La propiedad de Radon-Nikodym, σ-dentabilidad y martingalas en espacios localmente convexos II

Por BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

Recibido: 2 marzo 1983

Abstract

C. Blondia has given notice to us that the proof of 14.6 $\Rightarrow$ 14.7 of [5] it's not valid because the set $D = [\mathrm{co}\,(B + U)]^0$ is not bounded when E is not a normed space. In this paper we prove that the essential of theorem 14 is valid. In particular, for the Radon-Nikodym property definided in [5], it results that a quasicomplete locally convex space E has R.N.P. iff every non void bounded subset $B \subset E$ is σ-dentable. Here we also prove that every semi-reflexive locally convex space has the R.N.P. and that very ω-precompact (or separable by seminorms) E', strong dual of infrabarrelled l.c.s. E, has the R.N.P. Last theorem coincides essentialy with theorem 5.1 of Blondia [2], where it's assumed that E' has the property (B), but the proof it's different.

C. Blondia nos ha hecho notar que la demostración de 14,6 $\Rightarrow$ 14.7 de [5] no es válida porque el conjunto $D = [\mathrm{co}\,(B + U)]^0$ no es acotado cuando E no es un espacio normado. No obstante, como vamos a probar en este trabajo, lo esencial del teorema 14 vale. En particular, para la propiedad de Radon-Nikodym definida en [5], resulta que un espacio localmente convexo casi completo E posee la P.R.N. si y sólo si todo acotado no vacío B de E es σ-dentable. En este trabajo vamos a probar también que todo e.l.c. semirreflexivo posee la P.R.N. y que todo e.l.c. ω-precompacto (o separable por seminormas) E', dual fuerte de un e.l.c. infratonelado E, posee la P.R.N. Este último teorema coincide esencialmente con el teorema 5.1 de Blondia [2], en el que se exige que E' tenga la propiedad (B), pero la demostración es diferente.

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finito que supondremos completo para asegurar la existencia de un *lifting* ρ sobre el álgebra $\mathscr{L}_K^\infty$ de las funciones reales o complejas medibles acotadas. Sea E un espacio localmente convexo, en abreviatura e.l.c., que supondremos siempre Hausdorf, y E'' el bidual dotado de la topología natural (véase Köthe [3], 300).

Sea $m\colon \Sigma \to E$ una medida vectorial y

$$A_S(m) = \left\{\frac{m(A)}{\mu(A)} : S \supset A \subset \Sigma\right\}$$

para $S \in \Sigma^+$, siendo

$$\Sigma^+ = \{A \in \Sigma : \mu(A) > 0\}.$$

Utilizaremos las notaciones de [5].

1. **Teorema.** *Sea E un e.l.c. casi completo, $m: \Sigma \to \Sigma$ una medida μ-continua y U un entorno absolutamente convexo y cerrado de 0 en E. Entonces cada una de las siguientes condiciones implica la siguiente:*

1.1. *Para todo U y para todo $S \in \Sigma^+$ existe $T \in \Sigma^+$ tal que $T \subset S$ y $A_T(m)$ es σ-dentable.*

1.2. *Para todo U y para todo $S \in \Sigma^+$ existe $T \in \Sigma^+$ y $x \in E$ tales que $T \subset S$ y*

$$A_T(m) \subset x + U.$$

1.3. *Si f es una función $(m.\,\mu)$ encajada* (definición 4 de [5]), *se tiene*

$$f \in \bar{\mathscr{L}}(\Sigma, \mu, E) \quad \text{y} \quad m = m_f,$$

donde $\bar{\mathscr{L}}(\Sigma, \mu, E)$ es el conjunto de funciones $f: \Omega \to E$ $\bar{\mu}$-integrables o integrables Grothendieck (véase [4], [5] y [6]) *y*

$$m_f(A) = \int_A f\, d\mu \quad (A \in \Sigma).$$

Demostración. 1.1. $\Rightarrow$ 1.2 Supongamos que existe un entorno absolutamente convexo y cerrado U de 0 en E y un $S \in \Sigma^+$, tales que para todo $T \in \Sigma_{S_0}^+ = \{T \in \Sigma^+ : T \subset S\}$ y $x \in E$ se verifica

$$A_T(m) \not\subset x + U$$

Entonces, para cada $S_0 \in \Sigma^+$ y $x = m(S_0)/\mu(S_0)$, se deduce aplicando el axioma de Zorn que existiría una partición contable (S_n) de S_0 en conjuntos $S_n \in \Sigma_{S_0}^+$ tales que

$$\frac{m(S_n)}{\mu(S_n)} \notin x + U$$

y, por tanto,

$$x = \frac{m(S_0)}{\mu(S_0)} = \sum_n \frac{\mu(S_n)}{\mu(S_0)} \frac{m(S_n)}{\mu(S_n)} \in \sigma(A_S(m) \setminus (x + U))$$

para cada $x \in A_S(m)$ y, por tanto, $A_S(m)$ no sería σ-dentable.

1.2 $\Rightarrow$ 1.3. Basta proceder como para 6.5 $\Rightarrow$ 6.6 en [5].

El teorema 14 de [5] debe ser sustituido por el siguiente teorema.

2. **Teorema.** *Sea E un e.l.c. casi completo. Entonces son equivalentes.*

2.1. *E posee la propiedad de Radon-Nikodym, en abreviatura P.R.N., según la definición* 10 *de* [5].

2.2. *Toda martingala $(f_i, \Sigma_i)_{i \in I}$ en $\bar{\mathscr{L}}(\Sigma, \mu, E)$, tal que las funciones f_i están uniformemente acotadas, es una red de Cauchy en $\bar{\mathscr{L}}^1(\Sigma, \mu, E)$.*

2.3. *Toda martingala $(f_n, \Sigma_n)_{n \in N}$ en $\bar{\mathscr{L}}(\Sigma, \mu, E)$, tal que las funciones f_n están uniformemente acotadas, es una sucesión de Cauchy en $\bar{\mathscr{L}}^1(\Sigma, \mu, E)$.*

2.4. *Todo acotado contable no vacío $B \subset E$ es σ-dentable.*

2.5. *Todo acotado no vacío $B \subset E$ es σ-dentable.*

Demostración. 2.1 $\Rightarrow$ 2.2. Basta proceder como para 14.1 $\Rightarrow$ 14.2 en [5]. 2.2 $\Rightarrow$ 2.3. Basta proceder como para 14.2 $\Rightarrow$ 14.3 en [5]. 2.3 $\Rightarrow$ 2.4. Basta proceder como para 14.3 $\Rightarrow$ 14.4 en [5]. 2.4 $\Rightarrow$ 2.5. Basta proceder como para 14.5 $\Rightarrow$ 14.6 en [5]. 2.5 $\Rightarrow$ 2.1. Sea $m: \Sigma \to E$ una medida controlada por μ, e.d., μ-continua y tal que $A_\Omega(m)$ es acotado. Entonces, procediendo como en 14.7 $\Rightarrow$ 14.1 de [5], resulta que existe una función $f: \Omega \to E''$ tal que

$$f(t) \in \overline{\mathrm{co}}^* A_S(m)$$

para todo $t \in S \cap \rho(S)$ y todo $S \in \Sigma^+$, siendo $\overline{\mathrm{co}}^* A_S(m)$ la envoltura convexa y (E'', E')-cerrada de $A_S(m)$ en E''. Luego $f: \Omega \to E''$ es una función acotada (m, μ)-encajada.

Por otra parte, como 2.5 $\Rightarrow$ 1.2 $\Rightarrow$ 1.3, se deduce que $f \in \bar{\mathscr{L}}(\Sigma, \mu, E'')$ y $m = m_f$ y, por tanto, 2.1.

Como vamos a ver a continuación, las demás proposiciones de [5] son válidas.

3. **Corolario.** *Si E es un e.l.c. casi completo son equivalentes.*

3.1. *E posee la P.R.N.*

3.2. *Todo subespacio F de E con un sistema fundamental de entornos de* 0 *cerrados en E posee la P.R.N.*

3.3. *Todo subespacio cerrado y separable F de E posee la P.R.N.*

Demostración. Este corolario mejora el corolario 15 de [5]. 3.1 $\Rightarrow$ 3.2. Basta proceder como en 15.1 $\Rightarrow$ 15.2 de [5]. 3.2 $\Rightarrow$ 3.3. Evidente. 3.3 $\Rightarrow$ 3.1. Por el teorema 2 basta demostrar que para todo subconjunto acotado contable y no vacío $B \subset E$ vale 2.4. Si F es el subespacio vectorial cerrado de E, engendrado por B, F es separable y B es acotado en F, luego verifica 2.4 en F y, por consiguiente, en E.

Para demostrar que todo e.l.c. semirreflexivo posee la propiedad de Radon-Nikodym, vamos a completar el teorema 6 de [5] así.

4. **Teorema.** *Sea E un e.l.c. casi completo, $m: \Sigma \to E$ una medida controlada por μ, U un entorno absolutamente convexo y cerrado de 0 en E, y π_U la aplicación canónica $E \to E_U$. Entonces cada una de las siguientes condiciones implica la siguiente:*

4.1. *Para todo $S \in \Sigma^+$ existe $T \in \Sigma^+$ tal que $T \subset S$ y $A_T(m)$ es relativamente compacto.*

4.2. *Para todo $S \in \Sigma^+$ existe $T \in \Sigma^+$ tal que $T \subset S$ y $A_T(m)$ es débilmente relativamente compacto.*

4.3. *Para todo U y para todo $S \in \Sigma^+$ existe $T \in \Sigma^+$ tal que $T \subset S$ y*

$$\pi_U \circ A_T(m) = A_T(\pi_U \circ m)$$

es dentable.

4.4. *Para todo U y para todo $S \in \Sigma^+$ existe $T \in \Sigma^+$ y $x \in E$ tales que $T \subset S$, y*

$$\pi_U \circ A_T(m) = A_T(\pi_U \circ m)$$

es σ-dentable.

4.5. *Para todo U y para todo $S \in \Sigma^+$ existe $T \in \Sigma^+$ y $x \in E$ tales que $T \subset S$ y*

$$A_T(m) \subset x + U.$$

4.6. *Existe una función acotada* $f \in \bar{\mathscr{L}}(\Sigma, \mu, E'')$ *tal que* $m = m_f$.

Demostración. Para probar 4.1 $\Rightarrow$ 4.2 $\Rightarrow$ 4.3 $\Rightarrow$ 4.4 $\Rightarrow$ 4.5 basta proceder como para 6.1 $\Rightarrow$ 6.2 $\Rightarrow$ 6.3 $\Rightarrow$ 6.4 $\Rightarrow$ 6.5 en [5].

4.5 $\Rightarrow$ 4.6. Procediendo como en 14.7 $\Rightarrow$ 14.1 de [5] resulta que existe una función acotada $f: \Omega \to E''$ (m, μ) encajada. Entonces, como 4.5 $\Rightarrow$ 6.6 de [5], se deduce que $f \in \bar{\mathscr{L}}(\Sigma, \mu, E'')$ y $m = m_f$.

5. **Corolario.** *Todo e.l.c. semirreflexivo E posee la P.R.N.*

Demostración. Basta tener en cuenta que todo acotado de un espacio semirreflexivo es débilmente relativamente compacto. Este corolario resulta también inmediatamente del lema 18 de [4].

6. **Corolario.** *Sea E un e.l.c. casi completo, U un entorno absolutamente convexo y cerrado de 0 en E y* π_U *la aplicación canónica* $E \to E_U$. *Entonces cada una de las siguientes condiciones implica la siguiente:*

6.1. *Para todo acotado no vacío* $B \subset E$ *y todo U, se tiene que* $\pi_U(B)$ *es dentable.*

6.2. *Para todo acotado no vacío* $B \subset E$ *y todo U, se tiene que* $\pi_U(B)$ *es* σ*-dentable.*

6.3. *E posee la P.R.N.*

6.4. *Todo acotado no vacío* $B \subset E$ *es* σ*-dentable.*

Demostración. 6.1 $\Rightarrow$ 6.2. Evidente. 6.2 $\Rightarrow$ 6.3. Resulta de 4.4 $\Rightarrow$ 4.6. 6.3.$\Leftrightarrow$ 6.4. Resulta del teorema 2.

Utilizando los teoremas 1 y 2 en lugar de los teoremas 6 y 14 se puede probar el teorema 17 de [5].

Por su importancia volvemos a enunciar el teorema 18 de [5].

7. **Teorema.** *Sea E un e.l.c. casi completo con la P.R.N. y* $m: \Sigma \to E$ *una medida vectorial* μ*-continua. Entonces, si m está localmente controlada por* μ, *e.d., si para todo* $S \in \Sigma^+$ *existe* $T \in \Sigma_S^+$ *tal que* $A_T(m)$ *es acotado, existe* $f \in \bar{\mathscr{L}}(\Sigma, \mu, E'')$ *tal que* $m = m_f$ *y* $\rho[f] = f$.

Demostración. Basta proceder como en el teorema 18 de [5], pero utilizando la demostración de 2.5 $\Rightarrow$ 2.1 en lugar de la demostración 14.7 $\Rightarrow$ 14.1.

8. **Definición.** Un subconjunto A de un e.l.c. E se dice *ω-precompacto* si, para todo entorno U de 0 en E, existe un subconjunto contable M de E tal que

$$A \subset M + U$$

9. **Teorema.** *Todo e.l.c.* ω*-precompacto E', dual duerte de un e.l.c. infratonelado E, posee la P.R.N.*

Demostración. Procederemos de forma análoga que Blondia en el teorema 5.1 de [2], pero con variantes importantes. Sea $m: \Sigma \to E'$ una medida controlada por μ. Como $A_\Omega(m)$ es un conjunto equicontinuo por ser E infratonelado, $A_\Omega(m)$ es relativamente compacto para la topología $\sigma(E', E)$. Entonces, por el lema 3 de [4] existe una función acotada $f: \Omega \to E'$ tal que:

1. $f(\Omega) \subset \overline{\text{co}}^* A_\Omega(m)$.
2. $\langle x, f \rangle$ es medible para cada $x \in E$.

3. $\langle x, m(A)\rangle = \int_A \langle x, f\rangle \, d\mu$ para cada $x \in E$ y $A \in \Sigma$.

Vamos a demostrar que f es $\bar{\mu}$-medible. Como E' es ω-precompacto, es suficiente probar, según la proposición 12 de [6] I, que para todo conjunto acotado $B = B^{00} \subset E$ y $x' \in E'$, $p_B \circ (f - x')$ es medible. (Véase teorema 2.2 de [1] o teorema 3.6 de [7].) En efecto, como E' es ω-precompacto, existe una subsucesión (x_n) densa en B. Entonces, como evidentemente

$$p_B \circ (f - x') = \sup_n |\langle x_n, f - x'\rangle|$$

es medible, f es $\bar{\mu}$-medible.

Siendo f $\bar{\mu}$-medible, para cada conjunto acotado $B = B^{00} \subset E$, existe una función μ-medible

$$f_B = \sum_i^{\infty} y_i \chi_A + f\chi_Z$$

con los $y_i \in f(\Omega)$, los $A_i \in \Sigma^+$ disjuntos, $Z = \Omega \setminus \bigcup_1^{\infty} A_i$ y $\mu(Z) = 0$, tal que

$$p_B \circ (f_B - f) \leqslant 1.$$

Cada función f_B es μ-integrable puesto que $f(\Omega)$ es acotado y E' casi completo, y

$$\int_A f_B \, d\mu = \sum_1^{\infty} y_i \mu(A_i \cap A) \in \mu(A) \overline{\text{co}}\, f(\Omega).$$

Por tanto, como $\overline{\text{co}}\, f(\Omega)$ es completo y $\left(\int_A f_B \, d\mu\right)_B$ es una red de Cauchy, existe

$$\lim_B \int_A f_B \, d\mu \left(= \int_A f \, d\mu \right)$$

en E', y f es $\bar{\mu}$-integrable. (Esta parte resulta también del teorema 2.10 de [1] y del teorema 10 de [4].)

Como además,

$$\langle x, m(A)\rangle = \int_A \langle x, f\rangle \, d\mu = \lim_B \int_A \langle x, f_B\rangle \, d\mu = \langle x, \int_A f d\mu\rangle$$

para todo $x \in E$ y $A \in \Sigma$, resulta

$$m(A) = \int_A f \, d\mu \quad (A \in \Sigma).$$

En este caso, como hemos visto, se puede tomar la función acotada $f \in \bar{\mathscr{L}}(\Sigma, \mu, E')$

en lugar de $f \in \bar{\mathscr{L}}(\Sigma, \mu, E''')$. Respecto a esto, recordamos que, según el corolario 12 de [4], si E es un e.l.c. casi completo que posee la P.R.N. y

$$\bar{\mathscr{L}}^1(\Sigma, \mu, E) \cap \bar{\mathscr{L}}^\infty(\Sigma, \mu, E)$$

es casi completo para la topología inducida por $\bar{\mathscr{L}}^1(\Sigma, \mu, E)$ y la bornología inducida por $\bar{\mathscr{L}}^\infty(\Sigma, \mu, E)$, dada una medida $m: \Sigma \to E$ controlada por μ, existe una función acotada $f \in \bar{\mathscr{L}}(\Sigma, \mu, E)$ tal que $m = m_f$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BLONDIA, C. (1981): *Integration in locally convex spaces*, Simon Stevin, *55*, 81-102.

[2] BLONDIA, C.: *Locally convex spaces with the Radon-Nikodym Property.* (En curso de publicación.)

[3] KÖTHE, G. (1969): *Topological Vector Spaces I*, Springer, Nueva York.

[4] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1980): «El teorema de Radon-Nikodym para las medidas con valores en un espacio localmente convexo», *Rev. R. Acad. Ci., Madrid, 74*, 41-64.

[5] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1980): «La propiedad de Radon-Nikodym, σ-dentabilidad y martingalas en espacios localmente convexos», *Rev. R. Acad. Ci., Madrid, 74*, 65-89.

[6] RODRIGUEZ-SALINAS, B. (1983): «Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo respecto de medidas infinitas I-IV», *Rev. R. Acad. Ci., Madrid, 77*, 49-78, 529-567.

[7] SION, M. (1973): «A theory of semigroup Valued Measures», *Lect. Notes in Math.*, n.° 355, Springer, Berlín.

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid