Convergencia en casi todo punto de series de Fourier de funciones con valores en espacios de Banach. Generalizaciones

Por FRANCISCO DOMINGO y BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

Recibido: 1 diciembre 1982

Abstract

In this work we are going to prove the conjecture that was given in the appendix from F. Domingo [2]. Such conjecture says as follows:

"Given $p, q > 1$ with $p > \frac{q}{2}$ and denoting by E the Banach space $E = L^p(\mu)$, for every $f \in L_p(E)$, the Fourier series of f converges almost everywhere to the essentially separable part of f".

Also is completed the prove given in B. Rodríguez-Salinas [4], when ν it is not finite.

En este trabajo vamos a demostrar la conjetura que se hacía en el apéndice de F. Domingo [2]. Dicha conjetura dice lo siguiente:

«Dados $p, q > 1$ con $p > \dfrac{q}{2}$ y designando por E el espacio de Banach $E = L^p(\mu)$, para toda $f \in L_p(E)$, la serie de Fourier de f converge en casi todo punto a la parte esencialmente separable de f".

También se completa la demostración dada en B. Rodríguez-Salinas [4], cuando ν no es finita.

1. **Definición.** Una función $f\colon X \to F$ se dice *$\sigma(F, G)$-medible* si, para cada $z \in G$, la función $\langle f(x), z\rangle$ es medible.

2. **Definición.** Una función $f\colon X \to F$ se dice *esencialmente separable* si existe un subconjunto X_s de X, de medida nula, tal que $f(X \backslash X_s)$ es separable.

3. **Definición.** Una función $f\colon \to F$ se dice de *clase $\sigma(F, G)$-nula* si, para cada $z \in G$, existe un subconjunto X_z de X, de medida nula, tal que $\langle f(x), z\rangle = 0$ para todo $x \in X\backslash X_z$.

4. **Lema.** *Para cada número real $p \geqslant 1$, el conjunto $\mathscr{L}^*_p(F)$ de las funciones $f\colon X \to F$ tales que*

$$\int_X^* |f(x)|^p \, d\mu < \infty$$

es un espacio vectorial seminormado y completo y el espacio cociente $L^*_p(F)$, de $\mathscr{L}^*_p(F)$ respecto de la relación de equivalencia

$$f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) \quad \text{c.t.p.},$$

es un espacio de Banach.

Demostración. Véase [3], VI.I, teorema 1, pág. 68.

5. **Definición.** Si $S(F)$ es el espacio vectorial de las funciones de la forma $\sum_{k=1}^{n} y_k \chi_{A_k}$, donde $y_k \in F$ y los A_k son subconjuntos medibles disjuntos de X tales que $\mu(A_k) < \infty$ para $k = 1, 2, \ldots, n$, designaremos por $\mathscr{L}^p(F)$ a la clausura de $S(F)$ en $\mathscr{L}_p^*(F)$ y por $L^p(F)$ al espacio cociente de $\mathscr{L}^p(F)$ respecto de la relación de equivalencia del lema anterior, es decir, la clausura de $S(F)$ en $L_p^*(F)$.

Por abuso de lenguaje, llamaremos también funciones de X en F a las clases de equivalencia de $L_p^*(F)$ y de $L^p(F)$.

6. **Definición.** Denotaremos por $L_p(F, G)$ el espacio de las funciones de $L_p^*(F)$, $\sigma(F, G)$-medibles y por $L_{p,s}(F, G)$ y $L_{p,0}(F, G)$ los espacios de las funciones de $L_p(F, G)$ esencialmente separables y de clase $\sigma(F, G)$-nula, respectivamente.

7. **Lema.** *Si X es de medida σ-finita y E es reflexivo, para todo número real $p > 1$, se tiene*

$$L_{p,s}(E, E') = L^p(E) \tag{7.1}$$

y

$$L_p(E, E') = L_{p,s}(E, E') \oplus L_{p,0}(E, E') \tag{7.2}$$

Demostración. Véase [2], teorema 1.21, pág. 24.

En adelante consideraremos un espacio de Banach reflexivo E, tomaremos $X = [-\pi, \pi]$ con la medida de Lebesgue y, por comodidad de notación, escribi- $L_p(E), L_{p,s}(E)$ y $L_{p,0}(E)$ en lugar de $L_p(E, E')$, $L_{p,s}(E, E')$ y $L_{p,0}(E, E')$, respectivamente. Entonces, si $S_n f(x)$ es la suma parcial n-ésima de la serie de Fourier de f, ponemos

$$Mf(x) = \sup_{n \geqslant 0} |S_n f(x)|$$

8. **Lema.** *Sean $1 < p < \infty$, $f \in L_p(E)$ y $f = f_s + f_0$, la descomposición (7.2), con $f_s \in L_{p,s}(E)$ y $f_0 \in L_{p,0}(E)$. Entonces, si para todo $g \in L_{p,s}(E)$ se verifica*

$$\|Mg\|_p \leqslant C_p \|g\|_p$$

donde C_p es una constante positiva independiente de g, la serie de Fourier de f converge a $f_s(x)$ en casi todo x de $[-\pi, \pi]$.

Demostración. Véase [2], teorema 3.5, pág. 66.

Consideremos ahora un espacio de medida σ-finita (Ω, μ) y tomemos un número real $p > 1$ y $E = L^p(\mu)$, donde, como es habitual, $L^p(\mu)$ designa el espacio de las funciones complejas μ-medibles, definidas sobre Ω y de potencia p integrable.

Entonces, si $f \in L_{p,s}(E)$, para todo $x \in [-\pi, \pi]$, se tiene que $f(x) \in E = L^p(\mu)$ y, por tanto, podemos considerar a f como una función $f\colon [-\pi, \pi] \times \Omega \to \mathbf{C}$, definida por $f(x, \omega) = f(x)(\omega)$. Ahora bien, como f es $\sigma(E, E')$-medible y esencialmente separable, en virtud del teorema de Pettis [1], f es fuertemente medible, luego, según [1], página 318, puede tomarse un representante de $f(x)$ tal que $f(x, \omega)$ es medible en (x, ω).

[1] Véase 5. V.4, pág. 131.

Además, para cada $x \in [-\pi, \pi]$ tenemos una función $f(x, \cdot)\colon \Omega \to \mathbf{C}$ perteneciente a $E = L^p(\mu)$ y, para cada $\omega \in \Omega$, la función $f(\cdot, \omega)\colon [-\pi, \pi] \to \mathbf{C}$ pertenece a $L^p(\mathbf{C})$. En estas condiciones se cumple el siguiente teorema.

9. **Teorema.** *Sean* $1 < p < \infty, E = L^p(\mu)$ *y* $f \in L_{p,s}(E)$. *Entonces, se verifica*

$$\|Mf\|_p \leqslant C_p \|f\|_p$$

donde C_p *es una constante positiva independiente de* f.

Demostración. Sea x un punto arbitrario, pero fijo, de $[-\pi, \pi]$. Entonces, para cada $n \in \mathbf{N}$, se tiene

$$S_n\big(f(\cdot, \omega)\big)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\,-\,t, \omega)\, D_n(t)\, dt$$

y, por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} |S_n\big(f(\cdot, \omega)\big)(x)|^p &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x - t, \omega)|^p |D_n(t)|^p\, dt \leqslant \\ &\leqslant \frac{(2n+1)^p}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t, \omega)|^p\, dt \end{aligned}$$

y, por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |S_n\big(f(\cdot, \omega)\big)(x)|^p\, d\mu(\omega) &\leqslant \frac{(2n+1)^p}{2\pi} \int_\Omega \int_{-\pi}^{\pi} |f(t, \omega)|^p\, dt\, d\mu(\omega) = \\ &= \frac{(2n+1)^p}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_\Omega |f(t)(\omega)|^p\, d\mu(\omega)\, dt = \\ &= \frac{(2n+1)^p}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\, dt = \frac{(2n+1)^p}{2\pi} \|f\|_p^p < \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, la función de Ω en $\mathbf{C}$, que a ω le hace corresponder $S_n\big(f(\cdot, \omega)\big)(x)$, pertenece a E.

Además, si x es fijo y $\varphi \in E'$, se tiene

$$\langle S_n f(x), \varphi\rangle = S_n \langle f, \varphi\rangle(x), \tag{9.1}$$

pues

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)\, D_n(t)\, dt \in E$$

y

$$\langle S_n f(x), \varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \langle f(x-t), \varphi\rangle D_n(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \langle f, \varphi\rangle(x-t) D_n(t)\,dt = S_n\langle f, \varphi\rangle(x).$$

Por otra parte, si x es fijo, se verifica

$$(S_n f(x))(\omega) = S_n(f(\cdot,\omega))(x) \tag{9.2}$$

para casi todo ω de Ω.

En efecto, ambos miembros pertenecen a E como funciones de ω. Veamos que coinciden al aplicar $\varphi \in E'$.

En virtud de (9.1) se tiene

$$\int_\Omega (S_n f(x))(\omega)\overline{\varphi(\omega)}\,d\mu(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \langle f, \varphi\rangle(x-t) D_n(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_\Omega f(x-t,\omega)\overline{\varphi(\omega)} D_n(t)\,d\mu(\omega)\,dt$$

y podemos aplicar el teorema de Fubini porque

$$f(x-t,\omega)\overline{\varphi(\omega)}D_n(t)$$

es medible en (t,ω) y

$$\int_{-\pi}^{\pi} dt \int_\Omega |f(x-t,\omega)\overline{\varphi(\omega)}D_n(t)|\,d\mu(\omega) \leqslant \|\varphi\|_{p'}\int_{-\pi}^{\pi} \|f(x-t,\cdot)\|_p |D_n(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_{p'}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|^{p'}\,dt\right)^{1/p'}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \|f(x-t,\cdot)\|_p^p\,dt\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_{p'}(2n+1)(2\pi)^{1/p'}\|f\|_{L_p(L^p(\mu))} < \infty.$$

Por tanto,

$$\int_\Omega (S_n f(x))(\omega)\overline{\varphi(\omega)}\,d\mu(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_\Omega f(x-t,\omega)\overline{\varphi(\omega)}D_n(t)\,d\mu(\omega)\,dt =$$

$$= \int_\Omega \overline{\varphi(\omega)}\,d\mu(\omega)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t,\omega)D_n(t)\,dt =$$

$$= \int_\Omega S_n(f(\cdot,\omega))(x)\overline{\varphi(\omega)}\,d\mu$$

es decir,

$$(S_n f(x))(\omega) = S_n(f(\cdot, \omega))(x)$$

para casi todo $\omega \in \Omega$.

Finalmente, teniendo en cuenta (9.2), se deduce

$$|S_n f(x)|^p = \int_\Omega |S_n(f(\cdot, \omega))(x)|^p \, d\mu(\omega) \leqslant \int_\Omega [M(f(\cdot, \omega))(x)]^p \, d\mu(\omega)$$

para todo $n \geqslant 0$ y, por consiguiente,

$$[Mf(x)]^p = \sup_{n \geqslant 0} |S_n f(x)|^p \leqslant \int_\Omega [M(f(\cdot, \omega))(x)]^p \, d\mu(\omega)$$

luego

$$\|Mf\|_p^p = \int_{-\pi}^{\pi} [Mf(x)]^p \, dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \int_\Omega [M(f(\cdot, \omega))(x)]^p \, d\mu(\omega) \, dx$$

y como

$$S_n(f(\cdot, \omega))(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t, \omega) D_n(t) \, dt$$

es medible en (x, ω), porque el integrando es medible en x, t y ω, resulta que

$$M(f(\cdot, \omega))(x) = \sup_{n \geqslant 0} |S_n(f(\cdot, \omega))(x)|$$

es medible en (x, ω) y, por tanto,

$$\|Mf\|_p^p \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \int_\Omega [M(f(\cdot, \omega))(x)]^p \, d\mu(\omega) \, dx =$$

$$= \int_\Omega \int_{-\pi}^{\pi} [M(f(\cdot, \omega))(x)]^p \, dx \, d\mu(\omega).$$

Ahora bien, según la desigualdad de Carleson-Hunt, se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} [M(f(\cdot, \omega))(x)]^p \, dx = \|M(f(\cdot, \omega))\|_p^p \leqslant C_p^p \|f(\cdot, \omega)\|_p^p =$$

$$= C_p^p \int_{-\pi}^{\pi} |f(x, \omega)|^p \, dx$$

y, en consecuencia,

$$\|Mf\|_p^p \leqslant \int_\Omega \int_{-\pi}^{\pi} [M(f(\cdot,\omega))(x)]^p \, dx \, d\mu(\omega) \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Omega C_p^p \int_{-\pi}^{\pi} |f(x,\omega)|^p \, dx \, d\mu(\omega) =$$

$$= C_p^p \int_{-\pi}^{\pi} \int_\Omega |f(x)(\omega)|^p \, d\mu(\omega) \, dx = C_p^p \|f\|_p^p,$$

es decir,

$$\|Mf\|_p \leqslant C_p \|f\|_p.$$

10. **Corolario.** *Sean* $1 < p < \infty$, $E = L^p(\mu)$ *y* $f \in L_p(E)$. *Entonces, si*

$$f = f_s + f_0$$

es la descomposición (7.2) *con* $f_s \in L_{p,s}(E)$ *y* $f_0 \in L_{p,0}(E)$, *la serie de Fourier de* f *converge a* $f_s(x)$ *en casi todo* x *de* $[-\pi, \pi]$.

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema 9 y y del lema 8.

11. **Teorema.** *Sean* $1 < q < p < \infty$, $E = L^q(\mu)$ *y* $f \in L^p(E)$. *Entonces, si*

$$f = f_s + f_0$$

es la descomposición (7.2) *con* $f_s \in L_{p,s}(E)$ *y* $f_0 \in L_{p,0}(E)$, *la serie de Fourier de* f *converge a* $f_s(x)$ *en casi todo* x *de* $[-\pi, \pi]$.

Demostración. Sean $p_1 = p/q > 1$ y $p_1' = p_1/(p_1 - 1) = p/(p-q)$.
Por la desigualdad de Hölder se tiene

$$\int_{-\pi}^{*\pi} |f(x)|^q \, dx \leqslant \left(\int_{-\pi}^{*\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{p/q} (2\pi)^{\frac{p-q}{p}} < \infty$$

y, por tanto, $f \in L_q(E)$. Entonces, $f_s \in L_{q,s}(E)$ y, en virtud del corolario anterior, la serie de Fourier de f converge a $f_s(x)$ en casi todo x de $[-\pi, \pi]$.

12. **Definición.** Sean $1 < p < \infty$, E un espacio de Banach reflexivo y $f \in L_p(E)$. Entonces, dada una función medible cualquiera v: $[-\pi, \pi] \to \mathbf{N}$, ponemos

$$S_v f(x) = S_{v(x)} f(x) = \sum_{k=-v(x)}^{v(x)} c_k e^{ikx},$$

donde los c_k son los coeficientes de la serie de Fourier de f.

Como es sabido,

$$S_\nu f(x) = \sum_{k=-\nu(x)}^{\nu(x)} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_{\nu(x)}(t)\,dt,$$

siendo $D_{\nu(x)}(t)$ el $\nu(x)$-ésimo núcleo de Dirichlet.

13. **Lema.** *Sean $1 < p < \infty$, E un espacio de Hilbert y $f \in L_p(E)$. Entonces, para toda función medible $\nu\colon [-\pi, \pi] \to \mathbf{N}$, se verifica*

$$\|S_\nu f\|_p \leqslant C_p \|f\|_p$$

donde C_p es una constante positiva independiente de f y de ν.

Demostración. Véase [2], teorema 4.3, pág. 95.

14. **Teorema.** *Sean $1 < p < \infty$, $E = L^p(\mu)$ y $f \in L_{p,s}(E)$. Entonces, para toda función medible $\nu\colon [-\pi, \pi] \to \mathbf{N}$, se verifica*

$$\|S_\nu f\|_p \leqslant C_p \|f\|_p,$$

donde C_p es una constante positiva independiente de f y de ν.

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema 9.

Por ser (Ω, μ) de medida σ-finita, $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega'_k$ con $\mu(\Omega'_k) < \infty$ para todo $k \in \mathbf{N}$. Por tanto, si para cada $n \in \mathbf{N}$ ponemos $\Omega_n = \bigcup_{k=1}^{n} \Omega'_k$, se tiene

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n \quad \text{con} \quad \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega_n \subset \cdots \quad \text{y} \quad \mu(\Omega_n) < \infty \text{ para todo } n \in \mathbf{N}.$$

15. **Definición.** Designaremos por $\mathscr{H}([-\pi, \pi] \times \Omega)$ a la clase de las funciones $f\colon [-\pi, \pi] \times \Omega \to \mathbf{C}$ de la forma

$$f = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{A_i \times B_i}$$

donde $c_i \in \mathbf{C}$, los A_i son subconjuntos medibles disjuntos de $[-\pi, \pi]$ y los B_i son subconjuntos medibles de Ω contenidos en algún Ω_n.

16. **Teorema.** *Sean $1 < p, q < \infty$ tales que*

$$\frac{p}{p+1} < \frac{q}{2} < p$$

y $f \in \mathscr{H}([-\pi, \pi] \times \Omega)$. Entonces, para toda función medible $\nu[-\pi, \pi] \to \mathbf{N}$, se verifica

$$\|S_\nu f\|_{L_p(L^q(\mu))} \leqslant C_{p,q} \|f\|_{L_p(L^q(\mu))}, \tag{16.1}$$

donde $C_{p,'q}$ es una constante positiva independiente de f y de ν.

Demostración. Si $1 < r$, $s < \infty$ y designamos con $\|\cdot\|_{r,s}$ la norma mixta del espacio de Benedek-Panzone $L^{r,s}([-\pi, \pi) \times \Omega)$ [1], para $f \in \mathscr{H}([-\pi, \pi] \times \Omega)$, se tiene

$$\|f\|_{r,s} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\Omega} |f(x, \omega)|^r \, d\mu(\omega) \right)^{s/r} dx \right)^{1/s} =$$

$$= \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\Omega} |f(x)(\omega) \right)^{s/r} \right)^{1/s} =$$

$$= \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)^s \, dx \right)^{1/s} = \|f\|_{L_s(L^r(u))} \tag{16.2}$$

Además, si v: $[-\pi, \pi] \to \mathbf{N}$ es medible, según el lema 13 y el teorema 14, para $f \in \mathscr{H}([-\pi, \pi] \times \Omega)$ se verifican

$$\|S_v f\|_{2,r} \leqslant C_r \|f\|_{2,r}$$

y

$$\|S_v f\|_{s,s} \leqslant C_s \|f\|_{s,s}$$

donde C_r y C_s son dos constantes positivas independientes de f y de v. Entonces, en virtud de [1], 7, teorema 2, pág. 316, y de (16.2), resulta que (16.1) vale para todo par (p, q) de números reales tales que

$$\frac{1}{q} = \frac{1-t}{2} + \frac{t}{s} \quad , \quad \frac{1}{p} = \frac{1-t}{r} + \frac{t}{s}$$

con $0 \leqslant t \leqslant 1$, $1 < r < \infty$ y $1 < s < \infty$, es decir, para todo par (p, q) de números reales tales que

$$\frac{p}{p+1} < \frac{q}{2} < p.$$

17. **Lema.** *$\mathscr{H}([-\pi, \pi] \times \Omega)$ es denso en $L_{p,s}(L^q(\mu))$ para todo par de números reales p y q mayores que* 1.

Demostración. Basta probar que las funciones de la forma $f(x, \omega) = y(\omega)\chi_A(x)$, con $y \in L^q(\mu)$ y A subconjunto medible de $[-\pi, \pi]$, pertenecen a la clausura de $\mathscr{H}([-\pi, \pi] \times \Omega)$ en $L_p(L^q(\mu))$, pues dichas funciones engendran el espacio $S(L^q(\mu))$, que es denso en $L_{p,s}(L^q(\mu))$ según (7.1).

Como, por el teorema de la convergencia dominada,

$$\lim_n \|y\chi_{\Omega_n} - y|_{L^q(\mu)} = 0,$$

dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $n \in \mathbf{N}$ y z función simple en Ω, con $\{z \neq 0\} \subset \Omega_n$ tales que

$$\|y\chi_{\Omega_n} - y\|_{L^q(\mu)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$\|z - y\chi_{\Omega_n}\|_{L^q(\mu)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, la función $g(x, \omega) = z(\omega)\chi_A(x)$ pertenece a

$$\mathscr{H}([-\pi, \pi] \times \Omega)$$

y se tiene

$$\|g - f\|_{L_p(L^q(\mu))} = \|z - y\|_{L^q(p)} p(A)^{1/p} < \varepsilon\mu(A)^{1/p}.$$

18. **Teorema.** *Sean* $1 < p,\ q < \infty$ *tales que*

$$\frac{p}{p+1} < \frac{q}{2} < p,$$

$E = L^q(\mu)$ *y* $f \in L_p(E)$. *Entonces, si*

$$f = f_s + f_0$$

es la descomposición (7.2) *con* $f_s \in L_{p,s}(E)$ *y* $f_0 \in L_{p,0}(E)$, *la serie de Fourier de* f *converge a* $f_s(x)$ *en casi todo* $x \in [-\pi, \pi]$.

Demostración. Consideremos funciones medibles acotadas $v\colon [-\pi, \pi] \to \mathbf{N}$ de la forma $v = 1 \cdot \chi_{A_1} + 2 \cdot \chi_{A_2} + \cdots + n \cdot \chi_{A_n}$, donde los A_i son subconjuntos medibles disjuntos de $[-\pi, \pi]$. Es obvio que, para tales funciones v, S_v es un operador continuo de $L_p(E)$ en $L_p(E)$, cualquiera que sea el espacio de Banach reflexivo E. Entonces, del teorema 16 y del lema 17 se deduce que si v es una de estas funciones simples, se verifica

$$\|S_v g\|_p \leqslant C_{p,q}\|g\|_p \tag{18.1}$$

para cada $g \in L_{p,s}(E)$.

Consideremos ahora los maximales truncados

$$M_n g(x) = \sup_{k \leqslant n} |S_k g(x)| \quad (n \in \mathbf{N})$$

Fijados $g \in L_{p,s}(E)$ y $n \in \mathbf{N}$, sea

$$v(x) = \min \{k \in \mathbf{N}\colon |S_k g(x)| = M_n g(x)\}.$$

Entonces,

$$M_n g(x) = |S_{\nu(x)} g(x)| = |S_\nu g(x)|$$

y, teniendo en cuenta (18.1), se deduce que

$$\|M_n g\|_p \leqslant C_{p,q} \|g\|_p$$

con $C_{p,q}$ independiente de g y de n.

Ahora bien, la sucesión creciente $\{M_n f(x)\}$ converge a $Mf(x)$, luego, por el teorema de la convergencia monótona, resulta

$$\|Mg\|_p \leqslant C_{p,q} \|g\|_p$$

para todo $g \in L_{p,s}(E)$ y, en virtud del lema 8, la serie de Fourier de f converge a $f_s(x)$ en casi todo x de $[-\pi, \pi]$.

19. **Corolario.** *Sean p y q dos números reales mayores que 1 y tales que $p > q/2$, $E = L^q(\mu)$ y $f \in L_p(E)$. Entonces, si*

$$f = f_s + f_0$$

es la descomposición (7.2), con $f_s \in L_{p,s}(E)$ y $f_0 \in L_{p,0}(E)$, la serie de Fourier de f converge a $f_s(x)$ en casi todo x de $[-\pi, \pi]$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de los teoremas 11 y 18.

GENERALIZACIONES

El teorema 18 es un caso particular del teorema 8 de B. Rodríguez-Salinas [4]. Sin embargo, las demostraciones de los teoremas 4 y 8 de [4] no son del todo correctas.

Para demostrar correctamente el teorema 4, basta proceder como en el teorema 18 con los maximales truncados:

$$\widetilde{M}_n f(x) = \sup_{k \leqslant n} |\widetilde{S}_k f(x)| \, .$$

donde $f \in L^p_E(\mu)$ y $n \in \mathbf{N}$, para obtener

$$\|\widetilde{M}_n f\|_p \leqslant C_p \|f\|_p \quad (f \in L^p_E(\mu) \text{ y } n \in \mathbf{N}) \tag{20.1}$$

y

$$\|\widetilde{M} f\|_p \leqslant C_p \|f\|_p \quad (f \in L^p_E(\mu)) \tag{20.2}$$

Para la demostración del teorema 8, se consideran funciones medibles acotadas ν: $X \to \mathbf{N}$ como las del teorema 18, y como la acotación (20.1) es equivalente a

$$\|\widetilde{S}_\nu f\|_p \leqslant C_p \|f\|_p \tag{20.3}$$

con $f \in L_E^p(\mu)$ y v acotada, por los teoremas 4 y 6 de [4], resulta:

$$\|\tilde{S}_v f\|_{2,r} \leqslant C_r \|f\|_{2,r}$$

y

$$\|\tilde{S}_v f\|_{s,s} \leqslant C_s \|f\|_{s,s}$$

para todo $f \in \mathscr{H}(X \times \Omega)$ y toda v acotada, donde $\mathscr{H}(X \times \Omega)$ es la clase de la definición 15. Entonces, en virtud de [1], 7, teorema 2, pág. 316, se deduce que si $p > \alpha$, $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$ y

$$\frac{p}{p+1} < \frac{q}{2} < \frac{p}{\alpha},$$

se verifica

$$\|\tilde{S}_v f\|_{p,q} \leqslant C_{p,q} \|f\|_{q,p} \tag{20.4}$$

para todo $f \in \mathscr{H}(X \times \Omega)$ y toda v acotada. Ahora bien, como

$$\tilde{S}_v f(x) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{S}_k f(x) \chi_{A_k}(x),$$

resulta que cada $\tilde{S}_v$ es un operador continuo en $L_{L^q}^p$, por ser suma finita de operadores continuos y, por tanto, se puede extender la acotación (20.4) para todo $f \in L_{L^q}^p$, es decir, que se obtiene

$$\|\tilde{S}_v f\|_p \leqslant C_{p,q} \|f\|_p$$

para todo $f \in L_E^p(\mu)$ y toda v acotada y de aquí se deduce

$$\|\tilde{M} f\|_p \leqslant C_{p,q} \|f\|_p$$

para todo $f \in L_E^p(\mu)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BENEDEK, A., y PANZONE, R. (1961): «The spaces L^p with mixed norm», *Duke Math. J.*, *28*, 301-324.

[2] DOMINGO GARCÍA, F. (1977): *Series de Fourier de funciones con valores en espacios de Banach*, tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid.

[3] IONESCU TULCEA, A., y IONESCU TULCEA, C. (1969): *Topics in the Theory of Lifting*, Springer-Verlag.

[4] RODRIGUEZ SALINAS, B. (1979): *Convergencia en casi todo punto de operadores definidos sobre funciones vectoriales, R. Acad. Ci., Madrid, 73*. 157-168.

[5] YOSIDA, K. (1974): *Funtional Analysis*, Springer-Verlag.