Sobre el corazón de una función vectorial

Por JOSÉ L. DE MARÍA y BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

Recibido: 2 marzo 1983

Abstract

A convex set closely related with the esential range of a l.c.s. vector-valued function is studied in this paper. If the function is Pettis integrable, a characterization of this set is obtained.

1. INTRODUCCION

En la línea del teorema de Pettis [5], [2] se vienen estudiando medibilidades naturales en la integración por medio de conjuntos asociados al rango, el rango esencial y el corazón de las funciones vectoriales, [4], [6], [7]. Es precisamente el corazón de una función con valores en un espacio localmente convexo el conjunto que se estudia en este trabajo. El resultado obtenido en el teorema 2 y en el corolario 8 relaciona este conjunto con la envoltura cerrada y convexa de los promedios de la integral, cuando la función es integrable Pettis. En el teorema 4 y corolario 7 se obtiene que si la función es $\bar{\mu}$-medible y regular, el corazón es la envoltura cerrada y convexa del rango esencial de la función. Más adelante se caracterizan los tipos de medibilidad por medio de «diámetros» de estos conjuntos.

1. **Definición.** Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y E un espacio localmente convexo. Dada una función $f: \Omega \to E$ se llama *corazón* de f sobre un conjunto $A \in \Sigma_0^+$, donde $\Sigma_0^+ = \{A \in \Sigma : 0 < \mu(A) < \infty\}$ al conjunto

$$\mathrm{cor}_f(A) = \bigcap_{\mu(Z)=0} \overline{\mathrm{co}}\, f(A \backslash Z)$$

Si f es integrable Pettis es posible caracterizar el corazón de f mediante los promedios de las integrales de f como se expresa en el siguiente teorema.

2. **Teorema.** *Si $f:\Omega \to E$ es integrable Pettis y $A \in \Sigma_0^+$, se tiene*

$$\mathrm{cor}_f(A) = \overline{\mathrm{co}} \left\{ \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu : X \subset A, \mu(X) > 0 \right\}$$

Demostración. Sea $A \supset X \in \Sigma_0^+$ y $\mu(Z) = 0$. Se sigue fácilmente del teorema de Hahn-Banach

$$(\mu(X))^{-1} \int_X f d\mu \in \overline{\text{co}}\, f(X \backslash Z) \subset \overline{\text{co}}\, f(A \backslash Z)$$

Por tanto,

$$\overline{\text{co}} \left\{ (\mu(X))^{-1} \int_X f d\mu \colon X \in A,\ \mu(X) > 0 \right\} \subset \text{cor}_f(A)$$

Veamos la otra desigualdad. Sea p una seminorma continua en E y $x \in \text{cor}_f(A)$ y $|x'| \leqslant p$ ($x' \in E'$, dual de E). Como $g = \langle f, x' \rangle$ es una función medible, existe una función

$$\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_{A_n} + g \chi_Z$$

donde los $A_n \in \Sigma_0^+$, $A_n \subset A$ son disjuntos y $\mu(Z) = 0$, tal que

$$|\langle f(t), x' \rangle - \alpha(t)| \leqslant \varepsilon/4$$

para todo $t \in A$.

Para cada $t \in A_n$ se tiene

$$\left| \langle f, x' \rangle(t) - (\mu(A_n))^{-1} \int_{A_n} \langle f, x' \rangle \, d\mu \right| \leqslant |\langle f(t), x' \rangle - \alpha_n| +$$

$$+ \left| (\mu(A_n))^{-1} \int_{A_n} (\alpha_n - \langle f, x' \rangle(t)) \, d\mu \right| \leqslant \varepsilon/2$$

Si $x \in \overline{\text{co}}(f(A \backslash Z))$, existe una combinación convexa $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(t_i)$, $t_i \in A \backslash Z$ tal que

$$p\left(x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(t_i) \right) < \varepsilon/2$$

y, por tanto,

$$\left| \langle x, x' \rangle - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle f(t_i), x' \rangle \right| < \varepsilon/2$$

puesto que $|x'| \leqslant p$.

