Distribuciones binomiales y de Bernoulli de probabilidad aleatoria. Teoremas del límite central

Por DARÍO MARAVALL CASESNOVES

Recibido: 4 mayo 1983

Conclusiones

De la lectura de los títulos de los parágrafos se deducen las investigaciones realizadas, que abren un campo en el Cálculo de Probabilidades y Procesos Estocásticos. El desarrollo ampliado de esta memoria nos hubiera llevado a escribir una monografía. Tiene aplicaciones a los juegos de estrategia, autómatas, probabilidades geométricas y geometría integral, genética de poblaciones (véase H en la bibliografía), cadenas de Markov con vectores iniciales de probabilidad aleatorios y física estadística.

Summary

It is presented a complete investigation of the direct and invers stochastic processes of the sum of Bernoulli and binomial variables when the success event probability is random. An important number of central limite and convergence in probability theorems are obtained. Which are of application to automatic theory, strategic games, geometric probabilities and physical phenomena.

1. LA DISTRIBUCION DE BERNOULLI CUANDO LA PROBABILIDAD ES UNA VARIABLE ALEATORIA

Si tenemos una urna que contiene un conjunto de monedas defectuosas, tales que al escoger al azar una de ellas la probabilidad de que salga cara al arrojarla no valga 1/2, sino que sea una variable aleatoria (v.a.) ξ, se tiene que si se escoge una moneda cualquiera de la urna al azar y se arroja m veces la f.c. (función característica) del número de veces μ que sale cara es

$$\varphi(z) = \overline{[\xi(e^{iz} - 1) + 1]^m} \qquad [1]$$

donde la raya horizontal superior indica valor medio.

Si por el contrario escogemos al azar una moneda y la arrojamos, después volvemos a introducir la moneda en la urna, volvemos a sacar otra moneda al azar, la arrojamos al aire, y repetimos las operaciones anteriores m veces, entonces la f.c. del número de veces que sale cara es

$$\chi(z) = [\bar{\xi}(e^{iz} - 1) + 1]^m \qquad [2]$$

que es una distribución de Bernoulli de probabilidad favorable al suceso (salir cara) igual al valor medio $\bar{\xi}$ de la v.a. ξ. Existe una gran diferencia entre los dos anteriores mecanismos de actuación del azar antes diseñados.

Si en [1] derivamos respecto a z, se obtiene:

$$\varphi'(z) = \overline{mi\xi e^{iz}(\xi(e^{iz} - 1) + 1)^{m-1}} \qquad [3]$$

y haciendo $z = 0$, se obtiene el valor medio del número de veces que sale cara:

$$\bar{\mu} = m\bar{\xi} \qquad [4]$$

Si en [1] derivamos dos veces respecto a z, se obtiene

$$\varphi''(z) = \overline{-m\xi e^{iz}(\xi(e^{iz} - 1) + 1)^{m-1} - \xi^2 m(m - 1)e^{iz}(\xi(e^{iz} - 1) + 1)^{m-2}} \qquad [5]$$

y haciendo $z = 0$, resulta para el momento de segundo orden, el valor:

$$\overline{\mu^2} = m\bar{\xi} + m(m - 1)\overline{\xi^2} \qquad [6]$$

y para la varianza:

$$\sigma^2 = m(\bar{\xi} - \overline{\xi^2}) + m^2(\overline{\xi^2}) + m^2(\overline{\xi^2} - (\bar{\xi})^2) = \bar{\mu}^2 - (\bar{\mu})^2 \qquad [7]$$

la cual, para ξ igual a una variable cierta, coincide con el resultado de la distribución ordinaria de Bernoulli.

Volviendo a la f.c. [1], las probabilidades p_i de que el número de veces que salga cara sea i $(0 \leqslant i \leqslant m)$, son los coeficientes de las potencias de e^{iz} en el desarrollo de [1]. Se tiene que

$$p_i = \binom{m}{i} \overline{\xi^i(1 - \xi)^{m-i}} = \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{m-i} (-1)^j \binom{m - i}{j} \overline{\xi^{i+j}} \qquad [8]$$

Si ξ es una v.a. absolutamente continua, cuya función de frecuencia (f.f.) es

$$f(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad ; \quad 0,\ x < 0,\ x > 1 \qquad [9]$$

la [1] se escribe:

$$\varphi(z) = \int_0^1 (x(e^{iz} - 1) + 1)^m f(x)\, dx \qquad [10]$$

Suponganos, por ejemplo, que ξ sea una variable repartida uniformemente al azar sobre el intervalo [0, 1], entonces es

$$\overline{\xi^i} = \int_0^1 x^i\, dx = \frac{1}{i + 1} \qquad [11]$$

valores que sustituidos en [4], [7] y [8] dan los valores del valor medio, de la varianza y de las probabilidades p_i. Se pueden obtener fórmulas de combinatoria a partir de este resultado, teniendo en cuenta la normalización de las probabilidades p_i, se obtiene

$$\sum_{i=0}^{m} p_i = 1 = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{i + j + 1} \binom{m - i}{j} = 1 \qquad [12]$$

y

$$\sum_{i=0}^{m} i \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{m-i} \frac{(-1)^j}{i+j+1} \binom{m-i}{j} = \frac{m}{2}$$
$$\sum_{i=0}^{m} i^2 \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{m-i} \frac{(-1)^j}{i+j+1} \binom{m-i}{j} = \frac{m}{6} + \frac{m^2}{3} \qquad [13]$$

donde los segundos miembros son los valores medio y momento de segundo orden [4] y [6], habida cuenta de la [11].

2. CASO DE LAS DISTRIBUCIONES MULTINOMIALES

Los resultados del apartado anterior se generalizan al caso de una distribución multinomial. Por ejemplo, en el caso de una distribución trinomial la f.c. en vez de [1] es la

$$\varphi(z_1, z_2) = \overline{(\xi_1 e^{iz_1} + \xi_2 e^{iz_2} + 1 - \xi_1 - \xi_2)^m} \qquad [14]$$

y para los valores medios y las varianzas se obtienen los mismos valores que en el apartado 14.1, mientras que para la covarianza se obtiene el valor

$$m(m-1)\overline{\xi_1 \xi_2} - m^2 \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \qquad [15]$$

por ser

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1\, \partial z_2}\right)_{z_1=0,\, z_2=0} = -m(m-1)\overline{\xi_1 \xi_2} \qquad [16]$$

Las v.a. ξ_1 y ξ_2 no pueden ser cualesquiera, sino que han de estar sometidas a las condiciones

$$0 < \xi_1,\ \xi_2 < 1 \quad ; \quad 0 < \xi_1 + \xi_2 < 1 \qquad [17]$$

pero pueden ser independientes o correlacionadas. Si son independientes, la [15] se simplifica en la

$$-m\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \qquad [18]$$

Si ξ_1 y ξ_2 son absolutamente continuas y $f(x_1, x_2)$ es su f.f la [14] se escribe:

$$\varphi(z_1, z_2) = \int_0^1 \int_0^1 [1 + x_1(e^{iz_1} - 1) + x_2(e^{iz_2} - 1)]^m f(x_1, x_2) dx_1\, dx_2 \qquad [19]$$

Si la distribución es multinomial en vez de trinomial, los valores medios y las varianzas de las $\mu_1, ..., \mu_n$ tienen los mismos valores que en el apartado 14.1 y las covarianzas los mismos valores [15].

3. TEOREMAS DEL LIMITE CENTRAL PARA DISTRIBUCIONES DE BERNOULLI DE PROBABILIDAD ALEATORIA

Si en la fórmula [1] dividimos z por m y hacemos tender m a infinito, en el límite obtenemos:

$$\lim_{m\to\infty} \overline{[\xi(e^{iz/m} - 1) + 1) + 1]^m} = \lim_{m\to\infty} \overline{\left(1 + \frac{\xi iz}{m}\right)^m} = \overline{e^{i\xi z}} = \psi(z) \qquad [20]$$

siendo $\psi(z)$ la f.c. de la v.a. ξ. El significado empírico de esta operación matemática es el siguiente: se escoge al azar una moneda de la urna descrita en el párrafo 14.1, se arroja un número m de veces al aire y se calcula la frecuencia relativa del suceso «salir cara» (cociente de dividir el número de veces que sale cara por m), cuando m tiende a infinito, dicha frecuencia relativa converge en probabilidad a la v.a. ξ. Si la anterior operación se realizara con la [2], la frecuencia relativa convergería en probabilidad al valor medio $\bar{\xi}$.

Este resultado [20] se puede obtener directamente a partir de [10], es:

$$\lim_{m\to\infty} \varphi\left(\frac{z}{m}\right) = \lim_{m\to\infty} \int_0^1 [1 + x(e^{iz/m} - 1)]^m f(x)\, dx =$$

$$= \int_0^1 \left(1 + \frac{xiz}{m}\right)^m f(x)\, dx = \int_0^1 e^{izx} f(x)\, dx = \psi(z) \qquad [21]$$

El teorema anterior es el de la convergencia en probabilidad a la v.a. ξ, de la media aritmética para las distribuciones de Bernoulli de probabilidad aleatoria.

Vamos a obtener ahora el teorema del límite central para las distribuciones de Bernoulli de probabilidad aleatoria.

En las distribuciones ordinarias de Bernoulli son equivalentes las dos operaciones siguientes: *a*) se arroja m veces al aire una moneda y se calcula el cociente de dividir por $\sqrt{m}$ la diferencia entre el número de veces que sale cara y $m/2$; *b*) se arrojan dos monedas m veces al aire cada una y se divide por $\sqrt{2m}$ la diferencia entre el número de veces que sale cara con una y otra moneda. En ambos casos cuando m tiende a infinito se obtiene una v.a. que converge en probabilidad a una v.a. gaussiana (normal) de valor medio nulo y varianza 1/4.

Es la segunda operación la que vamos a extender al caso de las monedas defectuosas del apartado 14.1, para obtener el teorema del límite central válido para este caso, y distinto del ordinario. Se arroja $2m$ veces al aire una moneda escogida al azar de la urna del apartado 14.1, y se calcula el cociente de dividir por $\sqrt{m}$ la diferencia entre el número de veces que sale cara en las m primeras tiradas de la moneda y en la m últimas tiradas, entonces cuando m tiende a infinito, esta v.a. converge en probabilidad a una v.a. no gaussiana de valor medio nulo, varianza:

$$\sigma^2 = 2(\bar{\xi} - \bar{\xi^2}) \qquad [22]$$

y f.c. [24].

En efecto, la f.c. de los números de veces que sale cara en las m primeras tiradas y en las m últimas por [1] es:

$$\varphi(z_1, z_2) = \overline{[\xi(e^{iz_1} - 1) + 1]^m[\xi(e^{iz_2} - 1) + 1]^m} \qquad [23]$$

y de aquí la f.c. de la diferencia entre ambos números aleatorios dividido por $\sqrt{m}$, ciando m tiende a infinito, es:

$$\lim_{m\to\infty} \varphi\left(\frac{z}{\sqrt{m}}, \frac{-z}{\sqrt{m}}\right) = \overline{[\xi(e^{iz/\sqrt{m}} - 1) + 1]^m[\xi(e^{-iz/\sqrt{m}} - 1) + 1]^m} =$$

$$= \overline{\left(\frac{\xi iz}{\sqrt{m}} - \frac{\xi z^2}{2m} + 1\right)^m \left(-\frac{\xi iz}{\sqrt{m}} - \frac{\xi z^2}{2m} + 1\right)^m} =$$

$$= \overline{\left(1 - \frac{\xi z^2}{m} + \frac{\xi^2 z^2}{m}\right)^m} = \overline{e^{-(\xi - \xi^2)z^2}} \qquad [24]$$

En el caso en que la v.a. ξ tiene la f.f. ($f(x)$, se obtiene este resultado también., a partir de la [10], porque es:

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^1 [1 + x(e^{iz/\sqrt{m}} - 1)]^m[1 + x(e^{-iz/\sqrt{m}} - 1)]^m f(x)\, dx =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_0^1 \left[\left(1 + \frac{xiz}{\sqrt{m}} - \frac{xz^2}{2m}\right)\left(1 - \frac{izx}{\sqrt{m}} - \frac{xz^2}{2m}\right)\right]^m f(x)\, dx =$$

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{xz^2}{m} + \frac{x^2 z^2}{m}\right)^m f(x)\, dx = \int_0^1 e^{-z^2(x - x^2)} f(x)\, dx \qquad [25]$$

Si ξ no es una v.a., si no es una variable cierta, el anterior teorema del límite central coincide con el ordinario.

4. TEOREMAS DEL LIMITE CENTRAL PARA DISTRIBUCIONES MULTINOMIALES DE PROBABILIDAD ALEATORIA

Los resultados del apartado 14.3 se extienden al caso de distribuciones multinomiales de probabilidad aleatoria. En el caso de la distribución trinomial de f.c. [14], la fórmula [24] consiste en hallar el límite cuando m tiende a infinito del valor medio del producto de las dos expresiones:

$$\begin{matrix} [\xi_1(e^{iz_1/\sqrt{m}} - 1) + \xi_2(e^{iz_2/\sqrt{m}} - 1) + 1]^m \\ [\xi_1(e^{-iz_1/\sqrt{m}} - 1) + \xi_2(e^{-iz_2/\sqrt{m}} - 1) + 1]^m \end{matrix} \qquad [26]$$

o lo que es lo mismo de las dos expresiones:

$$\left(\frac{\xi_1 i z_1}{\sqrt{m}} - \frac{\xi_1 z_1^2}{2m} + \frac{\xi_2 i z_2}{\sqrt{m}} - \frac{\xi_2 z_2^2}{m} + 1\right)^m$$

$$\left(-\frac{\xi_1 i z_1}{\sqrt{m}} - \frac{\xi_1 z_1^2}{2m} - \frac{\xi_2 i z_2}{\sqrt{m}} - \frac{\xi_2 z^2}{m} + 1\right)^m$$

lo que da origen a la f.c.:

$$\overline{e^{-z_1^2(\xi_1 - \xi_1^2) + 2z_1 z_2 \xi_1 \xi_2 - z_2^2(\xi_2 - \xi_2^2)}} \qquad [28]$$

que si existe la f.f. [19], se escribe la anterior f.c. en la forma:

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{-z_1^2(x_1 - x_1^2) + 2z_1 z_2 x_1 x_2 - z_2^2(x_2 - x_2^2)} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \qquad [29]$$

El coeficiente de correlación r es negativo y vale:

$$r = \frac{-\overline{\xi_1 \xi_2}}{\sqrt{(\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_1^2)(\bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_2^2)}} \qquad [30]$$

y es fácil ver que siempre es menor que la unidad, porque por [17]:

$$\xi_1(1 - \xi_1) > \xi_1 \xi_2 \quad ; \quad \xi_2(1 - \xi_2) > \xi_2 \xi_1 \qquad [31]$$

Obsérvese que el coeficiente de correlación es siempre negativo tanto en el caso asintótico como si ξ_1 y ξ_2 son independientes, por ser entonces la covarianza [18] negativa, mientras que si no lo son, al ser [15] la covarianza pudiera ser positiva, y entonces también el coeficiente de correlación positivo.

Si la distribución es multinomial en vez de trinomial, el resultado y el método de obtenerlo es el mismo. La f.c. es

$$\overline{e^{-\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_i^2) z_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} \xi_i \xi_j z_i z_j}} \qquad [32]$$

5. ADICION DE v.a. BINOMIALES DE PROBABILIDAD ALEATORIA DE LA MISMA LEY DE PROBABILIDAD E INDEPENDIENTES

Si el número de v.a. binomiales que se suman es n, la función generatriz (f.g.) de la v.a. suma es

$$p_0 + p_1 z + \cdots + p_m z^m + \cdots + p_n z^n = \overline{(1 + \xi_1(z - 1)) \cdots (1 + \xi_n(z - 1))} \quad [33]$$

que coincide con la [2].

