Acoplamientos estocásticos de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales y en diferencias finitas y de cadenas de Markov. Funciones diagonales

Por DARÍO MARAVALL CASESNOVES

Recibido: 19 enero 1983

Summary

A new technique for the solution of linear systems of differential and difference equations with random initial conditions is presented. A probabilistic process derived from the stochastic matching among the above mentioned systems and Markov chains in deterministic and random populations is defined and analyzed. The theory of diagonal functions interpreted as distribution functions of correlated random variables almost surely equals.

1. OTRO MÉTODO DE RESOLUCION DE SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS Y DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON VALORES INICIALES ALEATORIOS

En la bibliografía adjunta, en G) e I) hemos investigado con detalle los problemas planteados por la resolución de sistemas lineales de ecuaciones en diferencias finitas y de ecuaciones diferenciales, tanto si los coeficientes son constantes como variables, cuando los valores iniciales son aleatorios. Aquí vamos a dar un nuevo método de resolución de estos problemas.

Sea:

$$\vec{\xi}_m = A\vec{\xi}_{m-1} \tag{1}$$

un sistema lineal de n ecuaciones en diferencias finitas y:

$$\varphi_0(\vec{z}) = \varphi_0(z_1, ..., z_n) \tag{2}$$

la función característica (f.c.) de los valores iniciales que son una variable aleatoria (v.a.) enevariante. Demostramos en G) que la f.c. de la v.a. solución de [1] con la condición inicial antes fijada es:

$$\varphi_m(\vec{z}) = \varphi_0(\vec{z}A^m) \tag{3}$$

y vamos a ver ahora qué otra forma se le puede dar a la función [3].

Sea el sistema de vectores:

$$\vec{e}_1(0) = ||1, 0, ..., 0||;\ \vec{e}_2(0) = ||0, 1, ..., 0||;\ ...;$$
$$\vec{e}_{n-1}(0) = ||0, 0, ..., 1, 0||;\ \vec{e}_n(0) = ||0, 0, ..., 1|| \tag{4}$$

tales que para el vector $\vec{e}'_i(0)$ todas las componentes son nulas, salvo la i-ésima, que es la unidad, el cual forma una base del espacio vectorial R^n, entonces se cumple que:

$$\vec{z}(0) = \sum_{i=1}^{n} z_i(0)\vec{e}'_i(0)$$

$$\vec{z}(m) = \vec{z}(0)A^m = \sum_{i=1}^{n} z_i(0)\vec{e}'_i(0)A^m = \sum_{i=1}^{n} z_i(0)\vec{e}'_i(m) \qquad [5]$$

siendo:

$$\vec{e}'_i(m) = \vec{e}'_i(0)A^m \qquad [6]$$

y la segunda [5] puede escribirse:

$$\vec{z}(m) = \vec{z}(0)\begin{Vmatrix} e'_{11}(m) & e'_{12}(m) & \cdots & e'_{1n}(m) \\ e'_{21}(m) & e'_{22}(m) & \cdots & e'_{2n}(m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e'_{n1}(m) & e'_{n2}(m) & & e'_{nn}(m) \end{Vmatrix} \qquad [7]$$

porque para la componente jota del vector $\vec{z}$, se tiene el valor:

$$z_j(m) = \sum_{i=1}^{n} z_i(0)e'_{ij}(m) \qquad [8]$$

en las anteriores e'_{ij}, el primer subíndice indica el número de orden del vector, aquí $\vec{e}'_i$, y el segundo (el jota) el número de orden de la componente del vector.

Si introducimos un nuevo conjunto de n vectores $\vec{e}_i$, tales que:

$$e'_{ij} = e_{ji} \Rightarrow \vec{e}_i(m) = A^m\vec{e}'_i(0) \qquad [9]$$

entonces estos nuevos vectores son las soluciones del sistema lineal de ecuaciones en diferencias finitas:

$$\vec{e}_i(m) = A\vec{e}_i(m-1) \qquad [10]$$

con los valores iniciales [4], los cuales forman también una base de R^n. Mientras que los $\vec{e}'$ son los vectores filas de la última matriz de [7], los vectores $\vec{e}_i$ son los vectores columna de dicha matriz, y la [8] se escribe:

$$z_j(m) = \sum_{i=1}^{n} z_i(0)e_{ji}(m) = \langle \vec{z}(0), \vec{e}_j(m)\rangle \qquad [11]$$

y, por tanto, la f.c. [3] se puede escribir también:

$$\varphi_m(\vec{z}) = \varphi_0(\langle \vec{z}, \vec{e}_1(m)\rangle, ..., \langle \vec{z}, \vec{e}_n(m)\rangle) \qquad [12]$$

que es otra forma operativa de resolver el problema que nos habíamos propuesto.

Esta técnica resolutiva sirve también en el caso en que los coeficientes de la matriz A son variables, y el sistema en vez de ser el [1] es el

$$\vec{\xi}_m = A_m \vec{\xi}_{m-1} \tag{13}$$

Análogamente, si

$$\frac{d\vec{\xi}(t)}{dt} = A\vec{\xi}(t) \tag{14}$$

es un sistema lineal de n ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes y

$$\varphi(\vec{z}, 0) = \varphi(z_1, ..., z_n, 0) \tag{15}$$

la f.c. de los valores iniciales, entonces la f.c. de la v.a. solución de [14] en el instante t, viene dada por:

$$\varphi(\vec{z}, t) = \varphi(\langle\vec{z}, \vec{e}_1(t)\rangle, ..., \langle\vec{z}, \vec{e}_n(t)\rangle, 0) \tag{16}$$

siendo los $\vec{e}_i(t)$ las soluciones del sistema:

$$\frac{d\vec{e}(t)}{dt} = A\vec{e}(t) \tag{17}$$

con los valores iniciales [4] respectivamente.

Un método parecido a éste hemos utilizado en J), para obtener las f.c. de cadenas de Markov en poblaciones aleatorias.

En G) habíamos resuelto el problema [14]-[15] mediante la integración de una ecuación lineal en derivadas parciales de primer orden y habíamos señalado que aunque la f.c. no tuviera derivadas parciales y, por tanto, no pudiera ser solución de la antedicha ecuación en derivadas parciales, no obstante la solución formal de la misma, lo era del problema que aquí nos ocupa. Al utilizar el método de este parágrafo, al no recurrir al empleo de ecuaciones en derivadas parciales, es obvio que para la resolución mediante [15], [16] y [17], no juega ningún papel la derivabilidad de la f.c.

Obsérvese que el vector

$$\vec{z}(m) = \sum_{i=1}^{n} z_i(0)\vec{e}_i'(m) \quad ; \quad \vec{z}(m) = \vec{z}(m-1)A \tag{18}$$

es la solución del sistema [18] con los valores iniciales arbitrarios $z_1(0), ..., z_n(0)$.

Obsérvese también cómo a partir de [12]:

$$\left(\frac{\partial\varphi_m(\vec{z})}{\partial z_j}\right)_0 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial\varphi_0(\vec{z})}{\partial z_i}\right)_0 e_{ij}(m) \tag{19}$$

donde por el subíndice 0 indicamos que hacemos todas las componentes de $\vec{z}$ iguales a cero, y por ser los valores particulares de las derivadas de la f.c. en [19] los valores medios de la v.a., se sigue que:

$$\bar{\xi}_j(m) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}_i(0)e_{ij}(m) \Rightarrow \vec{\bar{\xi}}(m) = A^m\vec{\bar{\xi}}(0) \qquad [20]$$

que muestra que los valores medios de la v.a. solución de [1] satisfacen a la [1], y lo mismo puede decirse en el caso del sistema de ecuaciones diferenciales [17]. En este último caso también este método es válido cuando la matriz A depende del tiempo $A(t)$.

En el caso de v.a. absolutamente continuas si:

$$f_0(\vec{x}) = f_0(x_1, ..., x_n) \qquad [21]$$

es la función de frecuencias (f.f.) de la v.a. inicial, demostramos en G) que la f.f. de la v.a. solución es la:

$$f_m(\vec{x}) = \frac{1}{|A|^m} f_0(A^{-m}\vec{x}) \qquad [22]$$

donde por $|A|$ representamos el determinante de la matriz A. Por el mismo razonamiento que para las f.c., se sigue que para las f.f., la [22] es equivalente a la:

$$f_m(\vec{x}) = \frac{1}{|A|^m} f_0(\langle\vec{v}_1(m), \vec{x}\rangle, ..., \langle\vec{v}_n(m), \vec{x}\rangle) \qquad [23]$$

siendo las $\vec{v}_i(m)$ las soluciones del sistema de ecuaciones en diferencias finitas:

$$\vec{v}(m) = \vec{v}(m-1)A^{-1} \qquad [24]$$

con los valores iniciales $\vec{v}_i(0) = \vec{e}_i'(0)$ dados por las [4].

Operativamente se pasa del caso discreto al continuo, es decir, de [1] a [17], haciendo los cambios:

$$A \to I + A\,dt \quad ; \quad m \to \frac{t}{dt} \qquad (25)^*$$

de los que se sigue que:

$$\frac{1}{|A|^m} = e^{-t\sum_{i=1}^{n} a_{ii}} \quad ; \quad A^{-m} = (I + A\,dt)^{-t/dt} = e^{-tA} \qquad [26]$$

y, por tanto, la solución en el caso continuo para las f.f. es la:

$$f(\vec{x}, t) = e^{-t\sum a_{ii}} f(\langle\vec{v}_1(t), \vec{x}\rangle, ..., \langle\vec{v}_n(t), \vec{x}\rangle, 0) \qquad [27]$$

* I es la matriz unidad.

siendo los $\vec{v}_i(t)$ las soluciones del sistema:

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\vec{v}_i A \qquad [28]$$

con los valores iniciales $\vec{v}_i(0) = \vec{e}_i'(0)$ dados por [4].

El factor de normalización de la f.f. [27], que es la exponencial, se puede obtener también de la siguiente manera; $f(\vec{x}, t)$ es el resultado de efectuar en $f(\vec{y}, 0)$ el cambio:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= v_{11}(t)x_1 + \cdots + v_{1n}(t)x_n = \langle \vec{v}_1(t), \vec{x}\rangle \\ y_n &= v_{n1}(t)x_1 + \cdots + v_{nn}(t)x_n = \langle \vec{v}_n(t), \vec{x}\rangle \end{aligned}\right\} \qquad [29]$$

por tanto, la nueva f.f. es:

$$\frac{\partial(y_1, ..., y_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)} f(y_1, ..., y_n, 0) = \Delta f(\langle \vec{v}_1(t), \vec{x}\rangle, ..., \langle \vec{v}_n(t), \vec{x}\rangle, 0) \qquad [30]$$

siendo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} v_{11}(t) & \cdots & v_{1n}(t) \\ v_{21}(t) & \cdots & v_{2n}(t) \\ v_{n1}(t) & \cdots & v_{nn}(t) \end{vmatrix} \qquad [31]$$

en donde los primeros subíndices denotan el número de orden del vector y los segundos el número de orden de la componente del vector. De [31] se sigue que:

$$\frac{d\Delta}{dt} = \begin{vmatrix} v'_{11}(t) & \cdots & v_{1n}(t) \\ v'_{21}(t) & \cdots & v_{2n}(t) \\ v'_{n1}(t) & \cdots & v_{nn}(t) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} v_{11}(t) & \cdots & v'_{1n}(t) \\ v_{21}(t) & \cdots & v'_{2n}(t) \\ v_{n1}(t) & \cdots & v'_{nn}(t) \end{vmatrix} \qquad [32]$$

y por las [28] es:

$$\Delta(0) = 1 \quad ; \quad \frac{d\Delta}{dt} = -\Delta \sum a_{ii} \Rightarrow \Delta = e^{-t\sum a_{ii}} \qquad [33]$$

El paso de [32] a [33] se puede ver, así, para el primer determinante de [32] se puede sustituir la primera columna por la:

$$\begin{aligned} & a_{11}v_{11}(t) + a_{12}v_{12}(t) + \cdots + a_{1n}v_{1n}(t) \\ & a_{11}v_{21}(t) + a_{12}v_{22}(t) + \cdots + a_{1n}v_{2n}(t) \\ & a_{11}v_{n1}(t) + a_{12}v_{n2}(t) + \cdots + a_{1n}v_{nn}(t) \end{aligned} \qquad [34]$$

y, por tanto, este determinante se descompone en la suma de n determinantes, de los cuales el primero es el mismo, multiplicado por a_{11}, y los $n - 1$ determinantes restantes son nulos por tener cada uno de ellos dos columnas iguales. Lo mismo puede decirse de los $n - 1$ determinantes restantes de [32].

El método anterior es válido cuando la matriz A depende del tiempo, y únicamente en el factor de normalización de [27] hay que hacer la sustitución:

$$e^{-t\sum a_{ii}} \to e^{-\Sigma \int_0^t a_{ii}(t)\,dt} \qquad [35]$$

En G) habíamos resuelto el problema para las f.f. utilizando una ecuación lineal en derivadas parciales de primer orden, habiendo obtenido el mismo valor para el factor de normalización.

Como la f.c. y la f.f. son transformadas de Fourier, la una de la otra, es claro que las operaciones anteriores sobre funciones, o las que hicimos en G), conservan la transformabilidad de Fourier, lo que se comprueba, porque la conservación de esta transformabilidad va ligada a la del producto escalar:

$$\langle \vec{z}(m), \vec{x}(m) \rangle = \langle \vec{z}(0), \vec{x}(0) \rangle \qquad [36]$$

que es consecuencia de que el sistema ortonormal $\vec{e}_i'(0)$ da origen a dos sistemas biortogonales y normalizados:

$$\vec{e}(m) = A^m \vec{e}_i'(0) \quad ; \quad \vec{v}(m) = \vec{e}_i'(0) A^{-m} \qquad [37]$$

porque:

$$\langle \vec{v}_i(m), \vec{e}_j(m) \rangle = \langle \vec{e}_i'(0), \vec{e}_j'(0) \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \qquad [38]$$

Análogamente en el caso continuo se conserva el producto escalar:

$$\langle \vec{v}_i(t), \vec{e}_j(t) \rangle = \langle \vec{v}_i(0), \vec{e}_j(0) \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \qquad [39]$$

siendo $\vec{e}_i(t)$ y $\vec{v}_i(t)$ soluciones de [17] y [28], y también por ser $\vec{e}_i'(0)$ un sistema ortonormal, los $\vec{e}_i(t)$, $\vec{v}_i(t)$ son dos sistemas biortogonales normalizados:

$$\frac{d}{dt} \langle v_i(t), e_j(t) \rangle = -\langle \vec{v}_i(t) A, \vec{e}_j(t) \rangle + \langle \vec{v}_i(t), A\vec{e}_j(t) \rangle = 0 \qquad [40]$$

La [39] es cierta por ser nula la [40].

La matriz última de [7] es la A, y por [9] puede escribirse:

$$\begin{Vmatrix} e_{11}(m) & e_{21}(m) & \cdots & e_{n1}(m) \\ e_{12}(m) & e_{22}(m) & \cdots & e_{n2}(m) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ e_{1n}(m) & e_{2n}(m) & \cdots & e_{nn}(m) \end{Vmatrix} \qquad [41]$$

y la matriz que figura en el argumento de la función f de [23] es la del cambio de variables [29], es la:

$$\begin{Vmatrix} v_{11}(m) & v_{12}(m) & \cdots & v_{1n}(m) \\ v_{21}(m) & v_{22}(m) & \cdots & v_{2n}(m) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{n1}(m) & v_{n2}(m) & \cdots & v_{nn}(m) \end{Vmatrix} \tag{42}$$

ambas son inversas la una de la otra, porque las filas de la última matriz y las columnas de la primera son los vectores $\vec{v}_i(m)$ y $\vec{e}_i(m)$ que son biortogonales y normalizados. Por esto el determinante Δ [31] es $|A|^{-1}$. Los vectores $\vec{e}_i'(0)$ evolucionan discretamente en el tiempo, por [10] y [24] y en forma continua por [17] y [28] dando origen a dos bases biortgonales y normalizadas de R^n en cada instante. Estas bases de vectores generalizan a R^n los triedros suplementarios de la geometría euclídea tridimensiional del espacio ordinario.

La f.c. de la distribución conjunta de los valores iniciales aleatorios y de los valores en el instante m, viene dada efectuando en [12] la sustitución:

$$\langle \vec{z}, \vec{e}_i(m) \rangle \to s_i + \langle \vec{z}, \vec{e}_i(m) \rangle \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{43}$$

y análogamente para el caso continuo haciendo en [16] la sustitución:

$$\langle \vec{z}, \vec{e}_i(t) \rangle \to s_i + \langle \vec{z}, \vec{e}_i(t) \rangle \tag{44}$$

Se cumple que:

$$t_0 < t \Leftrightarrow \varphi(\vec{z}, t) = \varphi(\langle \vec{z}, \vec{e}_1(t - t_0) \rangle, \ldots, \langle \vec{z}, \vec{e}_n(t - t_0 \rangle, t_0) \tag{45}$$

y análogamente para el caso discreto.

Se pueden definir en el caso continuo una derivación respecto al tiempo de las v.a. $\vec{\xi}(t)$ definiendo ésta por el límite:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\xi}(t + \Delta t) - \vec{\xi}(t)}{\Delta t} \tag{46}$$

teniendo en cuenta la [43], la f.c. de la distribución conjunta de los valores de la v.a. $\vec{\xi}$ en t y en $t + dt$, se obtiene efectuando en [16] la sustitución:

$$\langle \vec{z}, \vec{e}_i(t) \rangle \to \langle \vec{s}, \vec{e}_i(t) \rangle + \langle \vec{z}, \vec{e}_i(t + dt) \rangle \tag{47}$$

y de aquí la f.c., de [46] se obtiene efectuando en [16] el cambio:

$$\langle \vec{z}, \vec{e}_i(t) \rangle \to - < \frac{\vec{z}}{dt}, \vec{e}_i(t) > + < \frac{\vec{z}}{dt}, \vec{e}_i(t + dt) > = < \vec{z}, \frac{d\vec{e}_i(t)}{dt} > \tag{48}$$

y la f.c. de la distribución conjunta de $\vec{\xi}(t)$ y la nueva v.a. $\vec{\xi}'(t)$ así definida, es la que resulta de hacer en [16] la sustitución:

$$\langle \vec{z}, \vec{e}_i(t) \rangle \to \langle \vec{z}, \vec{e}_i(t) \rangle + < \vec{s}, \frac{d\vec{e}_i(t)}{dt} > \qquad [49]$$

2. COMPARACION CON LAS CADENAS DE MARKOV EN POBLACIONES ALEATORIAS

En A), B) y J) hemos investigado con detalle esta problemática. Vamos a ver la analogía con el problema anterior. Si $g_0(\vec{z})$ es la función generatriz (f.g.) de la población inicial aleatoria, si esta población está subdividida en n subpoblaciones, de modo que en el tiempo los individuos pueden pasar de una subpoblación a otra, de acuerdo con una cadena discreta de Markov, cuya matriz de probabilidades de transición es la matriz estocástica A, en el instante m la población estará distribuida entre las n subpoblaciones aleatoriamente, de acuerdo con la f.g.:

$$g_m(\vec{z}) = g_0(A^m \vec{z}) \qquad [50]$$

ecuación funcional del mismo tipo que la [3].

Si la evolución de la cadena de Markov en el tiempo es continua, la ecuación funcional a que obedece la f.g. es la

$$g(\vec{z}, t + dt) = g((I + A\,dt)\vec{z}, t) \qquad [51]$$

siendo I la matriz unidad y A una matriz estocástica continua. Si la f.g. es derivable, la [51] equivale a una ecuación lineal en derivadas parciales de primer orden, porque es:

$$g(\vec{z}, t + dt) = g\left(..., z_i + dt \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j, ..., t\right) = g(\vec{z}, t) + dt\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial z_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j\right] \qquad [52]$$

y de aquí:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial z_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \qquad [53]$$

Hemos demostrado (véase bibliografía) que aun cuando la f.g. no sea derivable, la solución formal de la [53] resuelve este problema; el cual puede resolverse también por un procedimiento similar al utilizado en el apartado 1.1, como hemos hecho en J).

Si en [53] hacemos $\vec{z} = \vec{1}$, es decir todas las componentes de $\vec{z}$ iguales a la unidad, como:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0 \quad , \quad \forall i \qquad [54]$$

se obtiene:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_1 = 0 \Rightarrow g(\vec{1}, t) = g(\vec{1}, 0) = 1 \qquad [55]$$

donde por el subíndice 1 indicamos que hemos hecho $\vec{z} = \vec{1}$. Derivando [53] respecto a z_k se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g}{\partial z_k}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial z_k \partial z_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial z_i} a_{ik} \qquad [56]$$

y haciendo $\vec{z} = \vec{1}$, teniendo en cuenta la [54] y que los valores particulares de las derivadas de las z_i son los valores medios de las v.a. ξ_i se obtiene:

$$\frac{d\bar{\xi}_k}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \bar{\xi}_i \qquad [57]$$

y sumando miembro a miembro desde $k = 1$ a $k = n$, y aplicando la [54] se sigue:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d\bar{\xi}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \bar{\xi}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}_i \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k = \text{cte.} \qquad [58]$$

que expresa que la suma de los valores medios de las v.a. $\bar{\xi}_k$ es constante. Esta propiedad es más general, porque se demuestra que la población total es una v.a. independiente del tiempo, ya que su f.g. se obtiene haciendo todas las componentes del vector $\vec{z}$ iguales en la f.g., y por la [54], la [53] da:

$$z_1 = \cdots = z_n = z \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial t} = 0 \Rightarrow g(z, ..., z, t) = g(z, ..., z, 0) \qquad [59]$$

que implica que la población total es una v.a. independiente del tiempo. Por otra parte, es ta propiedad está ligada al proceso estocástico actual, porque la evolución temporal consiste en paso de individuos de una subpoblación a otra, sin creación ni destrucción de individuos.

Derivando respecto a z_h en [56], teniendo en cuenta la [54] y haciendo $\vec{z} = 1$, se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial z_h \partial z_k}\right)_1 = \sum_{i=1}^{n} \left[a_{ih}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial z_k \partial z_i}\right)_1 + a_{ik}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_h}\right)_1\right] \qquad [60]^*$$

y como las varianzas vienen dadas por:

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial z_i^2}\right)_1 + \left(\frac{\partial g}{\partial z_i}\right)_1 - \left(\frac{\partial g}{\partial z_i}\right)_1^2 \qquad [61]$$

* El subíndice 1 significa $\vec{z} = \vec{1}$.

y las covarianzas por:

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial z_i\, \partial z_j}\right)_1 - \left(\frac{\partial g}{\partial z_i}\right)_1 \left(\frac{\partial g}{\partial z_j}\right)_1 \qquad [62]$$

las [60] permiten calcular la matriz de varianzas y covarianzas y también los coeficientes de correlación.

Obsérvese que tanto los valores medios como las varianzas y covarianzas se obtienen integrando sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes.

Las fórmulas anteriores son válidas también cuando la población es cierta en vez de aleatoria.

En el caso en que la población es cierta y muy grande o siendo aleatoria se le puede aplicar los teoremas del límite central, por ejemplo, si las varianzas son muy grandes, y los cuadrados de los momentos centrales de tercer orden son muy pequeños respecto a los cubos de las varianzas, entonces las desviaciones de los valores de las subpoblaciones respecto a sus valores medios divididos por las raíces cuadradas de sus varianzas, tienden a distribuirse según una ley normal n-variante de valores medios nulos, varianzas unitarias y coeficientes de correlación, los calculados a partir de las [60], [61] y [62].

Si en $g_0(\vec{z})$ en el caso discreto y en $g(\vec{z}, 0)$ en el caso continuo efectuamos las sustituciones:

$$z_i \to \langle \vec{z}, \vec{e}_i(m) \rangle \quad ; \quad z_i \to \langle \vec{z}, \vec{e}_i(t) \rangle \qquad [63]$$

respectivamente, siendo las $\vec{e}_i$ las soluciones de la primera o segunda:

$$\vec{e}_i(m) = \vec{e}_i(m-1)A \quad ; \quad \frac{d\vec{e}_i(t)}{dt} = \vec{e}_i(t)A \qquad [63\ \text{bis}]$$

con las condiciones iniciales [4], se resuelve también el problema de las cadenas de Markov en poblaciones aleatorias (véase J), y así se consigue evitar integrar la [53].

Análogamente en el caso continuo del apartado 1.1, en vez de utilizar el método basado en las [4], [10] y [12] se puede utilizar un método similar al de este apartado, y permutando en [53] en las a_{ij} los dos subíndices i, j, se obtiene la ecuación lineal en derivadas parciales que da la f.c. de la solución del problema del apartado 1.1 en el caso continuo. Las [56], [57] y [60] son también válidas efectuando la antedicha permutación de los dos subíndices de las a, y particularmente la f.c. para $\vec{z} = \vec{0}$ (vector nulo).

3. ACOPLAMIENTOS ESTOCASTICOS DE SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y EN DIFERENCIAS FINITAS

Sean n sistemas lineales de n ecuaciones en diferencias finitas de coeficientes constantes:

$$\vec{\mu}_i(m) = A_i \vec{\mu}_i(m-1) \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad [64]$$

siendo la condición inicial para el i-ésimo sistema la:

$$\vec{\mu}_i(0) = \vec{e}_i'(0) \qquad [65]$$

con las $\vec{e}_i'(0)$ dadas por las [4]. Si hacemos

$$\vec{\xi}(m) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(0) A_i^m \vec{e}_i'(0) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(0) \vec{\mu}_i(m) \qquad [66]$$

queda automáticamente determinada la evolución del vector $\vec{\xi}(m)$ dando sus valores iniciales $\vec{\xi}(0)$, y recíprocamente dado $\vec{\xi}(m)$ queda automáticamente determinado $\vec{\xi}(0)$. Si todas las A_i fuesen iguales e iguales a la matriz A, la [[6] es la solución de [1] con los valores iniciales:

$$\vec{\xi}(0) = \|\xi_1(0), \xi_2(0), ..., \xi_{n-1}(0), \xi_n(0)\| \qquad [67]$$

de [66] se deduce para la componente ξ_j del vector $\vec{\xi}$, el valor:

$$\xi_j(m) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(0)\mu_{ij}(m) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(0) a_{i,ji}(m) \Rightarrow \vec{\xi}(m) = A(m)\vec{\xi}(0) \qquad [68]*$$

donde $A(m)$ es una matriz cuya columna de número i es la columna del mismo número i de la matriz A_i^m. La matriz $A(m)$ no es, en general, la potencia m-ésima de una matriz, con tal de que al menos dos de las A_i sean distintas, por tanto, este proceso determinista no es representable por un sistema lineal de ecuaciones en diferencias finitas. Decimos entonces que los n sistemas de n ecuaciones lineales en diferencias finitas [64] están acoplados determinísticamente.

De [68] se sigue que:

$$\vec{\xi}(0) = A^{-1}(m)\vec{\xi}(m) \qquad [69]$$

por tanto, si el vector inicial $\vec{\xi}(0)$ no es cierto, sino aleatorio, y su f.c. es la $\varphi_0(\vec{z})$, por lo visto en el apartado 1.1, la f.c. del vector aleatorio $\vec{\xi}_m$ [69] tiene por f.c. la:

$$\varphi_m(\vec{z}) = \varphi_0(\vec{z}A(m)) \qquad [70]$$

y decimos que es estocástico el acoplamiento de los n sistemas [64].

La [70] puede escribirse:

$$\varphi_m(\vec{z}) = \varphi_0(\langle \vec{z}, \vec{\mu}_1(m)\rangle, ..., \langle \vec{z}, \vec{\mu}_n(m)\rangle) \qquad [71]$$

siendo los vectores $\vec{\mu}_i(m)$ las columnas de la matriz $A(m)$ que son las soluciones de los n sistemas [64] con las condiciones iniciales [65].

Análogamente para el caso continuo, dados n sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes:

$$\frac{d\vec{\mu}_i(t)}{dt} = A_i\vec{\mu}_i(t) \quad ; \quad i = 1, 2, ..., n \qquad [72]$$

* $a_{i,ji}$ es el elemento de la fila j y columna i de la matriz A_i.

siendo la condición inicial para el i-ésimo sistema la [65], si asociamos el vector $\vec{\xi}(0)$ el $\vec{\xi}(t)$ dado por:

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(0)\vec{\mu}_i(t) \qquad [73]$$

existe una correspondencia biunívoca entre ambos, $\vec{\xi}$, y decimos que el $\vec{\xi}(t)$ es la solución de los n sistemas [64] acoplados, cuando su valor inicial es el $\vec{\xi}(0)$.

Si $\vec{\xi}(0)$ es un vector aleatorio, también lo es el $\vec{\xi}(t)$, y si la f.c. del primero es la $\varphi(\vec{z}, 0)$, la del segundo, por el mismo razonamiento que en el apartado 1.1, es:

$$\varphi(\vec{z}, t) = \varphi(\langle \vec{z}, \vec{\mu}_1(t)\rangle, ..., \langle \vec{z}, \vec{\mu}_n(t)\rangle, 0) \qquad [74]$$

siendo los vectores $\vec{\mu}_i(t)$ las soluciones de los sistemas [72] con las condiciones iniciales [65]. Decimos entonces que es estocástico el acoplamiento de los n sistemas de ecuaciones diferenciales lineales [72].

Los resultados obtenidos en este apartado son independientes de que los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales o en diferencias finitas sean de coeficientes constantes o variables en el tiempo. Y su los n sistemas [64] o [72] son iguales, entonces se obtienen los resultados del apartado 1.1.

4. ACOPLAMIENTOS ESTOCASTICOS DE CADENAS DE MARKOV EN POBLACIONES CIERTAS O ALEATORIAS

Si $A_1, ..., A_n$ son las matrices de las probabilidades de transición de n cadenas de Markov y si $\vec{p}(0)$ es un vector de probabilidad, se le puede asociar otro vector de probabilidad $\vec{p}(m)$ definido por:

$$\vec{p}(m) = \sum_{i=1}^{n} p_i(0)\vec{e}_i'(0)A_i^m = \sum_{i=1}^{n} p_i(0)\vec{v}_i(m) \qquad [75]$$

donde las $\vec{e}_i'(0)$ tienen el significado [4]. Los $\vec{v}_i(m)$ son los vectores de probabilidad definidos por:

$$\vec{v}_i(m) = \vec{v}_i(m-1)A_i \quad ; \quad \vec{v}_i(0) = \vec{e}_i'(0) \quad ; \quad i = 1, ..., n \qquad [76]$$

Para la componente j del vector $\vec{p}(m)$ se obtiene:

$$p_j(m) = \sum_{i=1}^{n} p_i(0)v_{ij}(m) \Rightarrow \vec{p}(m) = \vec{p}(0)\begin{Vmatrix} v_{11}(m) & v_{12}(m) & \cdots & v_{1n}(m) \\ v_{21}(m) & v_{22}(m) & \cdots & v_{2n}(m) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{n1}(m) & v_{n2}(m) & \cdots & v_{nn}(m) \end{Vmatrix} \qquad [77]$$

donde el primer subíndice de las $\vec{v}$ denota el número de orden del vector $\vec{v}_i$ y el segundo la componente j del antedicho vector.

También se obtiene:

$$p_j(m) = \sum_{i=1}^{n} p_i(0)a_{i,ij}(m) \qquad [78]$$

donde por $a_{i,ij}$ denotamos el elemento de la fila i, columna j, de la matriz A_i. Por tanto:

$$\vec{p}(m) = \vec{p}(0)A(m) \qquad [79]$$

siendo $A(m)$ una matriz estocástica, cuya fila i es la i-ésima fila de la potencia m-ésima de la matriz A_i: A_i^m. La matriz $A(m)$ no es en general la potencia m-ésima de una matriz estoćatica, y es igual a la matriz de [77].

Decimos que las n cadenas de Markov de matrices de probabilidades de transición A_i están acopladas estocásticamente.

Si como en el apartado 1.2 es $g_0(\vec{z})$ la f.g. de la población aleatoria, subdividida en n subpoblaciones, la f.g. en el instante m es:

$$g_m(\vec{z}) = g_0\big(A(m)\vec{z}\big) = g_0\big(\langle\vec{v}_1(m), \vec{z}\rangle, ..., \langle\vec{v}_n(m), \vec{z}\rangle\big) \qquad [80]$$

El caso continuo se resuelve de la misma manera, el vector de probabilidad $\vec{p}(t)$ en el instante t viene dado por:

$$\vec{p}(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i(0)\vec{v}_i(t) \qquad [81]$$

y la f.g. de la población aleatoria en el instante t viene dada en función de la inicial por:

$$g(\vec{z}, t) = g\big(\langle\vec{v}_1(t), \vec{z}\rangle, ..., \langle\vec{v}_n(t), \vec{z}\rangle, 0\big) \qquad [82]$$

siendo los vectores $\vec{v}_i(t)$ las soluciones de los n sistemas lineales de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\vec{v}_i(t)}{dt} = \vec{v}_i(t)A_i(t) \quad ; \quad i = 1, ..., n \qquad [83]$$

con las condiciones iniciales:

$$\vec{v}_i(0) = \vec{e}_i'(0) \qquad [84]$$

Si las n matrices estocásticas son regulares, entonces existe el límite:

$$\lim_{m\to\infty} A(m) = A(\infty) \qquad [85]$$

que es una matriz estocástica, cuyas filas son:

$$\lim_{m\to\infty} \vec{v}_i(m) = \vec{v}_i(\infty) \quad ; \quad i = 1, ..., n \qquad [86]$$

y es:

$$\vec{p}(\infty)=\vec{p}(0)A(\infty) \quad ; \quad g(\vec{z},\infty)=g(\langle\vec{v}_1(\infty),\vec{z}\rangle,\dots,\langle\vec{v}_n(\infty),\vec{z}\rangle,0)=g(A(\infty)\vec{z},0) \qquad [87]$$

No se cumple el teorema ergódico para los vectores de probabilidad.

Si las n matrices A_i son biestocásticas, entonces es:

$$\vec{p}(\infty)=\left\|\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}\right\| \quad ; \quad g(\vec{z},\infty)=g\left(\frac{z_1+\cdots+z_n}{n},\dots,\frac{z_1+\cdots+z_n}{n},0\right) \qquad [88]$$

y sí se cumple el teorema ergódico para los vectores de probabilidad.

A los mismos resultados se llega para cadenas de Markov continuas en el tiempo.

La f.g. de la distribución conjunta de los valores iniciales y finales de la población, se obtiene sustituyendo los productos escalares de las f.g. [80] y [82] por el producto de las mismas para la s_i correspondiente, en el caso de la [80] el cambio sería:

$$\langle v_i(m),\vec{z}\rangle \rightarrow s_i\langle\vec{v}_i(m),\vec{z}\rangle \qquad [89]$$

la letra s_i se refiere a un valor inicial y las z a los valores finales.

El significado del acoplamiento estocástico de las cadenas de Markov es el siguiente. Si el sistema (la población) se encuentra inicialmente en el estado E_i (subpoblación) evoluciona en el tiempo de acuerdo con una cadena de Markov de matriz A_i.

El mismo significado tiene el proceso del apartado 1.3 para el vector de estado.

5. FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE VARIABLES ALEATORIAS CORRELACIONADAS CASI CIERTAMENTE IGUALES. FUNCIONES DIAGONALES

Sean $\varphi(t)$ la f.c. y $F(x)$ la función de distribución (f.d.) de una v.a., la f.c. es la transformada de Stieltjes-Fourier de la f.d.:

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x) \qquad [90]$$

Vamos a demostrar que la f.d. de la v.a. bivariante, cuya f.c. es la $\varphi(t+s)$, es la:

$$G(x,y)=\begin{cases} x\leqslant y,\ F(x)\\ y\leqslant x,\ F(y)\end{cases} \Leftrightarrow G(x,y)=F(\text{mín}\,(x,y)) \qquad [91]$$

Sea un rectángulo de lados paralelos a los ejes de coordenadas $ABCD$, donde A es el vértice inferior izquierdo y los vértices siguen el orden contrario a las agujas del reloj. Se tiene para la integral de Stieltjes el valor:

$$\iint_{ABCD} d^2G(x,y)=G(A)-G(B)+G(C)-G(D) \qquad [92]$$

donde por A, B, C, D indicamos la sustitución de sus coordenadas cartesianas en la función G [91]. Si $ABCD$ está por encima de la diagonal del primer y tercer cuadrante δ:

$$\delta \equiv x = y \tag{93}$$

son las abscisas inferiores a las ordenadas, y es:

$$x_A = x_D \quad ; \quad x_B = x_C \tag{94}$$

luego [92] vale:

$$F(x_A) - F(x_B) + F(x_C) - F(x_D) = 0 \tag{95}$$

Si $ABCD$ está por debajo de dicha diagonal, es:

$$y_A = y_B \quad ; \quad y_C = y_D \tag{96}$$

siendo las ordenadas inferiores a las abscisas, y la [92] vale:

$$F(y_A) - F(y_B) + F(y_C) - F(y_D) = 0 \tag{97}$$

Si A y C están sobre la diagonal, es:

$$x_A = y_A = y_B < x_B \quad ; \quad x_C = y_C \quad ; \quad x_A = x_D < y_D = y_C \tag{98}$$

luego la [92] vale:

$$F(x_A) - F(y_B) + F(x_C) - F(x_D) = F(x_C) - F(x_A) \tag{99}$$

Por tanto, si S es el área interior a una curva cerrada es:

$$\iint_S d^2G(x, y) = \int_E dF(x) \quad ; \quad E = S \cap \delta \tag{100}$$

y en particular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx + isy}\, d^2G(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t+s)x}\, dF(x) = \varphi(t + s) \tag{101}$$

lo que demuestra la proposición enunciada al principio del apartado 1.5.

Se tiene también, en virtud de la demostración anterior, que:

$$G(a, b) = \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} d^2G(x, y) = F(\text{mín}\,(a, b)) \tag{102}$$

es decir:

$$\text{Prob}\,(-\infty < \xi \leqslant a,\ -\infty < \mu \leqslant b) = \begin{cases} \text{Prob}\,(-\infty < \xi \leqslant a),\ a < b \\ \text{Prob}\,(-\infty < \mu \leqslant b),\ b < a \end{cases} \tag{103}$$

y:

$$\forall \varepsilon > 0 : \text{Prob}\,(|\xi - \mu| > \varepsilon) < \varepsilon \Leftrightarrow \text{Prob}\,(|\xi - \mu| = 0) = 1 \qquad [104]$$

ambas v.a. correlacionadas ξ y μ de f.d. [91] son casi ciertamente iguales.

Se demuestra como consecuencia de lo anterior que la f.d. de la f.c. $\varphi(at + bs)$ es la:

$$F\left(\text{mín}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)\right) \qquad [105]$$

La $\varphi(t_1 + t_2 + \cdots + t_n)$ es la f.c. de una v.a. n-variante, cuya f.d. es:

$$F(\text{mín}\,(x_1, x_2, ..., x_n)) \qquad [106]$$

porque se demuestra por un procedimiento similar al de dos variables, que si δ_n es la recta que en el espacio euclídeo de n dimensiones, tiene por ecuación:

$$\delta_n \equiv x_1 = x_2 = \cdots = x_n \qquad [107]$$

entonces si V representa el volumen interior a una hipersuperficie cerrada de dicho espacio n-dimensional, es:

$$\int\!\!\int \cdots \int_V d^n F(\text{mín}\,(x_1, ..., x_n)) = \int_E dF(x) \quad ; \quad \delta_n \cap V = E \qquad [108]$$

También se demuestra de forma similar que si $\varphi(t, v)$ es la f.c. de una v.a. bivariante y $F(x, z)$ es la f.d., entonces $\varphi(t + s, v)$ es la f.c. de la v.a. trivariante, cuya f.d. es la:

$$F(\text{mín}\,(x, y), z) \qquad [109]$$

y si Δ es el plano de ecuación:

$$\Delta \equiv y = x \qquad [110]$$

y V el volumen interior a una superficie cerrada, es:

$$\int\!\!\int\!\!\int_V d^3 F(\text{mín}\,(x, y), z) = \int\!\!\int_E d^2 F(x, y) \quad ; \quad V \cap \Delta = E \qquad [111]$$

resultado que se puede extender a n variables, de las cuales m ($m < n$) aparecen en el argumento de la f.c. por su suma.

La profesora M.ª Dolores Maravall Gómez-Allende ha investigado exhaustivamente la integración de sistemas de dos ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, cuando los valores iniciales son aleatorios*, obteniendo para la f.c. de

* Véanse sus trabajos «Contribución a la teoría del péndulo estocástico», *Revista de la Real Academia de Ciencias*, 1980, y «Osciladores estocásticos lineales», *Comunicaciones del Instituto Nacional de Investigaciones Agrarias*, 1981.

la v.a. solución, convenientemente amplificada o reducida a escala exponencial una función dependiente del tiempo t, tal que:

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(z, v, t) = \psi(az + bv) \quad [112]$$

En este caso anterior este resultado se obtiene como consecuencia del cálculo, ya que en el caso de sistemas de dos ecuaciones, los cálculos se pueden realizar íntegramente. En I) utilizando el cálculo matricial en los argumentos de la f.c. he demostrado que este resultado se mantiene para n variables, es decir, que:

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(z_1, ..., z_n, t) = \psi(a_1 t_1 + \cdots + a_n t_n) \quad [113]$$

cuya f.d. es:

$$F\left(\min\left(\frac{x_1}{a_1}, ..., \frac{x_n}{a_n}\right)\right) \quad [114]^*$$

6. LAS FUNCIONES DIAGONALES Y LAS FUNCIONES UNIDAD DE HEAVISIDE Y DELTA DE DIRAC DE DOS VARIABLES

Utilizando el cálculo operativo con la función unidad de Heaviside $U(x - y)$ de dos variables:

$$U(x - y) = \begin{cases} 0, & x < y \\ \frac{1}{2}, & x = y \\ 1, & x > y \end{cases} \quad [115]$$

y la función delta de Dirac, $\delta(x - y)$ de dos variables:

$$\int_{-\infty}^{x<y} \delta(z - y)\, dz = 0 \quad ; \quad \int_{-\infty}^{x=y} \delta(z - y)\, dz = \frac{1}{2} \quad ; \quad \int_{-\infty}^{x>y} \delta(z - y)\, dz = 1 \quad [116]$$

(véase bibliografía L y M) se puede obtener la inversión de la transformada de Stieltjes-Fourier [101]. Supongamos la integral:

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} e^{-i(tx + sy)} \varphi(t + s)\, dt + ds \quad [117]$$

si hacemos el cambio de variable de t,s a $t + s, s$ se obtiene:

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-(a+b)}^{a+b} e^{-i(t+s)x}\, d(t + s) \int_{-b}^{b} e^{-is(y-x)}\, ds \quad [118]$$

* Siendo $F(x)$ la f.d. de la f.c. $\psi(t)$.

teniendo en cuenta que:

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b} e^{-is(y-x)}\,ds = \delta(y-x) \qquad [119]$$

haciendo tender b a infinito en [118], multiplicando por dy e integrando desde $-\infty$ a y, supuesto $x < y$ (límite superior de la integral [120]) se obtiene:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{y} \delta(y-x)\,dy \int_{-(a+b)}^{a+b} e^{-i(t+s)x}\varphi(t+s)d(t+s) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-(a+b)}^{a+b} e^{-i(t+s)x}\varphi(t+s)d(t+s) \qquad [120]$$

y multiplicando esta última por dx e integrando desde x_1 a x_2, siendo $x_1 < x_2 < y$ (límite superior de la integral de [120]), se obtiene:

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-(a+b)}^{a+b} \frac{e^{-i(t+s)x_1} - e^{-i(t+s)x_2}}{i(t+s)}\varphi(t+s)d(t+s) = F(x_2) - F(x_1) \quad [121]$$

por ser $F(x)$ la f.d. de la f.c. $\varphi(t)$, y análogamente si $y < x$, permutando en las integrales anteriores los papeles jugados por x e y, se obtendría $F(y_2) - F(y_1)$. Esto constituye la fórmula de inversión de la transformada de Stieltjes-Fourier [101].

A la [91] se le puede dar la forma:

$$G(x, y) = F(x)U(y-x) + F(y)U(x-y) \qquad [122]$$

La v.a. bivariante es absolutamente continua, si $F(x)$ es derivable, $dF(x)/dx = f(x)$, entonces se cumple que:

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx-isy}\varphi(t+s)\,dt\,ds = f(x)\delta(x-y) \qquad [123]$$

por ser:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)\,dt = f(x) \qquad [124]$$

lo que se deduce de las integrales anteriores [101] y [117] a [120].

En un sentido generalizado de la derivación, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x\,\partial y} = f(x)\delta(x-y) \quad ; \quad G(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x)\delta(x-y)\,dx\,dy \quad [125]$$

En las fórmulas anteriores se puede sustituir $f(x)$ por una función $f(x, y)$ tal que $f(x, x) = f(x)$.

En particular, si:

$$G(x, y) = \text{mín}\,(x, y) \quad ; \quad 0 \leqslant x, y \leqslant 1 \qquad [126]$$

es:

$$\frac{\partial^2 \text{mín}\,(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \delta(x - y) \quad ; \quad \text{mín}\,(x, y) = \int_0^x \int_0^y \delta(x - y)\, dx\, dy \qquad [127]$$

La representación gráfica tridimensional de la función [126] es curiosa. Así como la $\delta(x - a)$ es la f.f. de la v.a. casi ciertamente igual al número real a, la $\delta(x - y)$ es la f.f. de una v.a. bivariante concentrada sobre la diagonal del cuadrado unidad y repartida uniformemente al azar sobre la misma.

Las propiedades anteriores se conservan aun cuando las F y las φ no sean f.d. y f.c.

Llamamos funciones diagonales a aquellas cuyos argumentos dependen del valor mínimo de todas sus variables, y sus transformadas de Stieltjes-Fourier son funciones, cuyo argumento es la suma de todas sus variables.

En los casos prácticos el criterio más sencillo de reconocer si una sucesión de v.a. n-variantes dependientes de un índice discreto o continuo tienden, al tender este índice a un límite, a una v.a. n-variante de componentes casi ciertamente iguales y de f.d. una función diagonal, es a través del límite de su f.c.:

$$\lim_{a \to a_0} \varphi(t_1, ..., t_n, a) = \psi(t_1 + \cdots + t_n) \qquad [128]$$

Para las f.d. sería:

$$\lim_{a \to a_0} F(x_1, ..., x_n, a) = H\big(\text{mín}\,(x_1, ..., x_n)\big) \qquad [129]$$

siendo el primer miembro de [129] la f.d. de la f.c. del primer miembro de [128] y $H(x)$ la f.d. de la f.c. $\psi(t)$. En la práctica es mucho más difícil de reconocer un límite como [129] que otro como [128].

Si las v.a. son absolutamente continuas, como las f.f. en el límite dependen de deltas de Dirac, que no son funciones ordinarias, el límite lo es en sentido generalizado y no en el ordinario del análisis matemático clásico. Pero sin embargo para las f.d. de la distribución marginal de una cualquiera de las v.a. se cumple:

$$\begin{gathered} g_i(x_i, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_n, a)\, dx_1 \cdots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \cdots dx_n \\ \forall i\colon \lim_{a \to a_0} g_i(x, a) = h(x_i) \; ; \; h(x) = \frac{dH(x)}{dx} \end{gathered} \qquad [130]$$

En trabajos anteriores (véase M) hemos demostrado la no unicidad de la transformación de Fourier para f.f. que sean funciones generalizadas en vez de funciones ordinarias, y aquí en [125] hemos visto que las derivadas de las funciones diagonales no son únicas, salvo en el caso de la [126].

7. UN TEOREMA SOBRE EL COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE LAS V.A. SOLUCIONES DE SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y EN DIFERENCIAS FINITAS, CUANDO LOS VALORES INICIALES SON ALEATORIOS

En I) hemos demostrado que para los sistemas del apartado 1.1 de esta memoria, cuando los coeficientes son constantes, al tender el tiempo a infinito, la f.c. de las v.a.:

$$\frac{\xi_i(t)e^{-pt}}{t^{h-1}} \quad ; \quad i = 1, ..., n \qquad [131]$$

si p es la raíz de la ecuación característica del sistema que es real y además mayor que las partes reales de todas las otras raíces, y h su grado de multiplicidad, tiende a la siguiente función:

$$t \to \infty \Rightarrow \varphi\big(b_1(a_1z_1 + \cdots + a_nz_n), ..., b_n(a_1z_1 + \cdots + a_nz_n), 0\big) \qquad [132]$$

en el caso en que la raíz p es simple ($h = 1$), se tiene la simplificación:

$$h = 1 \Rightarrow b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1 \qquad [133]$$

La [132] es de la forma [113], lo que muestra que las v.a.:

$$\mu_i(t) = \frac{\xi_i(t)e^{-pt}}{a_i t^{h-1}} \qquad [134]$$

cuando el tiempo tiende a infinito, tiende a ser casi ciertamente iguales y su función de distribución tiende a una función diagonal. Se cumple, por tanto, que:

$$\forall i, \forall j, \forall \varepsilon > 0\colon \exists\, T/\forall t > T\colon \text{Prob}\,(|\mu_i(t) - \mu_j(t)| > \varepsilon) < \varepsilon \qquad [135]$$

Por otra parte, para la f.c. de la distribución marginal de una cualquiera de las $\mu_i(t)$, se obtiene cuando el tiempo tiende a infinito:

$$\varphi(b_1z_i, b_2z_i, ..., b_nz_i, 0) \qquad [136]$$

la misma expresión para todas. La [136] muestra que la $\mu_i(\infty)$ es una combinación lineal:

$$\mu_i(\infty) = \sum_{j=1}^{n} b_j\xi_j'(0) \qquad [138]$$

de n v.a. correlacionadas, que tienen la misma f.c. y, por tanto, la misma distribución de probabilidad que las n v.a. $\xi_i(0)$, valores iniciales del sistema [14].

Ahora bien, la f.c. de la distribución conjunta de los valores iniciales del sistema [14], letras s, y de las $\mu_i(\infty)$, letras z, es:

$$\varphi\big(s_1 + b_1(z_1 + \cdots + z_r), ..., s_n + b_n(z_1 + \cdots + z_n), 0\big) \qquad [138]$$

y, por tanto, la f.c. de la v.a. diferencia de las v.a.:

$$\sum_{i=1}^{n} (\mu_i(\infty) - nb_i\xi_i(0)) \qquad [139]$$

que se obtiene haciendo:

$$z_1 = \cdots = z_n = z \quad ; \quad s_1 = -nb_1 z, ..., s_n = -nb_n z \qquad [140]$$

en la [138] es:

$$\varphi(0, 0, ..., 0, 0) = 1 \qquad [141]$$

que muestra que la v.a. [139] converge en probabilidad a cero.

Se cumple, por tanto, que:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, T/\forall t > T\text{: Prob}\left(\left|\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) - nb_i\xi_i(0)\right)\right| > \varepsilon\right) < \varepsilon \qquad [142]$$

De [135] y de [142] se sigue que:

$$\forall i,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, T/\forall t > T\text{: Prob}\left(\left|\mu_i(t) - \sum_{j=1}^{n} b_j\xi_j(0)\right| > \varepsilon\right) < \varepsilon \qquad [143]$$

Propiedad que también puede demostrarse directamente, porque la f.c. de la distribución marginal de una cualquiera de las $\mu_i(\infty)$ y de todas las $\xi_j(0)$ es la:

$$\varphi(s_1 + b_1 z_i, ..., ..., s_n + b_n z_i, 0) \qquad [144]$$

y de aquí la f.c. de la v.a.:

$$\mu_i(\infty) - \sum_{j=1}^{n} b_j\xi_j(0) \qquad [145]$$

es la [141] que muestra que la v.a. [145] converge en probabilidad a cero.

Se puede enunciar el siguiente teorema: *las v.a. soluciones de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes (o en diferencias finitas), cuando los valores iniciales son aleatorios y el tiempo tiende a infinito, convenientemente amplificadas o reducidas a escala exponencial, tienden a ser casi ciertamente iguales y una cualquiera de ellas converge en probabilidad a una combinación lineal de los valores iniciales aleatorios.*

Existe amplificación o reducción a escala exponencial de las v.a. soluciones del sistema, según que p (real) sea positivo o negativo. En el caso en que p es cero no hay reducción ni amplificación exponencial, y si siendo cero es raíz múltiple de multiplicidad h, hay reducción a escala potencial, todo lo cual se deduce de las [131] a [134].

El cálculo exacto de los coeficientes $a_1, ..., a_n$ y $b_1, ..., b_n$ ha sido hecho en el I).

BIBLIOGRAFIA

Los libros del autor a los que se hace referencia son:

A) *Cálculo de probabilidades y procesos estocásticos*, Paraninfo, 1974.
B) *Matemática financiera*, Dossat, 1970.
C) *Fundamentos de mecánica cuántica*, E.T.S. de Ingenieros Agrónomos, distribuido por Paraninfo, 1979.
D) *Líneas de investigación en los procesos estocásticos y el movimiento browniano*, Instituto de España, 1975.
E) *Diccionario de matemática moderna*, 2.ª ed., Editora Nacional, 1982.
F) *Introducción a la investigación en física y matemáticas*, Empeño 14, 1982.

Y las memorias publicadas en la *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales:*

G) *Ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales con condiciones iniciales aleatorias*, 1978.
H) *Ecuaciones en diferencias finitas y ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes aleatorios*, 1978.
I) *Comportamiento asintótico y soluciones invariantes de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales y en diferencias finitas con valores iniciales aleatorios y teoría estocástica del control*, 1980.
J) *Cadenas de Markov en poblaciones aleatorias y probabilidades en cadena generalizadas*, 1981.

Y la publicada en el *Boletinul Institutului Politehnic din Iasi:*

K) *La integración de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con valores iniciales aleatorios*, 1978.

Para el apartado 1.6 pueden consultarse los libros del autor:

L) *Ecuaciones diferenciales y matrices*, 1965.
M) *Física matemática, 1966*, Dossat.