Sobre el dual de un espacio localmente convexo con la propiedad de Radon-Nikodym I

Por BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

Recibido: 2 marzo 1983

Abstract

For the Radon-Nikodym property defined in [8] (definition 1 of this paper), Blondia [1] and I [10] has proved that the strong dual E' of an infrabarrelled l.c.s. E has the strong R.N.P. if E' is ω-precompact (or separable by seminorms) (definition 2). Here this question is studied when E is not infrabarrelled and E' is weakly compactly generated by seminorms (definition 7), or E' is a subspace of l.c.s. G weakly compactly generated by seminorms. In corollary 10 we prove that, if is an (LF) space and its strong dual E' is weakly compactly generated by seminorms, then E' possesses the strong R.N.P. In corollary 12 we state that if E is (LB) and its strong dual E' is a subspace of a l.c.s. G weakly compactly generated by seminorms, E' possesses the strong R.N.P. These results extend the known results of W.B. Johnson-Stegall an Kuo [5] for Banach spaces. Also are given criterions of Uhl's type [13] in order to assure when a quasicomplete subspace G of the dual E', endowed with a satured and separated S-topology, has the R.N.P. In theorem 4 we prove that if E is infrabarrelled and G is a $\sigma(E', E)$-closed subspace of the strong dual E', which has the R.N.P., then G has the strong R.N.P.

Para la propiedad de Radon-Nikodym definida en [8] (véase la definición 1 de abajo), Blondia [1] y yo [10] hemos probado que el dual fuerte E' de un espacio localmente convexo infratonelado E posee la propiedad de Nikodym fuerte (en el sentido de que las funciones de densidad se pueden elegir acotadas y con valores en E') si E' es ω-precompacto (o separable por seminormas). En este trabajo estudiamos en los teoremas 9 y 11 la cuestión cuando E no es infratonelado y E' es débilmente compactamente generado por seminormas (definición 7) o E' es un subespacio de un e.l.c. G débilmente compactamente generado por seminormas. En el corolario 10 probamos que si E es un espacio (LF) y si su dual fuerte E' es débilmente compactamente generado por seminormas, E' posee la propiedad de Radon-Nikodym fuerte. En el corolario 12 probamos que si E es un espacio (LB) y si su dual fuerte E' es un subespacio de un e.l.c. G débilmente compactamente generado por seminormas, E' posee la propiedad de Radon-Nikodym fuerte. Estos corolarios extienden conocidos resultados de W.B. Johnson-Stegall y Kuo [5] para espacios de Banach. También se dan criterios del tipo Uhl [13] en los teoremas 5 y 6 para asegurar cuándo un subespacio cerrado G del dual E', dotado de una S-topología saturada y separada, posee la propiedad de Radon-Nikodym. En el teorema 4 probamos que si E es infratonelado y G es un subespacio $\sigma(E', E)$-cerrado del dual fuerte E' que posee la propiedad de Radon-Nikodym, entonces G posee la propiedad de Radon-Nikodym fuerte.

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finito que supondremos completo para asegurar que existe un *lifting* ρ sobre el álgebra $\mathscr{L}^{\infty}_{\Omega}$ de las funciones reales o complejas medibles acotadas. Sea E un espacio localmente convexo, en abreviatura e.l.c., que supondremos siempre Haussdorff, y E'' el bidual dotado de la topología natural (véase Köthe [4], 300).

Sea $m: \Sigma \to E$ una medida vectorial y

$$A_S(m) = \left\{\frac{m(A)}{\mu(A)} : S \supset A \in \Sigma^+\right\}$$

para $S \in \Sigma^+$, siendo

$$\Sigma^+ = \{A \in \Sigma \colon \mu(A) > 0\}$$

1. **Definición.** Un e.l.c. se dice que tiene la *propiedad de Radon-Nikodym*, en abreviatura P.R.N., si para todo espacio de medida finito (Ω, Σ, μ) y toda medida vectorial $m:\Sigma \to E$ controlada por μ, en el sentido de que es μ-continua y tal que $(A_\Omega(m)$ es acotado, existe una función acotada $f\colon \Omega \to E''$ $\bar{\mu}$-integrable o integrable Grothendieck: $f \in \overline{\mathscr{L}}(\Sigma, \mu, E'')$ (véase [6], [7] y [8]) que verifica

$$m(A) = \int_A f\, d\mu \ (= m_f(A))$$

para todo $A \in \Sigma$. En el caso que dicha función acotada se pueda elegir siempre de modo que $f \in \mathscr{L}(\Sigma, \mu, E)$ se dice que E posee la *P.R.N. fuerte.*

2. **Definición.** Un subconjunto A de un e.l.c. E se dice *ω-precompacto* si, para todo entorno U de 0 en E, existe un conjunto contable $M \subset E$ tal que $A \subset M + U$.

3. **Teorema.** *Sea E un e.l.c. infratonelado. Entonces todo subespacio $\sigma(E', E)$-cerrado y ω-precompacto F del dual fuerte E' posee la P.R.N. fuerte.*

Demostración. Procederemos de forma análoga que para el teorema 9 de [10]. Sea $m\colon \Sigma \to F$ una medida vectorial controlada por μ.

Como $A_\Omega(m)$ es un conjunto equicontinuo por ser E infratonelado, $A_\Omega(m)$ es relativamente compacto para la topología $\sigma(E', E)$. Entonces por el lema 3 de [7] existe una función acotada $f\colon \Omega \to E'$ tal que

1. $f(\Omega) \subset \overline{\text{co}}^* A_\Omega(m) \subset F$.
2. $\langle x, f \rangle$ es medible para todo $x \in E$.
3. $\rho(\langle x, f \rangle) = \langle x, f \rangle$ para todo $x \in E$.
4. $\langle x, m(A) \rangle = \int_A \langle x, f \rangle\, d\mu$ para todo $x \in E$ y $A \in \Sigma$.

Vamos a demostrar que f es $\bar{\mu}$-medible. Como F es ω-precompacto es suficiente probar, según la proposición 12 [8], que para todo conjunto acotado no vacío $B \subset E$ y $x' \in E'$, $p_B \circ (f - x')$ es medible. Entonces,

$$p_B(f(t) - x') = \sup \{|\langle x, f(t) - x' \rangle| : x \in B\} = \sup_J p_J(f(t) - x')$$

donde el supremo se toma sobre todos los subconjuntos finitos J de B y

$$p_J(x') = \sup \{|\langle x, x' \rangle| : x \in J\}$$

Como

$$\rho(\langle x, f - x' \rangle) = \langle x, f - x' \rangle$$

se tiene

$$\rho(p_J \circ (f - x')) = p_J \circ (f - x')$$

y del teorema 3 del capítulo III de [3] resulta que

$$p_B \circ (f - x') = \sup_J p_J \circ (f - x')$$

es medible.

Siendo f $\bar{\mu}$-medible, para cada conjunto acotado no vacío $B \subset E$, existe una función μ-medible

$$f_B = \sum_1^\infty y_i \chi_{A_i} + f \chi_Z$$

con los $y_i \in f(\Omega)$, los $A_i \in \Sigma$ disjuntos, $Z = \Omega \backslash \bigcup_1^\infty A_i$ y $\mu(Z) = 0$ (en este caso se puede tomar $Z = \phi$) tal que

$$p_B \circ (f_B - f) \leqslant 1$$

Cada función $f_B : \Omega \to F$ es μ-integrable puesto que $f(\Omega)$ es acotado y F casi completo, y

$$\int_A f_B \, d\mu = \sum_1^\infty y_i \mu(A_i \cap A) \in \mu(A) \, \overline{\mathrm{co}} f(\Omega)$$

Por tanto, como $\overline{\mathrm{co}}\, f(\Omega)$ es completo y $\left(\int_A f_B \, d\mu \right)_B$ es una red de Cauchy, existe el

$$\lim_B \int_A f_B \, d\mu \left(= \int_A f \mathrm{d}\mu \right)$$

en F, y f es $\bar{\mu}$-integrable, e.d., $f \in \overline{\mathscr{L}}(\Sigma, \mu, F)$.

Como además

$$\langle x, m(A) \rangle = \int_A \langle x, f \rangle \, d\mu = \lim_B \int_A \langle x, f_B \rangle \, d\mu = \langle x, \int_A f \, d\mu \rangle$$

para todo $x \in E$ y $A \in \Sigma$, resulta

$$m(A) = \int_A f \, d\mu \quad (A \in \Sigma).$$

Este teorema es una extensión del teorema 9 [10] porque, aunque el dual de $E/F^\perp$ es F, la topología fuerte de $(E/F^\perp)'$ no coincide con la topología de F necesariamente. No obstante, utilizando $(E/F^\perp)' = F$ se puede demostrar que $p_B \circ (f - x')$ es medible de la misma forma que en dicho teorema 9 [10].

4. **Teorema.** *Sea E un e.l.c. infratonelado y E' su dual fuerte. Si F es un subespacio $\sigma(E', E)$-cerrado de E' que posee la P.R.N., entonces F posee la P.R.N. fuerte.*

Demostración. Sea $m: \Sigma \to F$ una medida vectorial controlada por μ. Por ser $A_S(m)$ acotado en F para $S \in \Sigma$ y poseer F la P.R.N., $A_S(m)$ es σ-dentable para todo $S \in \Sigma^+$ según el teorema 2 [10]. Entonces, por el teorema 1 [10], bastará probar que existe una función acotada $f: \Omega \to F$ (m, μ) encajada para un sistema fundamental de entornos absolutamente convexos y cerrados de 0 en F.

Siendo $A_\Omega(m)$ un conjunto relativamente compacto para la topología $\sigma(E', E)$ por ser E infratonelado, por el lema 3 [7], existe una función acotada $f: \Omega \to E'$ tal que

1. $f(\Omega) \subset \overline{\text{co}}^* A_\Omega(m) \subset F$.
2. $\langle x, f \rangle$ es medible para todo $x \in E$.
3. $\rho(\langle x, f \rangle) = \langle x, f \rangle$ para todo $x \in E$.
4. $\langle x, m(A) \rangle = \int_A \langle x, f \rangle \, d\mu$ para todo $x \in E$ y $A \in \Sigma$.

Sea $x' + U$ $(U = B^0 \cap F)$ una p_B-bola $\sigma(E', E)$-cerrada de centro x' en F que contenga a $A_S(m)$ $(S \in \Sigma^+)$. Entonces, como

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A \langle x, f \rangle \, d\mu \in \langle x, A_S(m) \rangle$$

para todo $x \in E$ y $A \in \Sigma_S^+$, se deduce

$$\langle x, f \rangle(t) = \rho(\langle x, f \rangle)(t) \in \overline{\langle x, A_S(m) \rangle}$$

para todo $t \in S \cap \rho(S)$ y $x \in E$ y, por tanto,

$$f(t) \in \overline{\text{co}}^* A_S(m) \subset x' + U$$

para todo $t \in S \cap \rho(S)$ y casi todo $t \in S$. Luego $f: \Omega \to F$ es una función (m, μ) encajada para el sistema fundamental de los entornos absolutamente convexos y $\sigma(F, E)$-cerrados de 0 en F.

Aplicando este teorema y el teorema 2 [10] se puede demostrar el teorema 3 probando previamente de manera conocida, mediante el teorema de Krein-Milman, que todo conjunto acotado y no vacío $B \subset F$ es dentable, cuando E es infratonelado y F es ω-precompacto, tanto para la topología de F como para la topología $\sigma(F, E)$.

5. **Teorema.** *Sea E un e.l.c., E' su dual dotado de una S-topología separada y saturada y G un subespacio casi completo de E'. Supongamos que, para todo acotado contable $B_0 \in S$, el espacio vectorial F engendrado por B_0 está dotado de una topología localmente convexa tal que la inclusión $F \to E$ es continua y el dual F' está dotado de una S_F-topología con $B_0 \in S_F \subset S$. Si T_F es la aplicación canónica $E' \to F'$ y todo subespacio cerrado $\overline{T_F(G)}$ de F' es casi completo y posee la P.R.N., entonces G posee la P.R.N.*

Demostración. Según el teorema 2 [10] será suficiente probar que todo acotado contable no vacío $D \subset G$ es σ-dentable.

Sea $B \in S$ y $D = \{x'_n : n \in N\}$, entonces existe una sucesión (x_{mnk}) tal que

$$x_{mnk} \in B \quad \text{y} \quad |\langle x_{mnk}, x'_m - x'_n \rangle| \geqslant \left(1 - \frac{1}{k}\right) p_B(x'_m - x'_n)$$

Sea B_0 el conjunto formado por la sucesión (x_{mnk}) y F como arriba, entonces si $T = T_F$ es la aplicación canónica $E' \to F'$ se tiene

$$p_B(x') \geqslant p_{B_0}(Tx') \geqslant \sup_k |\langle x_{mnk}, Tx' \rangle| = \sup_k |\langle x_{mnk}, x' \rangle| \geqslant p_B(x')$$

para $x' = x'_m - x'_n \in D - D$.

Como T es continua para la S-topología de E' y la S_F-topología de F' por ser $S_F \subset S$, $T(D)$ es un subconjunto acotado de $\overline{T(G)}$ que posee la P.R.N. Entonces $T(D)$ es σ-dentable y, por tanto, existe un $x' \in D$ tal que

$$Tx' \notin \sigma(TD \backslash (Tx' + B_0^0))$$

Si fuese

$$x' \in \sigma(D \backslash (x' + B^0))$$

existiría una sucesión (λ_i) de números reales $\lambda_i > 0$ tales que $\sum_1^\infty \lambda_i = 1$ y una sucesión (x'_i) en D que verificaría $p_B(x'_i - x') > 1$ y

$$x' = \sum_1^\infty \lambda_i x'_i \quad (\text{en } E')$$

Por tanto,

$$p_{B_0}(Tx'_i - Tx') = p_B(x'_i - x') > 1$$

y

$$Tx' = \sum_1^\infty \lambda_i Tx'_i \in \sigma(D \backslash (Tx' + B_0^0))$$

con $Tx' \in TD$ en contradicción con la hipótesis. Por consiguiente., D es σ-dentable.

6. **Teorema.** *Sea E un e.l.c. y E' su dual fuerte que suponemos casi completo. Supongamos también que, para todo acotado contable y no vacío B_0 de E, el espacio cerrado F engendrado por B_0 es infratonelado y su dual fuerte F' es ω-precompacto. Entonces E' posee la P.R.N.*

Demostración. Basta aplicar el teorema 5 tomando $G = E'$ y F dotado de la topología inducida puesto que entonces si $T = T_F$ es la aplicación canónica $E' \to F'$, se tiene $T(E') = F'$ y F' posee la P.R.N. en virtud del teorema 3.

7. **Definición.** Un e.l.c. E se dice *débilmente compactamente generado por seminormas*, en abreviaturas W.C.G.S., si para todo entorno absolutamente convexo U de O, E_U es W.C.G. (débilmente compactamente generado).

Es claro que todo e.l.c. W.C.G. es W.C.G.S. y que todo e.l.c. ω-precompacto es W.C.G.S., ya que todo e.l.c. E es ω-precompacto si y sólo si cada uno de dichos espacios E_U es separable.

8. **Lema.** *Sea B_0 un conjunto acotado contable y total en el e.l.c. F y F' el dual dotado de una S-topología tal que $B_0 \in S$. Entonces, si F' es* W.C.G.S., *F' es ω-precompacto.*

Demostración. Sea $B_0 \subset B \in S$ y K un subconjunto débilmente compacto y total en $F'_V = (F')_V$, donde $V = B^0$ y $\bigcap_1^\infty (V/n) = \{0\}$. Entonces K es también $\sigma(F'_V, B_0)$-compacto y esta topología sobre K coincide con la $\sigma(F'_V, (F'_V)')$. Como B_0 es contable resulta que la topología $\sigma(F'_V, (F'_V)')$ sobre K es metrizable. Por consiguiente, existe un subconjunto contable D $\sigma(F'_V, (F'_V)')$-denso en K y, por tanto, es $\sigma(F'_V, (F'_V)')$-total en F'_V. Luego F' es ω-precompacto.

9. **Teorema.** *Sea E un e.l.c. y E' su dual fuerte que suponemos casi completo. Supongamos también que, para todo acotado contable y no vacío B_0 de E, el subespacio F engendrado por B_0 es infratonelado, y E' es W.C.G.S. Entonces E' posee la P.R.N.*

Demostración. Sea B un subconjunto acatado y no vacío de un F y K un subconjunto débilmente compacto y total en $E'_U = (E')_U$, donde $U = B^0$ es el conjunto polar de B en E'. Entonces, si V es el conjunto polar de B en F', la aplicación canónica $T: E'_U \to F'_V$ es continua para las topologías ordinarias y débiles y, por tanto, $T(K)$ es un conjunto débilmente compacto y total en $F'_V = T(E'_U)$. Luego F' es W.C.G.S. y, por el lema 8 y el teorema 6, se deduce que E' posee la P.R.N.

10. **Corolario.** *Sea E un espacio (LF) y E' su dual fuerte. Entonces, si E' es W.C.G.S., E' posee la P.R.N. fuerte.*

Demostración. Resulta de los teoremas 9 y 4 teniendo en cuenta que E es tonelado, así como también todos sus subespacios cerrados F engendrados por los conjuntos acotados.

11. **Teorema.** *Sea E un e.l.c. y E' su dual fuerte. Supongamos que, para todo acotado contable y no vacío B_0 de E, el subespacio cerrado F engendrado por B_0 es un espacio de Banach. Entonces, si E' es un subespacio de un e.l.c. G W.C.G.S., E' posee la P.R.N.*

Demostración. Sea B la bola cerrada unidad de uno de esos espacios F. Entonces existe una aplicación lineal continua S de l^1 sobre F y, por tanto, su traspuesta S^* aplica isomórficamente F' en l^∞. Sea U un entorno absolutamente convexo de 0 en G tal que $E' \cap U \subset V = B^0$ (polar de B en E'). Sea T la aplicación canónica $(E')_V \to F'$ que es evidentemente continua. Entonces $S^* \circ T$ aplica $E'_V = (E')_V$ en l^∞. Por el teorema de Hahn-Banach existe una aplicación lineal continua $R: G_U \to l^\infty$ que es una extensión de $S^* \circ T$. Como los subconjuntos débilmente compactos de l^∞ son separables para la norma, el espacio $R(G_U)$ es separable para la norma. Se sigue que $S^*(T(E')) = S^*(F')$ es separable (para la norma). Como S^* es un isomorfismo resulta que F' es separable. Entonces por el teorema 6 se deduce que E' posee la P.R.N.

12. **Corolario.** *Sea E un espacio (LB) y E' su dual fuerte. Entonces, si E' es un subespacio de un e.l.c. G W.C.G.S., E' posee la P.R.N. fuerte.*

Demostración. Resulta de los teoremas 11 y 4 teniendo en cuenta que E es tonelado y que todos sus subespacios cerrados F engendrados por los conjuntos acotados son espacios de Banach.

BIBLIOGRAFIA

[1] BLONDIA, C.: *Locally convex spaces with the Radon-Nikodym Property.* (En curso de publicación.)

[2] DIESTEL., J., y UHL, J. J. Jr. (1977): «Vector measures», *Math. Survey, 15*, Amer. Math. Soc. Providence, R.I.

[3] IONESCU TULCEA, A y C. (1969): *Topics in the Theory of Lifting*, Springer, Berlín.

[4] KÖTHE, G. (1969): *Topological Vector Spaces I*, Springer, Nueva York.

[5] KUO, T. (1975): «On conjugate Banach spaces with the Radon-Nikodym property», *Pacific J. Math., 59*, 497-503.

[6] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1979): «Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo», *Rev. R. Acad. Ci. Madrid., 73*, 361-387.

[7] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1980): «El teorema de Radon-Nikodym para las medidas con valores en un espacio localmente convexo», *Rev. R. Acad. C. Madrid., 74*, 41-64.

[8] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1983): «La propiedad de Radon-Nikodym, σ-dentabilidad y martingalas en espacios localmente convexos», *Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 74*, 65-89.

[9] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1983): «Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo respecto de medidas infinitas I-IV», *Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 77*, 49-78, 529-567.

[10] RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: «La propiedad de Radon-Nikodym, σ-dentabilidad y martingalas en espacios localmente convexos II», *Rev. R. Acad. Ci. Madrid.* (En curso de publicación.)

[11] STEGALL, C. (1972): «Duals of certain spaces with the Dunford-Pettis property», *Notices Amer. Math. Soc., 19* (7), A-799. Abstract, 699-B31.

[12] STEGALL, C. (1975): «The Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces», *Trans. Amer. Math. Soc., 206*, 213-223.

[13] UHL, J. J. Jr. (1972): «A note of the Radon-Nikodym property for Banach spaces», *Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 17*, 113-115.

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid