Sobre el dual de un espacio localmente convexo con la propiedad de Radon-Nikodym II

POR BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

Recibido: 2 marzo 1983

Abstract

The most important results of this paper can he resumed in the following:

Theorem. *Let E be a l.c.s. and E′ it's strong dual which is assumed to be quasi-complet. Let us suppose also that, for every non void countable bounded subset B_0 of E, the closed subspace F generated by B_0 is infrabarrelled. Then the following are equivalent:*

i) *E′ has the Radon-Nikodym property.*
ii) *Every non void countable bounded subset of E′ is dentable.*
iii) *Every non void bounded subset of E′ is σ-dentable.*
iv) *Every equicontinuous subset $B \neq \phi$ of E′ is such that for every neighborhood U of zero in E′ there exists $x' \in B$ such that $x' \notin \operatorname{co}(B\,(x + U))$.*
v) *For every one of such spaces F holds that every bounded subset of the strong dual F′ is ω-precompact.*

Moreover, if E′ has the Krein-Milman property, then E′ has the Radon-Nikodym property.

Los resultados más importantes de este trabajo se pueden resumir en el siguiente teorema.

Teorema. *Sea E un e.l.c. y E′ su dual fuerte que suponemos casi completo. Supongamos también que para todo conjunto acotado contable y no vacío B_0 de E el subespacio cerrado F engendrado por B_0 es infratonelado. Entonces son equivalentes:*

1. *E′ posee la propiedad de Radon-Nikodym (definición 1).*
2. *Todo subconjunto acotado contable $B \neq \phi$ de E′ es dentable.*
3. *Todo subconjunto acotado $B \neq \phi$ de E′ es σ-dentable.*
4. *Todo subconjunto equicontinuo $B \neq \phi$ de E′ tiene la propiedad que, para todo entorno U de 0 en E′, existe un $x' \in B$ tal que*

$$x' \notin \operatorname{co}(B \backslash (x' + U))$$

5. *Cada uno de dichos espacios F tiene la propiedad de que todo subconjunto acotado del dual fuerte F′ es ω-precompacto (definición 2).*

   Además, si E′ tiene la propiedad de Krein-Milman (definición 18), entonces E′ tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finito que supondremos completo para asegurar que existe un *lifting* ρ sobre el álgebra $\mathscr{L}_\Omega^\infty$ de las funciones reales o complejas medibles acotadas. Sea E un espacio localmente convexo, en abreviatura e.l.c., que supondremos siempre Haussdorff, y E'' el bidual dotado de la topología natural (véase Köthe [4], 300).

Sea $m: \Sigma \to E$ una medida vectorial y

$$A_S(m) = \left\{\frac{m(A)}{\mu(A)} : S \supset A \in \Sigma^+\right\}$$

para $S \in \Sigma^+$, siendo

$$\Sigma^+ = \{A \in \Sigma \colon \mu(A) > 0\}.$$

1. **Definición.** Un e.l.c. E se dice que tiene la *propiedad de Radon-Nikodym*, en abreviatura P.R.N., si para todo espacio de medida finito (Ω, Σ, μ) y toda medida vectorial $m \colon \Sigma \to E$ controlada por μ, en el sentido de que es μ-continua y $A_\Omega(m)$ es acotado, existe una función acotada $f \colon \Omega \to E''$ $\bar{\mu}$-integrable o integrable Grothendieck: $f \colon \in \overline{\mathscr{L}}(\Sigma, \mu, E'')$ (véase [6], [7] y [8]), que verifica

$$m(A) = \int_A f \, d\mu \, (= m_f(A))$$

para todo $A \in \Sigma$. En el caso que dicha función acotada se pueda elegir siempre de modo que $f \in \overline{\mathscr{L}}(\Sigma, \mu, E)$ se dice que E posee la *P.R.N. fuerte.*

Según el teorema 4 [11] si E es un e.l.c. infratonelado y E' su dual fuerte, y si F es un subespacio $\sigma(E', E)$-cerrado de E' que posee la P.R.N., entonces F posee la P.R.N. fuerte.

2. **Definición.** Un subconjunto A de un e.l.c. E se dice *ω-precompacto* (o *separable por seminormas*) si, para todo entorno U de 0 en E, existe un conjunto contable $M \subset E$ tal que $A \subset M + U$.

3. **Teorema.** *Sea E un e.l.c. infratonelado y E' su dual fuerte. Si todo subconjunto acotado D de un subespacio $\sigma(E', \mathrm{E})$-cerrado D de E' es ω-precompacto, entonces F posee la P.R.N. fuerte.*

Demostración. Basta proceder como en el teorema 3 [11] observando que $f(\Omega)$ es ω-precompacto.