Si llamamos $\mu_1, ..., \mu_n$ a las v.a. binomiales que se suman, la probabilidad p_m de que su suma μ valga m es

$$p_m = \binom{n}{m}(\bar{\xi})^m(1 - \bar{\xi})^{n-m} \quad ; \quad \bar{\xi}_1 = \cdots = \bar{\xi}_n = \bar{\xi} \qquad [34]$$

y para la distribución conjunta de μ y de las ξ_i (cuyos valores numéricos designamos por x_i) es

$$p(x_1) \cdots p(x_n) p(m \mid x_1, ..., x_n) = p_m p(x_1, ..., x_n \mid m) \qquad [35]$$

donde la raya inclinada indica probabilidad condicional.

La f.g. de la probabilidad condicional de μ respecto a las ξ_i es

$$\sum_{m=0}^{n} p(m \mid x_1, ..., x_n) z^m = \prod_{i=1}^{n} \{1 + x_i(z - 1)) \qquad [36]$$

de modo que $p(m/x_1, ..., x_n)$ es el coeficiente de la potencia m-ésima de z en el desarrollo [36]. De [35] se sigue que

$$p(x_1, ..., x_n/m) = \frac{p(x_1) \cdots p(x_n) p(m/x_1, ..., x_n)}{p_m} \qquad [37]$$

que permite calcular el primer miembro, probabilidad condicional de las ξ_i respecto a la μ.

En el caso en que las ξ_i son v.a. absolutamente continuas, existen las f.f. de las x_i y en las fórmulas anteriores se puede hacer la sustitución:

$$p(x_i) \rightarrow f(x_i) \qquad [38]$$

y así, por ejemplo, la [37] se escribe como una f.f.:

$$f(x_1, ..., x_n/m) = \frac{p(m/x_1, ..., x_n) f(x_1) \cdots f(x_n)}{p_m} \qquad [39]$$

De esta forma se pueden resolver los problemas de probabilidades conjuntas, marginales y condicionales de la adición de v.a. binomiales de probabilidad aleatoria, cuando éstas son v.a. independientes y de la misma ley de probabilidad.

Si las ξ_i son v.a. correlacionadas de f.f. $f(x_1, ..., x_n)$ la probabilidad de que k de estas ξ_i estén comprendidas entre a y b, tiene por f.g. la integral simbólica:

$$\prod_{i=1}^{n} \left((z - 1) \int_a^b dx_i + \int_0^1 dx_i\right) f(x_1, ..., x_n) \qquad [40]$$

que cuando las ξ_i son v.a. independientes es:

$$f(x_1, ..., x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \qquad [41]$$

y la [40] simplifica en la

$$\prod_{i=1}^{n}\left((z-1)\int_a^b f_i(x_i)\,dx_i+1\right) \qquad [42]$$

6. DISTRIBUCUION CONJUNTA Y TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL PARA v.a. BINOMIALES DE PROBABILIDAD ALEATORIA Y DE BERNOULLI

La f.c. de la distribución conjunta (z corresponde a μ, v a ξ) es para la v.a. binomial

$$\psi(z,v)=\overline{\{1+\xi(e^{iz}-1))e^{i\xi v}} \qquad [43]$$

y si suponemos que ξ tiene f.f. igual a $f(x)$, la anterior se escribe:

$$\psi(z,v)=\int_0^1 (1+x(e^{iz}-1))e^{ixv}f(x)\,dx \qquad [44]$$

Si llamamos $\varphi(v)$ a la f.c. de ξ:

$$\varphi(v)=\int_0^1 e^{ixv}f(x)\,dx \qquad [45]$$

la [44] puede escribirse:

$$\psi(z,v)=\varphi(v)-i\varphi'(v)(e^{iz}-1) \qquad [46]$$

Se tiene que

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_0=\varphi'(0)=\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_0=i\bar{\xi}=i\bar{\mu} \qquad [47^*]$$

y

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)_0=\varphi''(0)=-\overline{\xi^2} \quad ; \quad \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial v}\right)_0=\varphi''(0)=-\overline{\xi^2}=-\overline{\xi\mu}$$

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)_0=i\varphi'(0)=-\bar{\xi}=-\overline{\mu^2} \qquad [48]$$

Por tanto, las varianzas, covarianza y coeficiente de correlación r valen

$$\sigma_\xi^2=\overline{\xi^2}-(\bar{\xi})^2 \quad ; \quad \sigma_\mu^2=\bar{\xi}-(\bar{\xi})^2 \quad ; \quad \overline{\xi\mu}-\bar{\xi}\bar{\mu}=\overline{\xi^2}-(\bar{\xi})^2=\sigma_\xi^2 \quad ; \quad r=\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\mu} \qquad [49]$$

* El subíndice cero indica $z=0$, $v=0$.

En el caso de la distribución de Bernoulli de probabilidad aleatoria, que por lo visto en los apartados anteriores no coincide con la adición de v.a. binomiales de probabilidad aleatoria, se tiene:

$$\psi(z, v) = \int_0^1 [1 + x(e^{iz} - 1)]^n f(x) e^{ixv}\, dx \qquad [50]$$

y de aquí:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_0 = \varphi'(0) = i\bar{\xi} \quad ; \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_0 = n\bar{\xi}i = i\bar{\mu} \quad ; \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial v^2}\right)_0 = -\overline{\xi^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial v\,\partial z}\right)_0 = -n\overline{\xi^2} = -\overline{\xi\mu} \quad ; \quad \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)_0 = -n\bar{\xi} - n(n-1)\overline{\xi^2} = -\overline{\mu^2} \qquad [51]$$

y para las varianzas, covarianza y coeficiente de correlación r:

$$\sigma_\xi^2 = \overline{\xi^2} - (\bar{\xi})^2 \quad ; \quad \sigma_\mu^2 = n^2(\overline{\xi^2} - (\bar{\xi})^2) + n(\bar{\xi} - \overline{\xi^2})$$

$$\overline{\xi\mu} - \bar{\xi}\bar{\mu} = n\sigma_\xi^2 \quad ; \quad r = n\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\mu} \qquad [52]$$

La f.c. de la media aritmética de la suma de n v.a. binomiales μ_i y de las n probabilidades aleatorias ξ_i por [46] es

$$\left[\varphi\left(\frac{v}{n}\right) - i\varphi'\left(\frac{v}{n}\right)(e^{iz/n} - 1)\right]^n \qquad [53]$$

y cuando n tiende a infinito se pueden hacer las sustituciones:

$$\varphi\left(\frac{v}{n}\right) = 1 + \frac{iv\bar{\xi}}{n} \quad ; \quad \varphi'\left(\frac{v}{n}\right) = i\bar{\xi} \quad ; \quad e^{iz/n} - 1 = \frac{iz}{n} \qquad [54]$$

y, por tanto, el límite de [53] cuando n tiende a infinito, es

$$\lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{iv\bar{\xi}}{n} + \frac{iz\bar{\xi}}{\mathrm{n}}\right]^n = e^{i\bar{\xi}(z+v)} \qquad [55]$$

que expresa que ambas medias aritméticas de ξ y μ convergen en probabilidad a $\bar{\xi}$ cuando n tiende a infinito.

Para el teorema del límite central (problemas de fluctuaciones) hemos de calcular el límite cuando n tiende a infinito de:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\varphi\left(\frac{v}{\sqrt{n}}\right) - i\varphi'\left(\frac{v}{\sqrt{n}}\right)(e^{iz/\sqrt{n}} - 1)\right]^n e^{-i\xi(v+z)\sqrt{n}} \qquad [56]$$

y cuando n tiende a infinito se pueden hacer las sustituciones:

$$\varphi\left(\frac{v}{\sqrt{n}}\right) = 1 + i\frac{\bar{\xi}v}{\sqrt{n}} - \frac{\overline{\xi^2}v^2}{2n} \quad ; \quad \varphi'\left(\frac{v}{\sqrt{n}}\right) = i\bar{\xi} - \overline{\xi^2}\frac{v}{\sqrt{n}}$$

$$e^{iz/\sqrt{n}} - 1 = \frac{iz}{\sqrt{n}} - \frac{z^2}{2n} \qquad [57]$$

con lo que el límite [56] vale:

$$\left[1 + \frac{iv\bar{\xi}}{\sqrt{n}} - \frac{\overline{\xi^2}v^2}{2n} + \left(\bar{\xi} + i\overline{\xi^2}\frac{v}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{iz}{\sqrt{n}} - \frac{z^2}{2n}\right)\right]^n \qquad [58]$$

Para calcular este límite tenemos el logaritmo neperiano del paréntesis de [58], que vale:

$$\frac{i\bar{\xi}(v + z)}{\sqrt{n}} - \frac{\overline{\xi^2}v^2}{2n} - \frac{\bar{\xi}z^2}{2n} - \frac{\overline{\xi^2}vz}{n} + \frac{1}{2}\frac{(\bar{\xi})^2(v + z)^2}{n} =$$

$$\frac{i\bar{\xi}(v + z)}{\sqrt{n}} - \frac{v^2}{2n}(\overline{\xi^2} - (\bar{\xi})^2) - \frac{z^2}{2n}(\bar{\xi} - (\bar{\xi})^2) - \frac{vz}{n}(\overline{\xi^2} - (\bar{\xi})^2) \qquad [59]$$

y si multiplicamos la expresión anterior por n, tomando antilogaritmos, y multiplicamos el resultado por

$$e^{-i\bar{\xi}(v+z)\sqrt{n}} \qquad [60]$$

se obtiene:

$$e^{-\frac{1}{2}[r^2(\overline{\xi^2} - (\bar{\xi})^2) - 2vz(\overline{\xi^2} - (\bar{\xi})^2) + z^2(\bar{\xi} - (\bar{\xi})^2)]} \qquad [61]$$

que es la ley normal (gaussiana) bivariante de las dos v.a. correlacionadas:

$$\sqrt{n}\left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} - \bar{\xi}\right) \quad ; \quad \sqrt{n}\left(\frac{\mu_1 + \cdots + \mu_n}{n} - \bar{\xi}\right) \qquad [62]$$

cuando n tiende a infinito.

7. TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL PARA LA DISTRIBUCION CONDICIONAL EN LA ADICION DE v.a. BINOMIALES DE PROBABILIDAD ALEATORIA Y DE BERNOULLI

Si las ξ_i son v.a. absolutamente continuas e independientes de la misma f.f. $f(x)$, la f.f. de la distribución condicional $g(x_1, \ldots, x_n/n)$ de las ξ_i, si se realiza la prueba binomial n veces, y las n veces el resultado es favorable, por lo visto en el apartado 14.5 es

$$g(x_1, ..., x_n/n) = \frac{x_1 \cdots x_n f(x_1) \cdots f(x_n)}{(\bar{\xi})^n} \qquad [63]$$

a la que corresponde la f.c.:

$$\varphi(z_1, ..., z_n) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 e^{i(z_1x_1 + \cdots + z_nx_n)} g(x_1, ..., x_n/n)\, dx_1 \cdots dx_n \qquad [64]$$

que vale:

$$\varphi(z_1, ..., z_n) = \frac{-i^n \varphi'(z_1) \cdots \varphi'(z_n)}{(\bar{\xi})^n} \qquad [65]$$

La f.c. de la suma de las $n\xi_i$ se obtiene haciendo en [65] todas las z iguales es:

$$\varphi(z, ..., z) = \left[-\frac{i\varphi'(z)}{\bar{\xi}}\right]^n \qquad [66]$$

y como existen los desarrollos en serie, con tal de que exista el momento de tercer orden $\overline{\xi^3}$ [67] (existen todos los momentos de las ξ_i):

$$\varphi(z) = 1 + i\bar{\xi}z - \frac{\overline{\xi^2}}{2}z^2 - i\frac{\overline{\xi^3}}{6}z^3 + \cdots; \ -\frac{i\varphi'(z)}{\bar{\xi}} = 1 + i\frac{\overline{\xi^2}}{\bar{\xi}}z - \frac{\overline{\xi^3}}{2\bar{\xi}}z^2 + \cdots \qquad [67]$$

resulta que el valor medio y la varianza de la suma de las $n\xi_i$ valen:

$$\frac{\overline{\xi^2}}{\bar{\xi}} \ ; \ \sigma^2 = \frac{\overline{\xi^3}}{\bar{\xi}} - \left(\frac{\overline{\xi^2}}{\bar{\xi}}\right)^2 = \frac{\overline{\xi^3}\cdot\bar{\xi} - (\overline{\xi^2})^2}{(\bar{\xi})^2} \qquad [68]$$

Se comprueba que σ^2 es positivo, porque el denominador es positivo, y el numerador, por las conocidas propiedades de los momentos absolutos de las distribuciones de probabilidad; y en este caso particular las $n\xi$ son positivas varían de 0 a 1 y, por tanto, los momentos son iguales a los momentos absolutos. El valor medio es inferior a 1, por [68].

De [68] se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(\frac{z}{n}, ..., \frac{z}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{i\varphi'(z/n)}{\bar{\xi}}\right]^n = e^{i\frac{\overline{\xi^2}}{\bar{\xi}}z} \qquad [69]$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \qquad [70]$$

converge en probabilidad a

$$\frac{\overline{\xi^2}}{\overline{\xi}}$$

Y, por otra parte:

$$\lim_{n \to \infty} \left[-\frac{i\varphi\,(z/\sqrt{n})}{\overline{\xi}} \right]^n e^{-i\sqrt{n}\frac{\overline{\xi^2}}{\overline{\xi}}z} = e^{-\frac{\overline{\xi^3}\,\overline{\xi} - (\overline{\xi^2})^2}{(\overline{\xi})^2}\frac{z^2}{2}} \qquad [71]$$

que son los teoremas de la convergencia en probabilidad de la media aritmética a una cantidad cierta y del límite central.

Estos teoremas tienen aplicación a problemas de probabilidades geométricas y de geometría integral.

La [71] es la f.f. de la v.a.:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} - \overline{\xi} \right) \sqrt{n} \qquad [72]$$

Los resultados anteriores se pueden obtener también porque la [63] es una f.f. de v.a. independientes:

$$g(x_1, \ldots, x_n/n) = g(x_1) \cdots g(x_n) \qquad [73]$$

siendo:

$$g(x_i) = \frac{x_i f(x_i)}{\overline{\xi}} \qquad [74]$$

y de aquí que sus valores medio y momento de segundo orden son:

$$\int_0^1 x_i g(x_i)\, dx_i = \frac{\overline{\xi^2}}{\overline{\xi}} \quad ; \quad \int_0^1 x_i^2 g(x_i)\, dx_i = \frac{\overline{\xi^3}}{\overline{\xi}} \qquad [75]$$

y a partir de ellos se obtienen [69] y [71].

Si se realiza la prueba binomial n veces y las n veces el resultado es desfavorable, la f.f. condicional de las ξ_i es

$$h(x_1, \ldots, x_n/n) = \frac{(1 - x_1) \cdots (1 - x_n) f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)}{(1 - \overline{\xi})^n} \qquad [76]$$

que se descompone en el producto de f.f.:

$$h(x_1) \cdots h(x_n) \qquad [77]$$

siendo:

$$h(x) = \frac{(1-x)f(x)}{1-\bar{\xi}} \qquad [78]$$

son también v.a. independientes. A la f.f. [78] le corresponde el valor medio y la varianza:

$$\frac{\bar{\xi} - \overline{\xi^2}}{1-\bar{\xi}} \; ; \; \sigma^2 = \frac{\overline{\xi^2} - \overline{\xi^3}}{1-\bar{\xi}} - \left(\frac{\bar{\xi} - \overline{\xi^2}}{1-\bar{\xi}}\right)^2 \qquad [79]$$

que permiten obtener los correspondientes teoremas de la convergencia en probabilidad de la media aritmética [70] y del límite central [72] para este nuevo caso.

$$\frac{\varphi(z) + i\varphi'(z)}{1-\bar{\xi}} \qquad [80]$$

cuyo desarrollo en serie de potencias de z reobtiene los resultados [79].

Si la prueba binomial se repite n veces y m resultados son favorables y $n - m$ desfavorables, la probabilidad de que k de las ξ_i estén comprendidas entre a y b, por [42] es el coeficiente de la potencia k de z en el desarrollo:

$$\left[(z-1)\int_a^b g(x)\,dx + 1\right]^m \left[(z-1)\int_a^b h(x)\,dx + 1\right]^{n-m} \qquad [81]$$

En el caso de la distribución de Bernoulli de probabilidad aleatoria de f.c. [10], la f.f. de la distribución condicional de $\xi(a; m)$, si $\mu = a$, es

$$k_m(x/a) = \frac{x^a(1-x)^{m-a}f(x)}{\overline{\xi^a(1-\xi)^{m-a}}} \qquad [82]$$

cuyo valor medio y momento de segundo orden son:

$$\frac{\overline{\xi^{a+1}(1-\xi)^{m-a}}}{\overline{\xi^a(1-\xi)^{m-a}}} \; ; \; \frac{\overline{\xi^{a+2}(1-\xi)^{m-a}}}{\overline{\xi^a(1-\xi)^{m-a}}} \qquad [83]$$

que permiten establecer los teoremas de la convergencia en probabilidad de la media aritmética y del límite central.

También para las distribuciones condicionales, la adición de m v.a. binomiales de probabilidad aleatoria y la distribución de Bernoulli de probabilidad aleatoria y exponente m, son distintas y responden a los dos modelos de extracción de la moneda de la urna, distintos descritos en el apartado 14.1. Vamos a obtener los teoremas de la convergencia en probabilidad de la media aritmética y del teorema del límite central para la distribución de Bernoulli. Supongamos primeramente el caso particular más sencillo en que la probabilidad aleatoria ξ está repartida uniformemente al azar en el intervalo [0, 1], es decir:

$$f(x) = 1 \qquad [84]$$

si extraemos una moneda al azar de la urna del apartado 14.1, la arrojamos n veces al aire y m veces sale cara, la f.f. de la distribución condicional de $\xi(m, n)$ es

$$c_{mn}x^m(1 - x)^{n-m} \tag{85}$$

siendo c_{mn} el coeficiente de normalización. El valor medio, la varianza y la moda de [85] valen respectivamente:

$$\bar{\xi}(m, n) = \frac{m + 1}{n + 2} \quad ; \quad \sigma^2 = \frac{(m + 1)(n - m + 1)}{(n + 2)^2(n + 3)} \quad ; \quad \frac{m}{n} \tag{86}$$

si hacemos ahora:

$$n \to \infty,\ m \to \infty \quad ; \quad \lim \frac{m}{n} = p \tag{87}$$

entonces el valor medio y la moda en el límite tienen el mismo valor, primero [88] y la varianza el segundo valor [88]:

$$p \quad ; \quad \sigma^2 = \frac{p(1 - p)}{n} \to 0 \tag{88}$$

La v.a. $\xi(m, n)$ converge en probabilidad a p, y la f.f. [85] converge a la delta de Dirac $\delta(x - p)$. La v.a.

$$(\xi(m, n) - p)\sqrt{\frac{n}{p(1 - p)}} \tag{89}$$

converge cuando n tiende a infinito a la ley normal de valor medio cero y varianza la unidad (teorema del límite central).

Consideremos ahora el caso general, en que $f(x)$ no vale [84] si no que sea cualquiera, la f.f. de la v.a. condicional $\xi(m, n)$ es

$$c_{mn}x^m(1 - x)^{n-m}f(x) \tag{90}$$

con un valor de c_{nm} distinto del de [85]. Para obtener la moda, tomando logaritmos en [90], derivando e igualando a cero obtenemos:

$$\frac{m}{n} - \frac{n - m}{1 - x} + \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow x(1 - x)\frac{f'(x)}{f(x)} + m - nx = 0 \tag{91}$$

y en la hipótesis [87] si

$$f(p) \neq 0,\ f'(p) < \infty \tag{92}$$

se obtiene para la moda al valor a solución de [91]:

$$a = \frac{m}{n} = p \tag{93}$$

Cuando n es muy grande, la solución de [91] en primera aproximación es [93] y en segunda aproximación es

$$a + \Delta a \quad ; \quad \Delta a = \frac{p(1-p)f'(p)}{nf(p)} \ll \sigma \qquad [94]$$

Cuando n y m tienden a infinito, cumpliéndose la [87], la [90] al igual que la [85] tiende a la delta de Dirac $\delta(x - p)$, porque el valor medio tiende a la moda p. Como en este caso la probabilidad de que x difiera de p es tan pequeña como se quiera, cuando n y m tienden a infinito, se puede sustituir en [90] $f(x)$ por

$$f(x) = f(p) + (x - a)f'(p) \qquad [95]$$

y se obtiene:

$$\int_0^1 (x - p)x^m(1 - x)^{n-m}(f(p) + (x - a)f'(p))\, dx \qquad [96]$$

que se desdobla en

$$f(p) \int_0^1 (x - p)x^m(1 - x)^{n-m}\, dx = 0 \qquad [97]$$

por ser p el valor medio y

$$f'(p) \int_0^1 (x - p)^2 x^m(1 - x)^{n-m} dx \sim \sigma^2\, [88] \to 0 \qquad [98]$$

cuando n y m se hacen infinitos ($m/n = p$).

Cuando n y m son muy grandes, el valor en primera aproximación del valor medio es p, y en segunda aproximación $p + \Delta p$, se obtiene a partir de

$$\int_0^1 (x - p - \Delta p)x^m(1 - x)^{n-m}(f(p) + (x - p - \Delta p)f'(p))\, dx = 0 \qquad [99]$$

y de aquí:

$$-\Delta p f(p) \int_0^1 x^m(1 - x)^{n-m}\, dx + f'(p) \int_0^1 (x - p)^2 x^m(1 - x)^{n-m}\, dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta p = \frac{f'(p)}{f(p)}\sigma^2 \qquad [100]$$

porque la última integral [100] es la segunda [98].

Vamos a calcular ahora el valor de la varianza en segunda aproximación $\sigma^2 + \Delta\sigma^2$, es

$$\sigma^2 + \Delta\sigma^2 = \frac{\displaystyle\int_0^1 (x-p-\Delta p)^2 x^m (1-x)^{n-m} \big(f(p) + (x-p-\Delta p) f'(p)\big)\, dx}{\displaystyle\int_0^1 x^m (1-x)^{n-m} \Big(f(p) + (x-p-\Delta p) f'(p) + \frac{(x-p-\Delta p)^2}{2} f''(p)\Big)\, dx} \qquad [101]$$

porque en el denominador hacemos la sustitución

$$f(x) = f(p) + (x-p) f'(p) + \frac{(x-p)^2}{2} f''(p) \qquad [102]$$

y en el denominador la integral correspondiente a $f'(p)$ es cero. Con esto la [101] se escribe:

$$\sigma^2 + \Delta\sigma^2 = \frac{[(f(p) - 3\Delta p f'(p))] \displaystyle\int_0^1 (x-p)^2 x^m (1-x)^{n-m}\, dx}{f(p) \displaystyle\int_0^1 x^m (1-x)^{n-m}\, dx + \frac{1}{2} f''(p) \int_0^1 (x-p)^2 x^m (1-x)^{n-m}\, dx} \qquad [103]$$

y de aquí:

$$f''(p) < \infty \quad ; \quad \Delta\sigma^2 = \sigma^2 \left(1 - 3\Delta p \frac{f'(p)}{f(p)} - \frac{1}{2} \frac{f''(p)}{f(p)} \sigma^2\right) \qquad [104]$$

luego $\Delta\sigma^2$ tiende a cero como $1/n^2$, mientras que σ^2 tiende a cero como $1/n$, por tanto:

$$\Delta p \ll p \quad ; \quad \Delta\sigma^2 \ll \sigma^2 \qquad [105]$$

que muestra que las correcciones en segunda aproximación del valor medio y de la varianza de $\xi(m, n)$ son infinitesimales (por ser del orden de $1/n$ y $1/n^2$, respectivamente) frente a las fluctuaciones de la v.a. que son del orden de σ, es decir, de $1/\sqrt{n}$. Se sigue que los teoremas de la convergencia en probabilidad de la media aritmética y del límite central son independientes de la forma que adopte la $f(x)$ con tal de que se cumplan las

$$f(p) \neq 0 \quad ; \quad f'(p) < \infty, f''(p) < \infty \qquad [106]$$

y, por tanto, los mismos que cuando $f(x) = 1$ [84].

Los anteriores teoremas se pueden expresar diciendo que si se escoge una moneda al azar de la urna descrita en el apartado 14.1, y se arroja n veces al aire, si sale m veces cara, si cuando n tiende a infinito, m tiende también a infinito, de modo que en el límite m/n tiende a p, entonces la probabilidad de que salga cara con la moneda escogida sea p, es igual a la unidad, y la probabilidad de que la diferencia entre p y la probabilidad de que salga cara con la moneda escogida, multiplicada por $\sqrt{n}$, es la de una v.a. gaussiana de valor medio cero y varianza $p(1-p)$. Estos teoremas son los inversos de los ordinarios, cuando la probabilidad en las pruebas binomiales son iguales y ciertas.

Si por el contrario la experiencia anterior se realiza no con una sola moneda, sino con n monedas distintas (que eventualmente alguna pudiera ser la misma) extraídas una por una de la urna, tras la restitución a la urna de la moneda extraída después de cada extracción, entonces la media aritmética de las probabilidades de que salga cara en cada moneda extraída converge en probabilidad a

$$p\frac{\overline{\xi^2}}{\bar{\xi}} + (1 - p)\frac{\bar{\xi} - \overline{\xi^2}}{1 - \bar{\xi}} \qquad [107]$$

en virtud de las [68] y [79]. La diferencia entre dicha media aritmética y el valor [107], multiplicada pot $\sqrt{n}$, converge a una v.a. normal de valor medio cero y varianza:

$$p\sigma^2\,[68] + (1 - p)\sigma^2\,[79] \qquad [108]$$

porque la f.c. de la antedicha media aritmética por [66] y [80] es

$$\left[\frac{i\varphi'(z/n)}{\bar{\xi}}\right]^m \left[\frac{\varphi(z/n) + i\varphi'(z/n)}{1 - \bar{\xi}}\right]^{n-m} \qquad [109]$$

y la f.c. de la antedicha diferencia multipkicada por $\sqrt{n}$:

$$\left[\frac{i\varphi'(z/\sqrt{n})}{\bar{\xi}}\right]^m \left[\frac{\varphi(z/\sqrt{n}) + i\varphi'(z/\sqrt{n})}{1 - \bar{\xi}}\right]^{n-m} e^{-iz\sqrt{n}\,[107]} \qquad [110]$$

Por [107] en el exponente de [110] denotamos el valor [107].

8. INVERSAS DE LAS DISTRIBUCIONES BINOMIALES Y DE BERNOULLI DE PROBABILIDAD ALEATORIA. TEOREMAS DEL LIMITE CENTRAL

En los apartados anteriores nos hemos ocupado de los procesos probabilísticos directos, en los que es fijo (cierto) el número de pruebas binomiales realizadas y aleatorio el número de resultados favorables. Ahora nos vamos a ocupar de los procesos probabilísticos inversos en los que lo que es fijo (cierto) es el número de resultados favorables y aleatorio el número de pruebas binomiales realizadas. Existen tres modalidades de procesos inversos. En el primero de ellos suponemos que la moneda extraída al azar de la urna descrita en el apartado 14.1, es extraída y repuesta en la urna cada vez que se realiza una prueba binomial; por tanto, las probabilidades de que salga cara cada vez que se arroja la moneda son v.a. independientes de la misma ley de probabilidad. La probabilidad p_n de que sean necesarias n pruebas para obtener el primer resultado favorable en la n-ésima prueba viene dado por

$$p_n = \overline{(1 - \xi_1) \cdots (1 - \xi_{n-1})\xi_n} = (1 - \bar{\xi})^{n-1}\bar{\xi} \qquad [111]$$

por ser las v.a. ξ_i independientes y de la misma ley de probabilidad; la f.g. de esta v.a. es

$$\rho(z) = \frac{\bar{\xi} z}{1 - (1 - \bar{\xi})z} \qquad [112^*]$$

La probabilidad condicional para las $n\xi_i$, si x_i son sus valores numéricos y $f(x)$ su f.f., es

$$h(x_1) \cdots h(x_{n-1}) g(x_n) \qquad [113]$$

que se descompone en el producto de f.f., con la notación empleada en el apartado 14.7, fórmulas [74] y [78]. Y, por tanto, la probabilidad de que k de las ξ_i estén comprendidas entre a y b, es por [42]:

$$\left((z-1)\int_a^b g(x)dx + 1\right)\left((z-1)\int_a^b h(x)\,dx + 1\right)^{n-1} \qquad [114]$$

Si llamamos χ a la v.a. suma de las probabilidades aleatorias correspondientes a cada p_n, la f.c. $\psi(z, v)$ de las v.a. n y χ en virtud de [65] y [80] es

$$\psi(z, v) = -\sum_{n=1}^{\infty} e^{izn} i\varphi'(v)\big(\varphi(v) + i\varphi'(v)\big)^{n-1} = \frac{-e^{iz} i\varphi'(v)}{1 - e^{iz}\big(\varphi(v) + i\varphi'(v)\big)} \qquad [115]$$

donde z corresponde a n y v a χ. Se comprueba haciendo $v = 0$ en [115] que

$$\frac{\bar{\xi} e^{iz}}{1 - e^{iz}(1 - \bar{\xi})} = \psi(z, 0) \qquad [116]$$

Teniendo en cuenta [67] y despreciando las potencias de orden superior al primero en [115] se obtiene:

$$\psi(0, v) = \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\xi} + i\overline{\xi^2}v)(1 - \bar{\xi} + iv(\bar{\xi} - \overline{\xi^2}))^{n-1} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\xi} + i\overline{\xi^2}v)(1 - \bar{\xi})^{n-1}\left(1 + (n-1)i\frac{\bar{\xi} - \overline{\xi^2}}{1 - \bar{\xi}}v\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\xi}(1 - \bar{\xi})^{n-1} + iv\overline{\xi^2}(1 - \bar{\xi})^{n-1} + iv(n-1)(\bar{\xi} - \overline{\xi^2})(1 - \bar{\xi})^{n-2}\bar{\xi} =$$

$$= 1 + iv\frac{\overline{\xi^2}}{\bar{\xi}} + iv\frac{\bar{\xi} - \overline{\xi^2}}{\bar{\xi}} = 1 + iv \qquad [117]$$

* $\bar{n} = \dfrac{1}{\bar{\xi}}$; $\sigma_n^2 = \dfrac{1 - \bar{\xi}}{(\bar{\xi})^2}$ [112 bis]

el último paso es debido a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(1-\bar{\xi})^{n-2} = \frac{d}{d(1-\bar{\xi})} \sum_{n=1}^{\infty} (1-\bar{\xi})^{n-1} = \left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right)^2 \qquad [118]$$

De [117] se sigue que

$$\bar{\chi} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_0 = 1 \qquad [119]$$

Volviendo de nuevo a [115], despreciando las potencias de z y v superiores al primer orden se obtiene:

$$\psi(z,v) = \sum_{n=1}^{\infty} (1+izn)(\bar{\xi} + i\overline{\xi^2}v)(1-\bar{\xi}+iv(\bar{\xi}-\overline{\xi^2}))^{n-1} =$$

$$= 1 + iv + iz\sum_{n=1}^{\infty} n(\bar{\xi} + i\overline{\xi^2}v)(1-\bar{\xi})^{n-1}\left(1+(n-1)i\frac{\bar{\xi}-\overline{\xi^2}}{1-\bar{\xi}}v\right) =$$

$$= 1 + iv + \frac{iz}{\bar{\xi}} - zv\sum_{n=1}^{\infty} n\overline{\xi^2}(1-\bar{\xi})^{n-1} + n(n-1)(1-\bar{\xi})^{n-2}(\bar{\xi}-\overline{\xi^2})\bar{\xi} =$$

$$= 1 + iv + \frac{iz}{\bar{\xi}} - zv\left(\frac{2}{\bar{\xi}} - \frac{\overline{\xi^2}}{(\bar{\xi})^2}\right) \qquad [120]$$

El último paso es porque:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1-\bar{\xi})^{n-1} = \frac{1}{(\bar{\xi})^2} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)(1-\bar{\xi})^{n-2} = \frac{2}{(\bar{\xi})^3} \qquad [121]$$

por ser la primera y segunda serie [121] las derivadas primera y segunda respecto a $1 - \bar{\xi}$ de

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-\bar{\xi})^{n-1} = \frac{1}{\bar{\xi}} \qquad [122]$$

De [120] se sigue que

$$\overline{n\chi} = -\left(\frac{\partial^2\psi(z,v)}{\partial z\,\partial v}\right)_0 = \frac{2}{\bar{\xi}} - \frac{\overline{\xi^2}}{(\bar{\xi})^2} \qquad [123]$$

y, por tanto, el momento central de segundo orden de las v.a. n y χ es

$$\overline{n\chi} - \bar{n}\bar{\chi} = \frac{\bar{\xi}-\overline{\xi^2}}{(\bar{\xi})^2} > 0 \quad ; \quad \bar{n} = \frac{1}{\bar{\xi}} \quad ; \quad \bar{\chi} = 1 \qquad [124]$$

que muestra que la correlación entre las dos v.a. n y χ es siempre positiva.

Volviendo a [115], haciendo $z = 0$ y despreciando en su desarrollo en serie las potencias de v superiores al segundo orden, se obtiene:

$$\psi(0,v) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{\xi} + i\overline{\xi^2}v - \frac{\overline{\xi^3}}{2}v^2\right)\left(1 - \bar{\xi} + i(\bar{\xi} - \overline{\xi^2})v - \frac{\overline{\xi^2} - \overline{\xi^3}}{2}v^2\right)^{n-1} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{\xi} + i\overline{\xi^2}v - \frac{\overline{\xi^3}}{2}v^2\right)(1 - \bar{\xi})^{n-1}\left(1 + i\frac{\bar{\xi} - \overline{\xi^2}}{1 - \bar{\xi}}v - \frac{\overline{\xi^2} - \overline{\xi^3}}{1 - \bar{\xi}}\frac{v^2}{2}\right)^{n-1} \qquad [125]$$

y de aquí:

$$\psi(0,v) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{\xi} + i\overline{\xi^2}v - \frac{\overline{\xi^3}}{2}v^2\right)(1 - \bar{\xi})^{n-1}\left(1 + i(n-1)\frac{\bar{\xi} - \overline{\xi^2}}{1 - \bar{\xi}}v -\right.$$

$$\left. - \frac{n-1}{2}v^2\frac{\overline{\xi^2} - \overline{\xi^3}}{1 - \bar{\xi}} - \frac{n(n-1)}{2}\frac{(\bar{\xi} - \overline{\xi^2})^2}{(1 - \bar{\xi})^2}v^2\right) \qquad [126]$$

y el coeficiente de $-v^2/2$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\xi^3}(1 - \bar{\xi})^{n-1} + \bar{\xi}(\overline{\xi^2} - \overline{\xi^3})(1 - \bar{\xi})^{n-2}(n-1) +$$

$$+ n(n-1)\bar{\xi}(\bar{\xi} - \overline{\xi^2})^2(1 - \bar{\xi})^{n-2} + 2(n-1)\overline{\xi^2}(\bar{\xi} - \overline{\xi^2})(1 - \bar{\xi})^{n-2} =$$

$$= 2 - \frac{\overline{\xi^2}}{\bar{\xi}} = -\left(\frac{\partial^2\psi(z,v)}{\partial v^2}\right)_0 = \overline{\chi^2} \qquad [127]$$

y para la varianza de χ se obtiene el valor

$$\sigma_\chi^2 = \overline{\chi^2} - (\bar{\chi})^2 = 1 - \frac{\overline{\xi^2}}{\bar{\xi}} \qquad [128]$$

El coeficiente de correlación r de n y χ vale:

$$r = \frac{\dfrac{\bar{\xi} - \overline{\xi^2}}{(\bar{\xi})^2}}{\sqrt{\dfrac{1 - \bar{\xi}}{(\bar{\xi})^2}\left(1 - \dfrac{\overline{\xi^2}}{\bar{\xi}}\right)}} = \sqrt{\frac{\bar{\xi} - \overline{\xi^2}}{\bar{\xi} - (\bar{\xi})^2}} = \frac{\overline{n\chi} - \bar{n}\bar{\chi}}{\sigma_n\sigma_\chi} \qquad [129]$$

que se comprueba fácilmente que es menor que 1 porque $(\bar{\xi})^2 < \overline{\xi^2}$.

[119] muestra el resultado curioso de que el valor medio de χ vale la unidad, es decir, que el valor medio de la suma de las probabilidades aleatorias ξ_i de que salga cara en las monedas arrojadas hasta obtener el primer resultado favorable (salir cara) es igual a la unidad.

Se comprueban fácilmente los resultados anteriores, para el caso de la inversión del proceso binomial ordinario, en que la probabilidad del suceso favorable no es aleatoria, sino cierta. Si el valor de esta probabilidad es p, se tiene que

$$\varphi(v) = e^{ipv};\ \varphi'(v) = ipe^{ipv} \Rightarrow \varphi(0) = 1,\ \varphi'(0) = ip;\ \bar{\xi} = p;\ \overline{\xi^2} = p^2 \qquad [130]$$

y la [115] para $x = 0$ da la conocida f.c.:

$$\psi(z, 0) = \frac{pe^{iz}}{1 - e^{iz}(1 - p)} \qquad [131]$$

Y la suma de las ξ_i (ahora p) tendría por valor medio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} npp_n = p \sum_{n=1}^{\infty} np_n = p\bar{n} = 1 = \bar{\chi} \equiv [119] \qquad [132]$$

por varianza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2p^2p_n - \left(\sum_{n=1}^{\infty} npp_n\right)^2 = p^2\sigma_n^2 = 1 - p \qquad [133]$$

que es el valor de [128] cuando se hace la sustitución [130]. Y el momento central mixto de segundo orden es

$$\sum npnp_n - 1 \sum np_n = \frac{1 - p}{p} \qquad [1134]$$

que coincide con [123] cuando se hace en ella las sustituciones [130].

Si consideramos ahora el número aleatorio $n(m)$ de pruebas necesarias hasta conseguir el m-ésimo resultado favorable, y la suma de las probabilidades aleatorias ξ_i, de las $n(m)$ pruebas necesarias, que denotamos por $\chi(m)$, como

$$n(m) = n_1 + \cdots + n_m \quad ; \quad \chi(m) = \chi_1 + \cdots + \chi_m \qquad [135]$$

siendo las n_i v.a. independientes y las χ_i v.a. independientes, de f.c. [115], la f.c. de $n(m)$ y $\chi(m)$ es la potencia m-ésima de la [115]. Por tanto, si m tiende a infinito:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{n(m)}{m} \quad ; \quad \lim_{m\to\infty} \frac{\chi(m)}{m} \qquad [136]$$

convergen en probabilidad a:

$$\frac{1}{\bar{\xi}} \quad ; \quad 1 \qquad [137]$$

y las v.a.:

$$\left(\frac{n(m)}{m} - \frac{1}{\bar{\xi}}\right)\sqrt{m\bar{\xi}}/\sqrt{1 - \bar{\xi}} \quad ; \quad \left(\frac{\chi(m)}{m} - 1\right)\sqrt{m\bar{\xi}/(\bar{\xi} - \overline{\xi^2})} \qquad [138]$$

convergen a la ley normal de f.c.:

$$e^{-\frac{1}{2}z^2 - rzv - \frac{1}{2}v^2} \quad ; \quad r \equiv [129] \qquad [139]$$

En cuanto a la f.f. de la distribución condicional de las ξ_i para $n(m)$ fijo su valor es

$$g(x_1) \cdots g(x_m)h(x_{m+1}) \cdots h(x_n) \qquad [140]$$

con la notación de [113], porque hay m aciertos y n pruebas.

Hasta ahora en este apartado hemos supuesto que antes de cada tirada, la moneda era extraída al azar de la urna y respuesta después a la misma. Ahora vamos a considerar otra modalidad que a su vez se va a desdoblar en dos submodalidades; se extrae al azar la moneda de la urna y se tira cuantas veces sea necesario (el número de veces n aleatorio) para obtener el primer acierto (que salga cara). En este caso la probabilidad p_n vale:

$$p_n = \overline{(1-\xi)^{n-1}\xi} = \overline{(1-\xi)^{n-1}(1-(1-\xi))} = \overline{(1-\xi)^{n-1}} - \overline{(1-\xi)^n} \qquad [141]$$

y se tiene que

$$0 < \xi < 1 \Rightarrow 1 > \overline{(1-\xi)} > \overline{(1-\xi)^2} > \cdots > \overline{(1-\xi)^n} \to 0 \qquad [142]$$

por tanto, se cumple la condición de normalización:

$$\overline{(1-\xi)^0} = 1 \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \left(1 - \overline{(1-\xi)}\right) + \left(\overline{(1-\xi)} - \overline{(1-\xi)^2}\right) + \cdots = 1 \qquad [143]$$

El valor medio de n es

$$\bar{n} = \sum_{n=1}^{\infty} np_n = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{(1-\xi)^n} \qquad [144]$$

y el momento de segundo orden es

$$\overline{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\overline{(1-\xi)^n} \qquad [145]$$

A diferencia de lo que sucedía en los casos anteriores, $\bar{n}$ o $\overline{n^2}$ pueden ser infinitos si las series [144] y [145] son divergentes. En general existe el momento de orden m si es convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{m-1}\overline{(1-\xi)^n} \qquad [146]$$

La f.c. de n y ξ, si z corresponde a n y v a ξ, si ξ es una v.a. de f.f. $f(x)$ es

$$\psi(z, v) = \frac{\overline{\xi e^{iz+iv\xi}}}{1-(1-\xi)e^{iz}} = \int_0^1 \frac{xe^{i(z+vx)}}{1-(1-x)e^{iz}} f(x)\,dx \qquad [147]$$

de las que se sigue que

$$\overline{n\xi} = 1$$

La f.f. de la distribución condicional de ξ para un n fijo, es la $k_n(x/1)$ definida en [82].

Si de acuerdo con la modalidad anterior se tiran las monedas cuentas veces haga falta para obtener m aciertos (que salga m veces cara), el número n de veces aleatorio que hay que tirar la moneda, se puede calcyular con dos submodalidades distintas. Según la primera, cambiando de moneda, escogida al azar, después de obtener un acierto, según la segunda sin cambiar nunca de moneda. En la primera submodalidad existen m probabilidades aleatorias independientes ξ_i de la misma ley de probabilidad y la f.c. de la distribución conjunta de n y de las $m\xi_i$ es

$$\prod_{i=1}^{m} \psi(z, v_i) \qquad [148]$$

siendo la ψ la función definida por [147]. La f.c. de n y de la suma de todas las ξ_i se obtiene haciendo todas las v_i iguales a v en [148].

Según la segunda submodalidad existe una sola probabilidad aleatoria ξ y la f.c. de la distribución conjunta de ξ y de n es

$$\overline{\left(\frac{\xi e^{iz}}{1-(1-\xi)e^{iz}}\right)^m e^{iv\xi}} = \int_0^1 \left(\frac{xe^{iz}}{1-(1-x)e^{iz}}\right)^m e^{ivx} f(x)\,dx \qquad [149]$$

y la f.f. de la distribución condicional de ξ para un m fijo es $k_n(x/m)$ definida en [82].

En esta última submodalidad los teoremas de la convergencia en probabilidad de la media aritmética y del límite central, adoptan el mismo enunciado teórico y el mismo diseño experimental que para el problema directo en el apartado 14.3. Si se tira la moneda al aire tantas veces (n número de veces aleatorio) como haga falta para obtener m aciertos, la f.c. del cociente n/m es

$$\overline{\left(\frac{\xi e^{iz/m}}{1-(1-\xi)e^{iz/m}}\right)^m} \qquad [150]$$

y cuando m tiende a infinito vale:

$$\overline{\left(\frac{\xi(1+iz/m)}{1-(1-\xi)(1+iz/m)}\right)^m} = \overline{\left(1+\frac{iz}{m\xi}\right)^m} = \overline{e^{iz/\xi}} \qquad [151]$$

y si existe la f.f. $f(x)$ de ξ, la [151] se escribe:

$$\int_0 e^{iz/x} f(x)\,dx \qquad [152]$$

Se sigue que cuando m tiende a infinito la v.a.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{n}{m} \qquad [153]$$

converge en probabilidad a la v.a. de f.c. [151] o eventualmente [152], si ξ es una v.a. absolutamente continua.

En cuanto al teorema del límite central, el diseño experimental es como el del apartado 14.3, se tira la moneda n' veces (n' aleatorio) hasta conseguir los m primeros aciertos y se vuelve a tirar n'' veces hasta conseguir m segundoa aciertos (m fijo), la f.c. de la v.a.

$$(n' - n'')/\sqrt{m} \qquad [154]$$

tiene por f.c.:

$$\overline{\left(\frac{\xi e^{iz/\sqrt{m}}}{1-(1-\xi)e^{iz\sqrt{m}}}\,\frac{\xi e^{-iz/\sqrt{m}}}{1-(1-\xi)e^{-iz/\sqrt{m}}}\right)^m} \qquad [155]$$

Si se hace tender a m infinito, para calcular [155] hay que calcular el valor medio:

$$\left(\frac{\xi^2}{1-(1-\xi)(e^{iz/\sqrt{m}}+e^{-iz/\sqrt{m}})+(1-\xi^2}\right)^m = \left(\frac{\xi^2}{2+\xi^2-2\xi-(1-\xi)(2-z^2/m)}\right)^m =$$

$$= \left(\frac{\xi^2}{\xi^2+(1-\xi)z^2/m}\right)^m \qquad [156]$$

y, por tanto, la f.c. de la v.a.:

$$\lim_{m\to\infty} (n' - n'')/\sqrt{m} \qquad [157]$$

es

$$\overline{\exp\left[-\frac{1-\xi}{\xi^2}z^2\right]} \qquad [158]$$

que si existe la f.f. $f(x)$ se escribe:

$$\int_0^1 \exp\left[-\frac{1-x}{x^2}z^2\right]f(x)\,dx \qquad [159]$$

que es la forma que adopta el teorema del límite central y su significado empírico, en este caso.

BIBLIOGRAFIA

Los libros del autor a los que se hace referencia son:

A) *Cálculo de probabilidades y procesos estocásticos*, Paraninfo, 1974.
B) *Líneas de investigación en los procesos estocásticos y el movimiento browniano*, Instituto de España, 1975.

C) *Introducción a la investigación en física y matemáticas*, Empeño 14, 1981.
D) *Diccionario de matemática moderna*, Editora Nacional, 2.ª ed., 1982.
E) *Matemática financiera*, Dossat, 1970.

Y las memorias publicadas en la *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* por el autor:

F) «Nuevos modelos de dostribuciones y de procesos estocásticos», 1958.
G) «Algunos nuevos procesos estocásticos y sus aplicaciones», 1959.
H) «Los procesos estocásticos de la genética», 1971.
I) «Cadenas de Markov en poblaciones aleatorias y probabilidades en cadena generalizadas», 1981.
J) «Algunos procesos estocásticos aplicables a la física, la epidemiología y la publicidad. La ley de los grandes números aleatorios», 1983.
K) «Acoplamientos estocásticos de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales y en diferencias finitas y de cadenas de Markov. Funciones diagonales», 1984.

Y las publicaciones en el *Buletinul Institutului Politehnic din Iasi* en 1979: «Un proceso estocástico tridimensional de natalidad, mortalidad e inmigración».

Y en 1976: «Vectores aleatorios isótropos en el espacio de Hilbert y en los espacios euclídeos».