Como cada t_i pertenece a algún A_{n_i}, se tiene

$$\left|\langle x, x'\rangle - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mu(A_{n_i}))^{-1} \int_{A_{n_i}} \langle f, x'\rangle \, d\mu\right| =$$

$$= \left|\langle x, x'\rangle - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\langle f, x'\rangle(t_i) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mu(A_{n_i}))^{-1} \int_{A_{n_i}} \langle f, x'\rangle(t_i)\, d\mu - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mu(A_{n_i}))^{-1} \int_{A_{n_i}} \langle f, x'\rangle \, d\mu\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon/2 + \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mu(A_{n_i}))^{-1} \int_{A_{n_i}} (\langle f, x'\rangle(t_i) - \langle f, x'\rangle(t))\, d\mu\right| \leqslant \varepsilon$$

luego

$$\langle x, x'\rangle \geqslant \inf\left\{\langle(\mu(X))^{-1} \int_X f \, d\mu, x'\rangle : X \subset A, \mu(X) > 0\right\}$$

y por el teorema de Hahn-Banach se deduce:

$$x \in \overline{\mathrm{co}}\left\{(\mu(X))^{-1} \int_X f \, d\mu : X \subset A, \mu(X) > 0\right\}$$

con lo que queda demostrado el teorema.

3. **Definición.** Una función $f: \Omega \to E$ se dice *$\bar{\mu}$-medible* si y sólo si se verifican:

3.1. Para todo conjunto A de medida finita y todo entorno V de 0 en E, existe un subconjunto Z de medida nula de A y un conjunto contable $M \subset E$ tales que $f(A \backslash Z) \subset M + V$.

3.2. $p \circ (f - x)$ es μ-medible para toda seminorma continua p de E y todo x de E*.

Una función $\bar{\mu}$-medible se dice *regular* si $\mathrm{er}_f(A) \neq \phi$ para todo $A \in \Sigma_0^+$, siendo

$$\mathrm{er}_f(A) = \bigcap_{\mu(Z)=0} \overline{f(A \backslash Z)}$$

el rango esencial de f sobre A.

El corazón $\mathrm{cor}_f(A)$ está íntimamente ligado al rango esencial $\mathrm{er}_f(A)$ según el siguiente teorema.

4. **Teorema.** *Si $f: \Omega \to E$ es una función $\bar{\mu}$-medible regular, para todo $A \in \Sigma_0^+$ se tiene*

$$\mathrm{cor}_f(A) = \overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{er}_f(A))$$

* Para la definición de μ-medible ver [6] y [7].

Demostración. Sea $A \in \Sigma_0^+$, entonces

$$\mathrm{cor}_f(A) = \bigcap_{\mu(Z)=0} \overline{\mathrm{co}}\,(A\backslash Z) \supset \bigcap_{\mu(Z)=0} \overline{f(A\backslash Z)} = \mathrm{er}_f(A)$$

Por tanto,

$$\mathrm{cor}_f(A) \supset \overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{er}_f(A))$$

Veamos que se verifica la inclusión opuesta. Dado $y \in \mathrm{er}_f(A)$ y un entorno absolutamente convexo y cerrado U de 0 en E, existe un subconjunto $A_i \subset A$ de medida positiva tal que

$$p_U(f(t) - y) \leqslant 1$$

para todo $t \in A_i$, siendo p_U el funcional de Minkowski de U.

Sea $\mathscr{F}$ la clase de las familias disjuntas $(A_i)_{i \in I}$ de conjuntos $A_i \subset A$ de medida positiva y tales que, para todo $i \in I$, existe $y_i \in \mathrm{er}_f(A)$ que cumple $f(A_i) \subset y_i + U$. Esta clase se ordena poniendo

$$(A_i)_{i \in I} < (B)_{j \in J}$$

si y solamente si para todo $i \in I$ existe $j \in J$ tal que $A_i = B_j$.

Es claro que $\mathscr{F} \neq \phi$ por ser $\mathrm{er}_f(A) \neq \phi$.