4. **Teorema.** *Sea E un e.l.c. y E' su dual fuerte que suponemos casi completo. Supongamos también que, para todo acotado contable y no vacío B_0 de E, el subespacio cerrado F engendrado por B_0 es infratonelado y su dual fuerte F' tiene la propiedad de que todo subconjunto acotado es ω-precompacto. Entonces E' posee la P.R.N.*

Demostración. Basta proceder como en el teorema 6 [11] utilizando el teorema anterior en lugar del teorema 3 [11].

Estos teoremas 3 y 4 son una extensión de los citados teoremas 3 y 6 [11] y su interés radica en los teoremas recíprocos que vamos a probar.

Para demostrar una extensión del teorema de Stegall [12] vamos a seguir el proceso de Diestel y Uhl [2].

En los lemas siguientes supondremos:

1. E es un e.l.c. separable y E' su dual.
2. U es un entorno absolutamente convexo de 0 en E y B es un acotado absolutamente convexo de E tales que U^0 no se puede cubrir por ninguna familia contable de conjuntos $x' + V$ con $x' \in E'$ y $V = B^0$.
3. $\bar{E}$ es el dual de $E'_V = (E')_V$ $(V = B^0)$.
4. π es la aplicación canónica $E' \to E'_V$ $(V = B^0)$.
5. $\bar{U}$ y $\bar{B}$ son, respectivamente, los conjuntos polares de $\pi(U^0)$ y $\pi(B^0)$ en $\bar{E}$.

Es claro que $\bar{B}$ es la $\sigma(E'', E)$-clausura de B en E'' y $\bar{E} = E''_{\bar{B}} = E'^{*}_{\bar{B}}$.

5. **Lema.** *Sea ω_1 el primer ordinal no contable. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existen dos conjuntos $\{x''_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset \bar{E}\,(\subset E'')$ y otro $\{x'_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset E'$ tales que para todo par de ordinales $\alpha, \beta < \omega_1$ se tiene*

$$p_U(x'_\alpha) = 1 \quad \text{y} \quad x''_\alpha \in (1 + \varepsilon)\bar{U}$$

donde

$$p_U(x') = \sup \{|\langle x, x'\rangle| : x \in U\}$$

y

$$x''_\beta(x'_\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha < \beta \\ 1 & \text{si} \quad \alpha = \beta \end{cases}$$

Demostración. Basta proceder como en el lema VII.2.1 [2] para $Z = E'_V$ y $Z^* = \bar{E}$ teniendo en cuenta que $\pi(U^0)$ no es separable, para pasar después a E' y $\bar{E} = E''_B$.

6. **Lema.** *Sea ω_1 el primer ordinal no contable. Entonces, para un cierto entero $h > 0$, existen dos conjuntos $\{x''_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset E''$ y $\{x'_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset E'$ tales que para todo par de ordinales $\alpha, \beta < \omega_1$ se tiene*

$$p_U(x'_\alpha) = 1 \quad y \quad x''_\alpha \in h\bar{B}$$

donde p_U es como antes, y

$$x''_\beta(x'_\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha < \beta \\ 1 & \text{si} \quad \alpha = \beta \end{cases}$$

Demostración. Como $(1 + \varepsilon)\bar{U} = \bigcup_{1}^{\infty} h\bar{B}$ del lema 5 se deduce que existe un entero h y un subconjunto no contable ω^* de $\{\alpha < \omega_1\}$ tales que los conjuntos $\{x''_\alpha : \alpha \in \omega^*\}$ y $\{x'_\alpha : \alpha \in \omega^*\}$, iniciados de manera conveniente, verifican las condiciones del lema.

7. **Lema.** *Si A es un subconjunto no contable de U^0, existen infinitos puntos de A que son puntos de $\sigma(E', E)$-condensación de A.*

Demostración. Por ser E separable la topología $\sigma(E', E)$ sobre U^0 es metrizable. Entonces, como U^0 es $\sigma(E', E)$-compacto, todo subconjunto abierto de U^0 tiene la propiedad de Lindelöf para la topología $\sigma(E', E)$, de donde resulta inmediatamente el lema.

8. **Definición.** Un *sistema pre-Haar de conjuntos* es una sucesión (A_n) de conjuntos no vacíos tales que

$$A_{2n} \cup A_{2n+1} \subset A_n$$

para todo n, $A_{2^k}, \ldots, A_{2^{k+1}-1}$ son disjuntos. Si la sucesión satisface

$$A_{2n} \cup A_{2n+1} = A_n$$

se llama un *sistema de Haar de conjuntos.*

9. **Lema.** *Hay un entero $h > 0$ tal que, para cada $\varepsilon > 0$, existen un sistema pre-Haar (A_n) en $\{x' \in E' : p_U(x') = 1\}$ $(\subset U^0)$ y una sucesión (x_n) en E que verifican*

$$x_n \in hB \quad \textit{para todo } n$$

y

$$|x'(x_n) - \chi_{A_n}(x')| < \varepsilon 2^{-k}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$, todo n con $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$ y todo $x' \in \bigcup \{A_n : 2^k \leqslant n < 2^{k+1}\}$.

Demostración. Basta proceder como en el lema VII.2.4 [2] tomando, de acuerdo con el lema 6, $A = \{x'_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset U^0$ y $\{x''_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset E''$ con $p_U(x'_\alpha) = 1$, $x''_\alpha \in h\bar{B}$ y

$$x''_\beta(x'_\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha < \beta \\ 1 & \text{si} \quad \alpha = \beta \end{cases}$$

y sustituyendo la constante h por $h + 1$ al aplicar el teorema de Helly.

10. **Lema.** *Hay un entero $h > 0$ tal que, para cada $\varepsilon > 0$, existen un subconjunto $\sigma(E', E)$-compacto Ω de $\{x' : p_U(x') = 1\}$ $(\subset U^0)$, un sistema de Haar (C_n) de conjuntos abiertos-cerrados en Ω y una sucessión (x_n) en E que verifican*

$$x_n \in hB \quad \textit{para todo } n$$

y

$$|x'(x_n) - \chi_{C_n}(x')| < \varepsilon 2^{-k}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$, y todo n con $2^k \leqslant n < 2^{k-1}$ y todo $x' \in \Omega$.

Además, la sucesión (C_n) puede elegirse de modo que el w-diámetro $\delta(C_n)$ de C_n tienda a cero cuando n tiende a infinito.*

Demostración. Basta proceder como en el lema VII.2.5 [2].

11. **Teorema.** *Si un e.l.c. E tiene un subespacio separable F cuyo dual F', dotado de una S_F-topología, contiene un conjunto equicontinuo V^0 que no es ω-precompacto, entonces para un cierto $B \in S_F$ existe un rB^0-árbol infinito y equicontinuo en E', siendo $r > 0$ y B^0 el conjunto de B en E'.*

Por consiguiente, si un e.l.c. E tiene un subespacio separable F cuyo dual F', dotado de una S_F-topología, posee un subconjunto equicontinuo que no es ω-precompacto, entonces E', dotado de una S-topología separada tal que E' es casi completo y $S_F \subset S$, no tiene la P.R.N.

Demostración. Por el lema 10 existe un subconjunto $\sigma(F', F)$-compacto Ω de $\{y' \in F' : p_V(y') = 1\}$ $(\subset V^0)$, un sistema de Haar (C_n) de abiertos-cerrados de Ω (con C_1

$= \Omega$) y una sucesión (y_n) en F tal que $y_n \in hB$ para todo n (donde $h \in \mathbf{N}$ y B es un cierto acotado de S_F) y

$$|y'(y_n) - \chi_{C_n}(y')| < \varepsilon 2^{-k} \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$, y todo n con $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$ y todo $y' \in \Omega$. Además, elegimos (C_n) de modo que el w^*-diámetro $\delta(C_n)$ tienda a cero cuando n tiende a infinito.

Sea Σ la σ-álgebra engendrada por (C_n) y sea μ la medida (contablemente aditiva) sobre Σ definida por $\mu(C_n) = 2^{-k}$ para $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$. Como $\delta(C_n) \to 0$, cada función $\varphi \in C(\Omega)$ es Σ-medible. Si se pone

$$(Ty)(y') = y'(y)$$

para $y \in F$, $y' \in \Omega$, se define un operador lineal continuo $T: F_V \to L^\infty(\mu)$. Como $L^\infty(\mu)$ es inyectivo, si U es un entorno absolutamente convexo de 0 en E tal que $U \cap F = V$, T tiene una extensión continua $E_U \to L^\infty(\mu)$ que seguiremos denotando por T.

Con esta notación, de la condición

$$|y'(y) - \chi_{C_n}(y')| < \varepsilon 2^{-k}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$, y todo n con $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$ e $y' \in \Omega$ se deduce

$$\|T(y_n) - \chi_{C_n}\|_\infty \leqslant \varepsilon \mu(C_n)$$

para todo n. Considerando $L^1(\mu)$ como un subespacio de $L^\infty(\mu)'$, se tiene que la sucesión $(T^*(\chi_{C_n})/\mu(C_n))$ es acotada en $E'_{U^0} = (E')_{U^0}$ y equicontinua en E'. Vamos a probar que dicha sucesión es un rB^0-árbol para un cierto $r > 0$. En efecto, si se pone

$$\|x'\| = \sup\{|\langle x, x'\rangle| : x \in B\}$$

para $x' \in E'$, se tiene

$$\left\|\frac{T^*(\chi_{C_j})}{\mu(C_j)} - \frac{T^*(\chi_{C_{2j+1}})}{\mu(C_{2j+1})}\right\| = \frac{1}{\mu(C_j)}\|T^*(\chi_{C_j}) - 2T^*(\chi_{C_{2j+1}})\| =$$

$$= \frac{1}{\mu(C_j)}\|T^*(\chi_{C_{2j}}) - T^*(\chi_{C_{2j+1}})\| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{h\mu(C_j)}|T^*(\chi_{C_{2j}} - \chi_{C_{2j+1}})(y_{2j})| =$$

$$= \frac{1}{h\mu(C_j)}\left|\int_{C_j} T(y_{2j})(\chi_{C_{2j}} - \chi_{C_{2j+1}})\, d\mu\right| =$$

$$= \frac{1}{h\mu(C_j)}\left[\int_{C_j} \chi_{C_{2j}}(\chi_{C_{2j}} - \chi_{C_{2j+1}})\, d\mu - \right.$$

$$- \int_{\Omega} \|T(y_{2j}) - \chi_{C_{2j}}\|_{\infty} |\chi_{C_{2j}} - \chi_{C_{2j+1}}| \, d\mu \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{h\mu(C_j)} \left[\frac{\mu(C_j)}{2} - \frac{\varepsilon\mu(C_j)}{2} \mu(C_j) \right] =$$

$$= \frac{1}{2h}(1 - \varepsilon\mu(C_j)) \geqslant \frac{1 - \varepsilon}{2h} > 0.$$

De la misma forma se prueba que

$$\|T^*(\chi_{C_j})/\mu(C_j) - T^*(\chi_{C_{2j}})/\mu(C_{2j})\| \geqslant (1 - \varepsilon)/2h.$$

Por tanto, como

$$\frac{T^*(\chi_{C_j})}{\mu(C_j)} = \frac{1}{2} \left[\frac{T^*(\chi_{C_{2j}})}{\mu(C_{2j})} + \frac{T^*(\chi_{C_{2j+1}})}{\mu(C_{2j+1})} \right]$$

para todo j, si $D = \{T^*(C_n)/\mu(C_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $r = (1 - \varepsilon)/3h$ se tiene

$$x' \in \operatorname{co}\left(D \setminus (x' + rB^\circ)\right)$$

para todo $x' \in D$.

Del teorema anterior se deduce la siguiente generalización del teorema de Stegall [12].

12. **Corolario.** *Sea E un e.l.c. y E' su dual fuerte que suponemos casi completo. Si existe un subespacio separable e infratonelado F tal que su dual fuerte F' tiene un acotado que no es ω-precompacto, entonces E' no posee la P.R.N.*

13. **Teorema.** *Sea E un e.l.c. y E' su dual fuerte que suponemos casi completo. Supongamos también que, para todo acotado contable y no vacío B_0 de E, el subespacio cerrado engendrado por B_0 es infratonelado. Entonces E' posee la P.R.N. si y sólo si cada uno de dichos subespacios F tiene la propiedad de que todo subconjunto acotado del dual fuerte F' es ω-precompacto.*

Demostración. Resulta del teorema 4 y del corolario 12.

14. **Teorema.** *Sea E un e.l.c. y E' su dual fuerte que suponemos casi completo. Supongamos también que, para todo acotado contable y no vacío B_0 de E, el subespacio cerrado F engendrado por B_0 es enfratonelado. Entonces, si para todo conjunto equicontinuo $D \neq \phi$ de E' y todo acotado $B \neq \phi$ de E existe un $x' \in D$ tal que*

$$x' \notin \operatorname{co}\left(D \setminus (x' + B^\circ)\right)$$

E' posee la P.R.N.

Demostración. En efecto, si E' no posee la P.R.N. existe, según el teorema 4 o el teorema 13, uno de dichos subespacios F tal que su dual fuerte F' contiene un conjunto equicontinuo V^0 que no es ω-precompacto. Entonces, por el teorema 11, resulta que existe un conjunto equicontinuo y no vacío D de E' y un acotado $B \notin \phi$ de E tal que

$$x' \in \mathrm{co}\,(D \backslash (x' + B^0))$$

para todo $x' \in D$.

15. **Lema.** *Si E es un e.l.c. casi completo tal que todo subconjunto acotado (o débilmente relativamente compacto) es ω-precompuesto, entonces todo subconjunto débilmente relativamente compacto de E es dentable.*

Demostración. Daremos una demostración basada en la prueba dada por I. Namioka y E. Asplund de que todo conjunto acotado de un espacio de Banach dual separable es dentable.

Por un resultado conocido y el teorema de Krein, bastara demostrar que si $A \subset E$ es un convexo débilmente compacto, entonces A es dentable.

Sea $H = \mathrm{ext}\,(A)$ el conjunto de los puntos extremales de A y $D = \bar{H}^\sigma$ (clausura en la topología débil de E). Dado un entorno absolutamente convexo y cerrado U de 0 en E, como D es ω-precompacto puede cubrirse por una familia contable de conjuntos $B_n = x_n + U/4$. Como $B_n \cap D$ es $\sigma(E, E')$-cerrado para cada n, el teorema de Baire aplicado al conjunto $\sigma(E, E')$-compacto $D = \bigcup_1^\infty (B_n \cap D)$ prueba que existe un $n \in \mathbf{N}$ tal que $B_n \cap D$ tiene interior no vacío en la topología débil (H y D son no vacíos por el teorema de Krein-Milman). Por tanto, existe un subconjunto $\sigma(E, E')$-abierto V tal que $V \cap D \neq \phi$ (y, por tanto, $V \cap H \neq \phi$) y

$$(V \cap D) - (V \cap D) \subset U/2$$

Sea $K_1 = \overline{\mathrm{co}}\,(D \backslash V)$ $(= \overline{\mathrm{co}}^\sigma(D \backslash V))$ y $K_2 = \overline{\mathrm{co}}\,(V \cap H)$ $(= \overline{\mathrm{co}}^\sigma(V \cap H))$. Tanto K_1 como K_2 son débilmente compactos por el teorema de Krein. Probemos que $K_1 \neq A$. En efecto, como por el teorema de Krein-Milman,

$$\mathrm{ext}\,(K_1) \subset \overline{D \backslash V}^\sigma = D \backslash V$$

y como $V \cap H \neq \phi$, existe un punto extremal de A que no está en K_1. Como $H \subset K_1 \cap K_2 \subset A$, de nuevo por el teorema de Krein-Milman se tiene

$$A = \overline{\mathrm{co}}^\sigma\,(K_1 \cup K_2) = \overline{\mathrm{co}}\,(K_1 \cup K_2)$$

Sea $A \subset hU$ y

$$C = \{\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 : \alpha \in [1/8h, 1],\ x_i \in K_i\}$$

C es un subconjunto convexo y $\sigma(E, E')$-compacto de A. Además, todo $x \in (K_2 \backslash K_1) \cap C$ es combinación convexa propia de un $x_1 \in K_1$ y de otro $x_2 \in K_2$: $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$ con $0 < \alpha < 1$, luego no puede ser punto extremal de A. Por tanto, $H \cap C \subset K_1 \subset A \neq K_1$ y $C \neq A$.

Sea $x \in A \backslash C$. Si probamos que

$$(A/C) - (A/C) \subset U$$

entonces $A \backslash C \subset x + U$ y, por consiguiente,

$$\overline{\text{co}}\,(A \backslash (x + U)) \subset \overline{\text{co}}\,(C) = \overline{\text{co}}^{\sigma}(C) = C$$

luego $x \notin \overline{\text{co}}\,(A \backslash (x + U))$ y estará demostrado que A es dentable.

Si $y \in A \backslash C$, entonces

$$y = \alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2, \ y_i \in K_i, \ 0 \leqslant \alpha < 1/8h$$

luego

$$y - y_2 = \alpha(y_1 - y_2) \in (1/4)U.$$

Por tanto,

$$A \backslash C \subset K_2 + (1/4)U.$$

Como, por otra parte,

$$(V \cap D) - (V \cap D) \subset U/2$$

y U es un conjunto convexo y cerrado, resulta

$$K_2 - K_2 \subset U/2$$

puesto que $K_2 = \overline{\text{co}}\,(V \cap H) \subset \overline{\text{co}}\,(V \cap D)$ y, por consiguiente,

$$(A/C) - (A/C) \subset (K_2 - K_2) + (1/2)U \subset U.$$

16. **Lema.** *Sea E un e.l.c. infratonelado y E' su dual fuerte. Si todo subconjunto acotado de E' es ω-precompacto, todo acotado no vacío B de E' es dentable. Más aún: para cada entorno U de 0 en E' existe un $x' \in B$ tal que*

$$x' \notin \overline{\text{co}}^{*}\,(B \backslash (x' + U))$$

donde $\overline{\text{co}}^{*}(D)$ es la envoltura convexa y $\sigma(E', E)$-cerrada de D.

Demostración. Basta proceder como en el lema 15 teniendo en cuenta que existe un sistema fundamental de entornos absolutamente convexos y $\sigma(E', E)$-cerrados de 0 en E'.

17. **Teorema.** *Sea E un e.l.c. y E' su dual fuerte que suponemos casi completo. Supongamos también que, para todo acotado contable y no vacío B_0 de E el subespacio cerrado F engendrado por B_0 es infratonelado. Entonces E' posee la P.R.N. si y sólo su todo acotado contable y no vacío D de E' es dentable.*

Demostración. En efecto, si todo subconjunto acotado contable $D \neq \phi$ de E' es dentable, también será σ-dentable y, por tanto, E' posee la P.R.N. según el teorema 2 [10].

Si E' posee la P.R.N., entonces, por el teorema 13, cada dual fuerte F' de los espacios F considerados antes tiene la propiedad de que todos sus conjuntos acotados son ω-precompactos. Entonces, por el lema 16, todo acotado $D_{F'} \neq \phi$ es dentable.

Supongamos ahora que existe un subconjunto acotado contable $D \neq \phi$ de E' que no es dentable. Entonces existe un acotado $B \neq \phi$ en E tal que

$$x' \in \overline{\text{co}}\,(D\backslash(x' + B^0))$$

para todo $x' \in D$. De igual forma que en el teorema 2 [11], si $D = \{x'_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ se puede hallar una sucesión (x_{mnk}) tal que

$$x_{mnk} \in B \quad \text{y} \quad |\langle x_{mnk}, x'_m - x'_n\rangle| \geqslant \left(1 - \frac{1}{k}\right) p_B(x'_m - x'_n).$$

Sea B_0 el conjunto acotado formado por la sucesión (x_{mnk}) y F el subespacio cerrado engendrado por B_0. Entonces, si $T = T_F$ es la aplicación canónica $E' \to F'$, de manera análoga que en el teorema 5 [11] resultaría

$$\overline{\text{co}}(TD \setminus (Tx' + B_0^0))$$

para todo $Tx' \in TD$ y TD sería un acotado no dentable en F', en contradicción con lo demostrado antes. Por tanto, todo subconjunto acotado y no vacío de E' es dentable.

18. **Definición.** Un e.l.c. E se dice que posee la *propiedad de Krein-Milman*, en abreviatura P.K.M., si todo subconjunto convexo cerrado y acotado $B \neq \phi$ de E es la envoltura convexa y cerrada de sus puntos extremales.

19. **Teorema.** *Si un e.l.c. E tiene un subespacio cerrado separable F cuyo dual F', dotado de una S_F-topología, contiene un conjunto equicontinuo V^0 que no es ω-precompacto. Entonces el dual E', dotado de una S-topología tal que $S_F \subset S$, no posee la propiedad de Krein-Milman.*

Demostración. Procederemos de manera análoga que en VII.2.7 [2]. En esta demostración haremos uso de las sucesiones (y_n) y (C_n) y del operador $T: E_U \to L^\infty(\mu)$ construidos en el teorema 11. Para nuestro propósito consideraremos $L^1(\mu)$ como un subespacio de $L^\infty(\mu)'$ que identificaremos con el espacio de las medidas finitamente aditivas α sobre Σ de variación acotada, que se anulan cuando μ se anula, dotado de la norma $\|\alpha\| = |\alpha|(\Omega)$. Sea C la envoltura convexa débilmente* cerrada de

$$\{\chi_{C_n}/\mu(C_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$$

en $L^\infty(\mu)'$, y

$$x'_n = T^*(\chi_{C_n}/\mu(C_n))$$

y D la envoltura convexa débilmente* cerrada de $\{x'_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ en E'. Sea

$$K = \{x' \in D: \lim_n x'(y_n) = 0\}$$

Evidentemente C y D son subconjuntos débilmente* compactos de sus espacios ambientes.

Es claro que K es acotado y convexo. Para probar que $K \neq \phi$ observemos que

$$|x'_n(y_m)| = |T^*(\chi_{C_n}/\mu(C_n))(y_m)| = \frac{1}{\mu(C_n)}\left|\int_{C_n} T(y_m)\,d\mu\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu(C_n)}\int_{C_n} \|T(y_m) - \chi_{C_m}\|_\infty\,d\mu + \frac{1}{\mu(C_n)}\int_{C_n}^{\chi_{C_m}} d\mu \leqslant \varepsilon\mu(C_m) + \frac{\mu(C_m \cap C_n)}{\mu(C_n)}$$

por ser $\|T(y_m) - \chi_{C_m}\|_\infty \leqslant \varepsilon\mu(C_m)$. Como $\lim\limits_m \mu(C_m) = 0$ es evidente que

$$\lim_m x'_n(y_m) = 0.$$

Por tanto, cada $x'_n \in K$ y $K \neq \phi$.

Vamos a probar que K es cerrado en E'. Si $x' \in E'$ es un punto de acumulación de K y $\varepsilon > 0$, existe un $y' \in K$ tal que

$$p_B(x' - y') < \varepsilon/2h \quad (y_n \in hB \text{ para todo } n).$$

Puesto que $y' \in K$ existe un m tal que $|y'(y_i)| < \varepsilon/2$ para $i \geqslant m$. Por tanto, se tiene

$$|x'(y_i)| \leqslant |x'(y_i) - y'(y_i)| + |y'(y_i)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para $i \geqslant m$ y se deduce que $x' \in K$.

Finalmente, vamos a demostrar que K no tiene puntos extremales. Con este fin observemos que

$$x'_n(y_m) = \frac{1}{\mu(C_n)}\int_{C_n} T(y_m)\,d\mu = \frac{1}{\mu(C_n)}\left[\int_{C_n} (T(y_m) - \chi_{C_m})\,d\mu + \mu(C_m \cap C_n) \geqslant -\varepsilon\mu(C_m)\right.$$

puesto que $\|T(y_m) - \chi_{C_m}\|_\infty \leqslant \varepsilon\mu(C_m)$. Como $\lim\limits_m \mu(C_m) = 0$ resulta

$$\varliminf_n x'(y_m) \geqslant 0$$

para todo $x' \in D$. De esto se deduce que todo punto extremal de K es también un punto extremal de $D \supset K$. Para completar la demostración bastará probar que ningún punto extremal de D pertenece a K.

Sea e' un punto extremal de D. Como $T^*(C) = D$, se ve que $C \cap (T^*)^{-1}(\{e^*\})$ es un subconjunto convexo débilmente* cerrado y no vacío de C. El teorema de Krein-Milman prueba la existencia de un punto extremal β de

$$C \cap (T^*)^{-1}(\{e'\})$$

Se ve fácilmente que todo punto extremal de tal conjunto es un punto extremal de C. Observemos que la clausura débil* de $\{\chi_{C_n}/\mu(C_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ en $L^\infty(\mu)'$ es un conjunto débilmente* compacto cuya envoltura convexa cerrada es C. Puesto que β es un punto extremal de C, el teorema de Krein-Milman garantiza que la medida finitamente aditiva β está en la clausura débil de $\{\chi_{C_n}/\mu(C_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$. Por tanto, existe una red $(\chi_{C_\alpha})_\alpha$ en el conjunto $\{\chi_{C_n}/\mu(C_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ tal que

$$\beta(A) = \lim_\alpha \int_A [\chi_{C_\alpha}/\mu(C_\alpha)]\, d\mu$$

para todo $A\in\Sigma$. En particular,

$$\beta(C_m) = \lim_\alpha \int_{C_m} [\chi_{C_\alpha}/\mu(C_\alpha)]\, d\mu$$

para todo m. Ningún $\chi_{C_\alpha}/\mu(C_\alpha)$ es un punto extremal de C puesto que

$$\chi_{C_n}/\mu(C_n) = \frac{1}{2}[\chi_{C_{2n}}/\mu(C_{2n}) + \chi_{C_{2n+1}}/\mu(C_{2n+1})].$$

De esto se deduce que la red $\left(\int_{C_m}\chi_{C_\alpha}/\mu(C_\alpha)\, d\mu\right)_\alpha$ es una red convergente de ceros o unos. Por tanto, $\beta(C_m) = 0$ ó 1 para todo m. Además,

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \beta(C_n) = \beta(\Omega) = \lim_\alpha \int_\Omega \chi_{C_\alpha}/\mu(C_\alpha)\, d\mu = 1.$$

Por tanto, $\beta(C_m) = 1$ para infinitos m. Si $\beta(C_m) = 1$ se tiene

$$|e'(y_m) - 1| = |e'(y_m) - \beta(C_m)| = |T^*\beta(y_m) - \beta(C_m)| =$$

$$= \left|\int_\Omega (Ty_m - \chi_{C_m})\, d\beta\right| \leqslant \|\beta\|\, \|T(y_m) - \chi_{C_m}\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

puesto que $\|\beta\| \leqslant 1$ y $\|T(y_m) - \chi_{C_m}\|_\infty \leqslant \varepsilon\mu(C_m) \leqslant \varepsilon$. Por consiguiente, $e'(y_m) \geqslant 1 - \varepsilon > 0$ para infinitos m. Entonces $\lim e'(y_m) \neq 0$ y $e' \notin K$, lo cual completa la demostración.

20. **Teorema.** *Sea E un e.l.c. y E' su dual fuerte que suponemos casi completo. Supongamos también que, para todo subconjunto acotado contable y no vacío B_0 de E el subespacio cerrado F engendrado por B_0 es infratonelado. Entonces son equivalentes:*

1. *E' posee la P.R.N.*
2. *Todo subconjunto acotado contable $B \neq \phi$ de E' es dentable.*
3. *Todo subconjunto acotado $B \neq \phi$ de E' es σ-dentable.*

4. *Todo subconjunto equicontinuo $B \neq \phi$ de E' tiene la propiedad de que, para todo entorno U de 0 en E', existe un $x' \in B$ tal que*

$$x' \notin \mathrm{co}(B \backslash (x' + U)).$$

5. *Cada uno de dichos espacios F tiene la propiedad de que todo subconjunto acotado del dual fuerte F' es ω-precompacto.*
Además, si E' tiene la propiedad de Krein-Milman, entonces E' tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

Demostración. $1 \Leftrightarrow 2$. Por el teorema 17. $1 \Leftrightarrow 3$. Por el teorema 2 [10]. $3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$. La primera implicación es evidente y la segunda se sigue del teorema 14. $1 \Leftrightarrow 5$. Por el teorema 13.

La última parte resulta de los teoremas 13 y 19.

BIBLIOGRAFIA

[1] BLONDIA, C.: *Locally convex spaces with the Radon-Nikodym property.* (En curso de publicación.)

[2] DIESTEL, J., y UHL, J. J. Jr. (1977): «Vector measures», *Math. Survey, 15,* Amer. Math. Soc. Providence, R.I.

[3] IONESCU TULCEA, A. y C. (1969): *Topics in the Theory of Lifting*, Springer, Berlín.

[4] KÖTHE, G. (1969): *Topological Vector Spaces I*, Springer, Nueva York.

[5] KUO, T. (1975): «On conjugate Banach spaces with the Radon-Nikodym property», *Pacific J. Math., 59,* 497-503.

[6] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1979): «Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo», *Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 73,* 361-387.

[7] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1980): «El teorema de Radon-Nikodym para las medidas con valores en un espacio localmente convexo», *Rev. R. Acad. C. Madrid, 74,* 41-64.

[8] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1980): «La propiedad de Radon-Nikodym, σ-dentabilidad y martingalas en espacios localmente convexos», *Rev. R. Acad. Ci. Madrid., 74,* 65-89.

[9] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1983): «Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo respecto de medidas infinitas I-IV», *Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 77,* 49-78, 529-567.

[10] RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: «La propiedad de Radon-Nikodym, σ-dentabilidad y martingalas en espacios localmente convexxos II», *Rev. R. Acad. C. Madrid.* (En curso de publicación.)

[11] RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: «Sobre el dual de un espacio localmente convexo con la propiedad de Radon Nikodym I», *Rev. R. Acad. Ci. Madrid.* (En curso de publicación.)

[12] STEGALL, C. (1975): «The Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces», *Trans. Amer. Math. Soc., 206,* 213-223.

[13] UHL, J. J. Jr. (1972): «A note on the Radon-Nikodym property for Banach spaces», *Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 17,* 113-115.

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid