(y) f(y)\, dy = E(u)$$

a) $HU^*(f; u') = \lg E(u') - \int_A f(x) \lg u'(x)\, dx =$

$$= \lg E(u) - \int_A f(x) \lg \left[\int_A f(y/x) u(y)\, dy \right] dx$$

y, en virtud de la desigualdad de Jensen, al ser $f(t) = -\lg t$ una función cóncava:

$$HU^*(f; u') \leqslant \lg E(u) - \int_A f(x) \left[\int_A f(y/x) \lg u(y)\, dy \right] dx =$$

$$= \lg E(u) - \int_A \int_A [\lg u(y)] f(x, y)\, dy\, dx = \lg E(u) -$$

$$- \int_A f(y) \lg u(y)\, dy = HU^*(f; u)$$

b) $HU^*(f; u') = \int_A [u'(x)]^2 f(x)\, dx - [E(u')]^2 =$

$$= \int_A f(x) \left[\int_A u(y) f(y/x)\, dy \right]^2 dx - [E(u)]^2$$

y, en virtud de la desigualdad de Jensen, al ser $f(t) = t^2$ una función cóncava:

$$HU^*(f; u') \leqslant \int_A f(x) \left[\int_A f(y/x)\{u(y)\}^2 \, dy \right] dx - [E(u)]^2 =$$

$$= \int_A [u(y)]^2 f(y) \, dy - [E(u)]^2 = HU^*(f; u)$$

(Obsérvese que esta propiedad indica que una «aproximación media» entre las utilidades de los distintos resultados, en la forma descrita en las hipótesis, conlleva una disminución en la inquietud.)

2.3. La medida de inquietud en el caso continuo es una función convexa con respecto a la función de densidad. Así, si $f_1(x), f_2(x), ..., f_r(x)$ son funciones de densidad sobre el conjunto A de resultados de una experiencia y $f_0(x)$ es otra función de densidad sobre A, dada por

$$f_0(x) \overset{\text{c.s.}}{=} \sum_{i=1}^{r} a_i f_i(x), \quad \text{con } a_i > 0, \; i = 1, 2, ..., r \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{r} a_i = 1$$

entonces si $u(x)$ es una función de utilidad para la que existen

$$E_i(u) = \int_A u(x) f_i(x) \, dx \quad \text{y} \quad HU^*(f_i; u) \quad \text{para } i = 1, 2, ..., r$$

se verifica que existen

$$E_0(u) = \int_A u(x) f_0(x) \, dx \quad \text{y} \quad HU^*(f_0; u)$$

cumpliéndose, además, que

$$HU^*(f_0; u) \geqslant \sum_{i=1}^{r} a_i HU^*(f_i; u)$$

En efecto:

$$E_0(u) = \int_A u(x) f_0(x) \, dx = \int_A u(x) \sum_{i=1}^{r} a_i f_i(x) \, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} a_i \int_A u(x) f_i(x) \, dx = \sum_{i=1}^{r} a_i E_i(u)$$

que por ser suma finita de integrales finitas, es también finita.

a) $$HU^*(f_0; u) = \lg E_0(u) - \int_A f_0(x) \lg u(x)\, dx =$$

$$= \lg E_0(u) + \sum_{i=1}^{r} a_i HU^*(f_i; u) - \sum_{i=1}^{r} a_i \lg E_i(u)$$

que también resulta ser una suma finita de integrales finitas.

En virtud de la concavidad de $f(t) = -\lg t$, se deduce que:

$$HU^*(f_0; u) \geqslant \sum_{i=1}^{r} a_i HU^*(f_i; u)$$

b) $$HU^*(f_0; u) = \int_A [u(x)]^2 f_0(x)\, dx - [E_0(u)]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} a_i [E_i(u)]^2 + \sum_{i=1}^{r} a_i HU^*(f_i; u) - [E_0(u)]^2$$

que es suma finita de integrales finitas.

En virtud de la concavidad de $f(t) = t^2$, se deduce que:

$$HU^*(f_0; u) \geqslant \sum_{i=1}^{r} a_i HU^*(f_i; u)$$

(La desigualdad podría generalizarse sin dificultad a un conjunto continuo de funciones de densidad.)

2.4. La medida de inquietud en el caso continuo es una función cóncava con respecto a la función de utilidad «relativa» (entendiendo por función de utilidad relativa, el cociente $u(x)/E(u)$ para la medida [1] y la sustracción $u(x) - E(u)$ para la medida [2]). En otras palabras, si $f(x)$ es una función de densidad sobre el conjunto A de resultados de una experiencia y $u_1(x), u_2(x), ..., u_r(x)$ son funciones de utilidad asociadas a dicho conjunto y tales que

$$\int_A u_i(x) f(x)\, dx = 1$$

para [1] (o $\int_A u_i(x) f(x)\, dx = 0$ para [2]) y existe $HU^*(f; u_i)$ para $i = 1, 2, ..., r$, entonces la función de utilidad definida por

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i u_i(x) \quad \text{con} \quad a_i > 0,\ i = 1, 2, ..., r \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{r} a_i = 1$$

cumple que existe

$$\int_A u_0(x) f(x)\, dx = 1$$

para [1] (o $\int_A u_0(x) f(x)\,dx = 0$ para [2]) y existe $HU^*(f; u_0)$, satisfaciéndose que:

$$HU^*(f; u_0) \leqslant \sum_{i=1}^{r} a_i HU^*(f; u_i)$$

En efecto:

$$E(u_0) = \int_A u_0(x) f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{r} a_i \int_A u_i(x) f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{r} a_i \quad (\text{ó} \quad 0) = 1 \quad (\text{ó } 0)$$

(con arreglo a cada restricción considerada).

a) $HU^*(f; u_0) = -\int_A f(x) \lg u_0(x)\,dx$, en las condiciones supuestas.

En virtud de la desigualdad de Jensen:

$$HU^*(f; u_0) \leqslant -\int_A f(x) \sum_{i=1}^{r} a_i \lg u_i(x)\,dx =$$

$$= -\sum_{i=1}^{r} a_i \int_A f(x) \lg u_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{r} a_i HU^*(f; u_i)$$

b) $HU^*(f; u_0) = \int_A [u_0(x)]^2 f(x)\,dx$, en las condiciones supuestas.

En virtud de la desigualdad de Jensen:

$$HU^*(f; u_0) \leqslant \int_A f(x) \sum_{i=1}^{r} a_i [u_i(x)]^2\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} a_i \int_A [u_i(x)]^2 f(x)\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} a_i HU^*(f; u_i)$$

(La desigualdad anterior podría generalizarse sin dificultad a un conjunto continuo de funciones de utilidad relativas.)

3. OBSERVACIONES FINALES

Aunque las medidas de inquietud tienen relevancia propia, su interés fundamental estriba en la posibilidad de definir a partir de ellas *medidas de quietud*, entendiendo por «quietud» la variación en la inquietud. Con este propósito deberían generalizarse al caso continuo los estudios realizados en [2].

Entre las aplicaciones inmediatas de tales medidas de quietud encontramos algunos criterios de comparación de experimentos, como los ya establecidos en [3] y [4] y otros posibles que pueden ser construidos.

BIBLIOGRAFIA

[1] ASH, R. B.: «Information theory», *Interscience*, J. Wiley, 1965.

[2] GIL, M. A.: «Estudio de una medida para la incertidumbre correspondiente a las utilidades», *Rev. Trabajos de Estadística y de I.O.*, 1981.

[3] GIL, M. A.: «Criterio de maximización de la quietud esperada (invariante frente a traslaciones respecto a las utilidades)», *Stochastica*, vol. IV, n.º 3, 1980.

[4] GIL, M. A.: «Criterio mixto de utilidad y quietud esperada (invariante frente a traslaciones respecto a las utilidades)», *Rev. de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza.* 36, 1981.

[5] GIL, P. A.: *Teoría matemática de la información*, Ediciones ICE, 1981.

[6] YAGLOM, A. M., y YAGLOM, I. M.: *Probabilité et information*, Dunod, 1969.