Como $\mathscr{F}$ es inductivo, según se ve fácilmente, por el axioma de Zorn, existe un elemento maximal en $\mathscr{F}$, esto es, existe una familia maximal $(A_i)_{i \in I}$ de conjuntos disjuntos de medida positiva tales que, para cada $i \in I$, existe $y_i \in \mathrm{er}_f(A)$ que verifica $f(A_i) \subset y_i + U$. Además, dicha familia es contable puesto que $\mu(A) < +\infty$ y, por su maximalidad, tiene la propiedad

$$\mu\left(A \backslash \bigcup_{i \in I} A_i\right) = 0$$

Definamos

$$g = \sum_{i=1}^{n} y_i \chi_{A_i} + f\chi_Z$$

donde

$$Z = A \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$$

Entonces

$$g(A\backslash Z) \subset \mathrm{er}_f(A)$$

y

$$\mathrm{cor}_f(A) \subset \overline{\mathrm{co}}\,(f(A\backslash Z)) \subset \overline{\mathrm{co}}\,(g(A\backslash Z) + U) \subset \overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{er}_f(A) + U) \subset \overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{er}_f(A)) + 2U$$

Como la anterior inclusión es cierta para todo U, se tiene

$$\operatorname{cor}_f(A) \subset \overline{\operatorname{co}}\,(\operatorname{er}_f(A))$$

5. **Observación.** El teorema 4 también vale para todo conjunto medible A, estrictamente localizable y de medida $\mu(A) > 0$ si se extiende para dichos conjuntos la definición 1.

6. **Definición.** Una medida μ se dice *esencial* si, para todo $A \in \Sigma$ (dominio de μ) se verifica

$$\mu(A) = \sup \{\mu(A \cap K) : K \in \Sigma_0\}$$

donde $\Sigma_0 = \{A \in \Sigma : \mu(A) < \infty\}$. En este caso se define el *corazón*

$$\operatorname{cor}_f(A) = \overline{\operatorname{co}}\left[\bigcup_{X \in \Sigma_A^0} \operatorname{cor}_f(X)\right] = \overline{\bigcup_{X \in \Sigma_A^0} \operatorname{cor}_f(X)}$$

para $A \in \Sigma^+ = \{X \in \Sigma : \mu(X) > 0\}$, siendo

$$\Sigma_A^0 = \{X \in \Sigma_0^+ : X \subset A\}$$

En particular, del teorema 2 se deduce

$$\operatorname{cor}_f(A) = \overline{\operatorname{co}}\left\{(\mu(X))^{-1} \int_X f \, d\mu : X \in \Sigma_A^0\right\} \quad (A \in \Sigma^+)$$

para toda función integrable Pettit.

7. **Corolario.** *Si f es μ-medible y regular se verifica*

$$\operatorname{cor}_f(A) = \overline{\operatorname{co}}\,(\operatorname{er}_f(A))$$

para todo $A \in \Sigma^+$.

Demostración. Una inclusión es inmediata, ya que

$$\operatorname{cor}_f(A) = \overline{\operatorname{co}}\left[\bigcup_{X \in \Sigma_A^0} \operatorname{cor}_f(X)\right] \subset \overline{\operatorname{co}}\,(\operatorname{er}_f(A))$$

Sea $y \in \operatorname{er}_f(A)$, entonces para cada seminorma continua p de E se tiene

$$\mu\{t \in A : p(f(t) - y) \leqslant 1\} > 0$$

de donde, por ser μ esencial, se deduce que existe un conjunto $X \in \Sigma_0^+$, $X \subset \{t \in A : p(f(t) - y) \leqslant 1\}$. Luego

$$\operatorname{cor}_f(X) \subset y + U$$

para $U = \{x \in E: p(x) \leqslant 1\}$ y

$$y \in \operatorname{cor}_f(X) + U \subset \bigcup_{X \in \Sigma_A^0} \operatorname{cor}_f(X) + U$$

Por tanto,

$$\operatorname{er}_f(A) \subset \bigcup_{X \in \Sigma_A^0} \operatorname{cor}_f(X) + U$$

y

$$\overline{\operatorname{co}}\,(\operatorname{er}_f(A)) \subset \overline{\operatorname{co}}\left[\bigcup_{X \in \Sigma_A^0} \operatorname{cor}_f(X)\right] + 2U$$

para todo entorno absolutamente convexo y cerrado U de 0 en E. Entonces

$$\overline{\operatorname{co}}(\operatorname{er}_f(A)) \subset \overline{\operatorname{co}}\left[\bigcup_{X \in \Sigma_A^0} \operatorname{cor}_f(X)\right]$$

8. **Corolario.** *Si f es una función $\bar{\mu}$-medible y regular, integrable Pettis, se verifica*

$$\overline{\operatorname{co}}\left\{(\mu(X))^{-1}\int_X f\,d\mu : X \in \Sigma_A^0\right\} = \overline{\operatorname{co}}\,(\operatorname{er}_f(A))$$

para todo $A \in \Sigma^+$.

9. **Observación.** En el teorema 36 [6] y en la proposición 19 [7] se ha obtenido el siguiente resultado análogo:

Si f es una función $\bar{\mu}$-integrable regular se tiene

$$\operatorname{er}_f(H) \subset \overline{A_H(m_f)} \subset \overline{\operatorname{co}}\,(\operatorname{er}_f(H))$$

para todo $H \in \Sigma^+$, siendo

$$A_H(m_f) = \left\{(\mu(X))^{-1}\int_X f\,d\mu : H \supset X \in \Sigma_0^+\right\}$$

10. **Teorema.** *Sean f y $g:\Omega \to E$ dos funciones débilmente medibles. Si $x' \circ f = x' \circ g$ en casi todo Ω para todo $x' \in E'$ (dual de E), entonces $\operatorname{cor}_f(A) = \operatorname{cor}_g(A)$ para todo $A \in \Sigma^+$. Recíprocamente, si $\operatorname{cor}_f(A) = \operatorname{cor}_g(A) \neq \phi$, para todo conjunto $A \in \Sigma_0^+$, entonces $x' \circ f = x' \circ g$ en casi todo Ω para todo $x' \in E'$.*

Demostración. Supongamos $x' \circ f = x' \circ g$ en casi todo Ω para cada $x' \in E'$. Sean $A \in \Sigma_0^+$ y $\mu(Z) = 0$. Si $x \in \operatorname{cor}_f(A)$ y p es una seminorma continua de E, para cada x' tal que $|x'| \leqslant p$ y

$$Z_0 = \{t \in \Omega: x' \circ f(t) \neq x' \circ g(t)\}$$

el conjunto $Z_1 = Z \cup Z_0$ es de medida nula y

$$\langle x, x' \rangle \geqslant \inf \{x' \circ f(A \setminus Z_1)\}$$

ya que $x \in \overline{\text{co}}\, f(A \setminus Z_1)$. Por tanto, como

$$\langle x, x' \rangle \geqslant \inf \{x' \circ f(A \setminus Z_1)\} = \inf \{x' \circ g(A \setminus Z_1)\} \geqslant \inf \{x' \circ g(A \setminus Z)\}$$

se deduce que

$$x \in \overline{\text{co}}\,(g(A \setminus Z))$$

y

$$x \in \text{cor}_g(A)$$

La otra inclusión se prueba de forma análoga.

Para demostrar la segunda parte procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $x' \in E'$ tal que

$$\mu\{t \in \Omega : x'f(t) < x'g(t)\} > 0$$

entonces por ser μ esencial se deduce fácilmente que existe $A \in \Sigma_0^+$ tal que

$$\sup x' \circ f(A) < \inf x' \circ g(A)$$

y, por el teorema de Hahn-Banach, se deduce que $\overline{\text{co}}\,(f(A)), \overline{\text{co}}\,(g(A))$ son disjuntos, y dado que $\text{cor}_f(A) = \text{cor}_g(A)$ resulta que estos conjuntos han de ser vacíos, lo cual es una contradicción con la hipótesis.

11. **Teorema.** *Una función $f : \Omega \to E$ es $\bar{\mu}$-medible si y sólo si para cada entorno U de 0 en E y para cada $A \in \Sigma_0^+$, existe un conjunto $X \subset A$ tal que $\mu(X) > 0$ y $f(X) - f(X) \subset U$.*

Demostración. Si $f : \Omega \to E$ es una función $\bar{\mu}$-medible, para cada $A \in \Sigma_0^+$ y cada entorno absolutamente convexo y cerrado U de 0 en E, existe un conjunto contable M en E y un conjunto $Z \subset A$ de medida nula tales que

$$f(A \setminus Z) \subset M + U/2$$

y, por tanto, para algún $x \in M$ se tiene

$$X = f^{-1}(x + U/2) \cap A \in \Sigma_A^+$$

y

$$f(X) - f(X) \subset U$$

Recíprocamente sea $A \in \Sigma_0^+$ y p una seminorma continua de E. Sea $\mathscr{F}$ la clase de las familias disjuntas $(A_i)_{i \in I}$ en Σ tales que

$$p(f(A_i) - f(A_i)) \leqslant 1$$

Evidentemente, $\mathscr{F} \neq \phi$. Si se ordena $\mathscr{F}$ por inclusión, $\mathscr{F}$ es inductivo y por el lema de Zorn se deduce que tiene un elemento maximal $(A_i)_{i \in I}$. Entonces I es contable por ser $\mu(A) < +\infty$ y

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{i \in I} A_i\right) = 0$$

Si $Z = A \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$ y $t_i \in A_i$, la función

$$g = \sum_{i \in I} f(t_i)\chi_{A_i} + f\chi_Z$$

es μ-medible y

$$p(f(t) - g(t)) \leqslant 1$$

para todo $t \in A$, de donde se concluye que f es $\bar{\mu}$-medible.

12. **Teorema.** *Sea $\Omega \in \Sigma_0^+$ y E un e.l.c. Entonces una función débilmente medible $f: \Omega \to E$ tal que $\mathrm{cor}_f(A) \neq \phi$ para todo $A \in \Sigma^+$, es débilmente equivalente a una función $\bar{\mu}$-medible si y sólo si:*

12.1 *Para todo $A \in \Sigma^+$ y para todo entorno U de 0 en E, existe $X \in \Sigma_A^+$ tal que $\mathrm{cor}_f(X) - \mathrm{cor}_f(X) \subset U$.*

12.2. *Existe una red de funciones $(f_\pi)_{\pi \in \Pi}$, donde Π es el conjunto dirigido de las particiones contables en Σ de Ω, que es uniformemente convergente y tal que para cada $\pi = (A_i)_{i \in I} \in \Pi$.*

$$f_\pi = \sum_{i \in I} x_i \chi_{A_i}$$

en casi todo punto, donde $x_i \in \mathrm{cor}_f(A_i)$ si $A_i \in \Sigma^+$.

Demostración. Las condiciones son necesarias. En efecto:

12.1. Resulta inmediatamente de los dos teoremas anteriores.

12.2. Sea g la función $\bar{\mu}$-medible débilmente equivalente a la función f.

Dado $\pi = (A_i)_{i \in I} \in \Pi$ definimos

$$f_\pi = \sum_{i \in I_0} x_i \chi_{A_i} + \sum_{i \notin I_0} g\chi_{A_i}$$

donde I_0 es el conjunto de los $i \in I$ tales que $A_i \in \Sigma^+$ y $x_i \in \mathrm{cor}_f(A_i)$ si $i \in I_0$. Es claro que

$$f_\pi = \sum_{i \in I_0} x_i \chi_{A_i} = \sum_{i \in I} x_i \chi_{A_i}$$

en casi todo punto, si $x_i = 0$ para $\mu(A_i) = 0$.

Vamos a probar que $\lim_{\pi} f_\pi = g$ uniformemente. Sea U un entorno absolutamente convexo y cerrado de 0 en E. Por el teorema anterior y el lema de Zorn existe una partición contable $\pi_0 = (A_i)_{i\in I}$ en Σ de Ω tal que

$$\overline{\mathrm{co}}\,(g(A_i)) - \overline{\mathrm{co}}\,(g(A_i)) \subset U/2 \quad (i \in I)$$

si $A_i \in \Sigma^+$.

Entonces, para $t \in A_i \in \Sigma^+$ se tiene

$$f_{\pi_0}(t) - g(t) \in \mathrm{cor}_g(A_i) - g(A_i) \subset \overline{\mathrm{co}}\,(g(A_i)) - \overline{\mathrm{co}}\,(g(A_i)) \subset U/2$$

y

$$f_{\pi_0}(t) - g(t) = 0 \in U/2$$

cuando $\mu(A_i) = 0$ y $t \in A_i$.

Supongamos que $\Pi \geqslant \Pi_0$, $\pi = (B_j)_{j\in J} \in \Pi$ y

$$f_\pi = \sum_{j\in J_0} y_j \chi_{B_j} + \sum_{j\notin J_0} g \chi_{B_j}$$

Si $B_j \in \Sigma^+$, existe A_i tal que $B_j \subset A_i$. Como

$$y_j \in \mathrm{cor}_f(B_j) \subset \mathrm{cor}_f(A_i)$$

se tiene

$$f_\pi(t) - f_{\pi_0}(t) = y_j - x_i \in U/2$$

Si $\mu(B_j) = 0$ y $B_j \subset A_i \in \Sigma^+$, entonces

$$f_\pi(t) - f_{\pi_0}(t) = g(t) - f_{\pi_0}(t) \in U/2$$

Por último, si $B_j \subset A_i$ y $\mu(A_i) = 0$, se tiene

$$f_{\pi_0}(t) - f_\pi(t) = 0 \in U/2$$

Luego, para $\pi \geqslant \pi_0$, se verifica

$$g(t) - f_\pi(t) = g(t) - f_{\pi_0}(t) + f_{\pi_0}(t) - f_\pi(t) \in U/2 + U/2 = U$$

para todo $t \in \Omega$. Por tanto, g es el límite uniforme de la red $(f_\pi)_{\pi\in\Pi}$.

Las condiciones son suficientes. Sea $g = \lim_{\pi} f_\pi \cdot g$ es $\bar{\mu}$-medible por ser límite uniforme de una red de funciones μ-medibles. Vamos a probar que f es débilmente equivalente a g. Si estas funciones no fuesen débilmente equivalentes, existiría un $x' \in E'$ y un conjunto $A \in \Sigma^+$ tales que

$$x'f(t) > x'g(t)$$

para todo $t \in A$. Sustituyendo, si fuese necesario, A por un subconjunto de medida positiva se puede suponer

$$\inf x'f(A) > \sup x'g(A) + \varepsilon$$

para un cierto $\varepsilon > 0$.

Por ser x' continua, existe una seminorma continua p de E tal que $|x'| \leqslant \frac{\varepsilon p}{2}$. Sea

$$f_\pi = \sum_{i \in I} x_i \chi_{A_i}$$

en casi todo punto tal que

$$p(f_\pi - g) \leqslant 1$$

y

$$\operatorname{cor}_f(A_i) - \operatorname{cor}_f(A_i) \subset U \quad (i \leqslant I)$$

para todo $A_i \in \Sigma^+$, siendo $U = \{x \in E: p(x) \leqslant 1\}$.

Es obvio que existe A_i tal que $A \cap A_i \in \Sigma^+$. Sea $t \in A \cap A_i$ y $x \in \operatorname{cor}_f(A \cap A_i)$. Entonces

$$p(x - f_\pi(t)) = p(x - x_i) \leqslant 1$$

y

$$p(x - g(t)) \leqslant 2$$

y, por tanto,

$$\langle x, x' \rangle \leqslant x' \circ g(t) + \varepsilon$$

Como, por otra parte,

$$x' \circ g(t) \leqslant \sup x' \circ g(A)$$

y

$$\langle x, x' \rangle \geqslant \inf x' \circ f(A)$$

ya que $x \in \overline{\mathrm{co}}\,(f(A))$, resulta el absurdo

$$\inf x' \circ f(A) \leqslant \sup x' \circ g(A) + \varepsilon < \inf x' \circ f(A)$$

13. **Observación.** Cuando E es un espacio de Banach (o un espacio de Fréchet) se puede suprimir la condición 12.2. Véase Geitz [2], teorema 2.8.

BIBLIOGRAFIA

[1] DIESTEL, J., y UHL, J. J., JR. (1977): «Vector measures», *Math. Surveys*, n.º 15, *Amer. Math. Soc.*, Providence, R.I.

[2] GEITZ, R. (1982): «Geometry and the Pettis integral», *Trans. Amer. Math. Soc.*, *269*, 535-548.

[3] GILLIAM, D. (1977): «On integration and the Radon Nikodym Theorem in quasicomplete locally convex topological vector spaces», *J. Reine Angew. Math.*, *292*, 125-137.

[4] DE MARÍA, J. L. (1981): *Extensiones al teorema de Egorov.* Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid.

[5] PETTIS, B. J. (1938): «On integration in vector spaces», *Trans. Amer. Math. Soc.*, *44*, 277-304.

[6] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1979): «Integration de funciones con valores en un espacio localmente convexo», *Rev. R. Acad. Ci., Madrid, 73,* 361-387.

[7] RODRIGUEZ-SALINAS, B. (1983): «Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo respecto de medidas infinitas IV», *Rev. R. Acad. Ci., Madrid, 77,* 543-567.

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid