INTEGRACION DE FUNCIONES CON VALORES EN UN ESPACIO LOCALMENTE CONVEXO RESPECTO DE MEDIDAS INFINITAS. IV

Baltasar Rodríguez-Salinas

Recibido: 5 de mayo 1982

In this work it's studied the integration of functions valued in a locally convex space with respect to infinite measures. In [5] we have studied this case for finite measures, in relation with Radon-Nikodym theorem and property.

The work has four parts. In the first one [8] we treat μ-measurable and $\bar{\mu}$-measurable functions, in the second part μ-integrable functions are studied. The third part treats about the $\bar{\mu}$-integrable and the absolutely integrable functions. And finally, here in the fourth part we treat about the μ-equivalence classes and the essential range.

En este trabajo se estudia la integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo respecto de medidas infinitas. El caso de medidas finitas lo hemos estudiado en [5] en relación con el teorema y la propiedad de Radon-Nikodym.

El trabajo consta de cuatro partes. En la primera parte [8] tratamos de las funciones μ-medibles y $\bar{\mu}$-medibles. En la segunda [9] de las funciones μ-integrables. En la tercera de las funciones $\bar{\mu}$-integrables y de las funciones absolutamente integrables. Finalmente, aquí en la cuarta parte, tratamos de las clases de μ-equivalencia y del rango esencial.

1. Clases de μ-equivalencia

Utilizaremos las notaciones empleadas anteriormente. En particular, supondremos que E es un e. l. c. s. polar semi-reflexivo y que μ es una medida esencial sobre una σ-álgebra Σ de subconjuntos de un conjunto Ω. Además supondremos que μ es una medida completa.

1. Definición.—Dos funciones f y g: $\Omega \longrightarrow E$ se dicen μ-*equivalentes* y se escribe $f \cong g$ si

$$\mu\left(\{t \in \Omega : p\,(f(t) - g\,(t)) \neq 0\}\right) = 0$$

para toda seminorma continua p sobre E. En particular, si E es metrizable para una topología vectorial menos fina que la original, existe una sucesión $(U_n)_1^\infty$ de entornos de 0 tal que

$$\bigcap_1^\infty U_n = \{0\}$$

y, equivalentemente, una sucesión $(p_n)_1^\infty$ de seminormas continuas sobre E tal que

$$\{x \in E : p_n\,(x) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbf{N}\} = 0$$

y, por tanto, $f \cong g$ si y sólo si $f = g$ en casi todo Ω.

2. Proposición.—*Para funciones* $\Omega \longrightarrow E$ *cualesquiera se verifica:*

2.1. *Si* $f_1 \cong f_2$ *y* $g_1 \cong g_2$, *se tiene* $a\,f_1 + b\,g_1 \cong a\,f_2 + b\,g_2$.

2.2. *Si* $f_n \cong g_n$ *para todo* $n \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_n f_n = f$ *y* $\lim\limits_n g_n = g$, *se tiene* $f \cong g$.

2.3. *Si* f *y* g *son* μ*-integrables y* $f \cong g$, *se tiene*

$$\int_A f\,d\,\mu = \int_A g\,d\,\mu$$

para todo $A \in \Sigma$. *Más aún, si* f *es* $\bar{\mu}$*-integrable (resp.* μ*-integrable) y* $f \cong g$, g *es* $\bar{\mu}$*-integrable (resp.* μ*-integrable).*

Demostración.—Inmediata.

3. Proposición.—*Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio estrictamente localizable. Entonces existe un lifting sobre el álgebra de las funciones reales o complejas* Σ*-medibles acotadas (véase A. y C. Ionescu Tulcea* [4], 45-53). *Para este lifting* ρ *existe otro lifting sobre* $S = S\,(\Sigma, E)$, *que denotaremos también por* ρ, *con las propiedades:*

3.1. *Si* f $\in$ *S*, *se tiene* ρ (f) $\in$ *S*.

3.2. ρ (f) $\cong$ f.

3.3. f $\cong$ g *si y sólo si* ρ (f) = ρ (g).

3.4. ρ (a f + b g) = a ρ (f) + b ρ (g).

3.5. ρ (φ f) = ρ (φ) ρ (f) *para toda función real o compleja* Σ-*medible y acotada* φ.

3.6. h $\circ$ ρ (f) = ρ (h $\circ$ f) *para toda función real o compleja continua* h *sobre E. En particular, para* h = x' $\in$ *E' y cuando* h *es una seminorma continua* p *sobre E*.

DEMOSTRACIÓN.—Sea f una función débilmente medible tal que $f(\Omega)$ es precompacto (o relativamente compacto). Evidentemente, existe un $\rho(f)(t) \in E'^*$ que verifica

$$< \rho(f)(t), x' > = \rho(< f, x' >)(t) \qquad (t \in \Omega)$$

para todo $x' \in E'$. Además

$$\rho(f)(t) \in f(\Omega)^{00} \subset E,$$

puesto que $f(\Omega)$ es precompacto y E polar semi-reflexivo, siendo $f(\Omega)^{00}$ la bipolar de $f(\Omega)$ en E'^*.

3.4 y 3.5. Resultan inmediatamente de la definición de $\rho(f)$.

3.1. Es claro que $\rho(f) \in S_0$ si $f \in S_0$. Además, si $(f_i)_{i \in I}$ es una red de funciones $f_i \in S_0$ que converge uniformemente a $f \in S$, se tiene que $(\rho(f_i))_{i \in I}$ converge uniformemente a $\rho(f)$ puesto que, si U es un entorno absolutamente convexo y cerrado de 0 en E, existe un $i_0 \in I$ tal que $f_i(t) - f(t) \in U$ para todo $t \in \Omega$ y todo $i \geqslant i_0$ y, por tanto,

$$\rho(f_i)(t) - \rho(f)(t) \in (f_i - f)(\Omega)^{00} \subset U$$

para todo $t \in \Omega$ y todo $i \geqslant i_0$.

3.6. Sea $\mathcal{H}$ el álgebra engendrada por las funciones

$$\begin{aligned} f(\Omega)^{00} &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto \mathrm{Re} < x, x' > \quad (x' \in E') \end{aligned}$$

y las funciones constantes sobre el subconjunto compacto $K = f(\Omega)^{00}$ de E. Se ve inmediatamente que $\mathcal{H}$ satisface las condiciones requeridas para poder aplicar el teorema de Stone-Weierstrass. Por tanto, $\mathcal{H}$ es densa en C (K).

Como evidentemente $\rho(h \circ f) = h \circ \rho(f)$ para toda función $h \in \mathcal{H}$ y, para toda red $(h_i)_{i \in I}$ en $\mathcal{H}$ convergente uniformemente a $h \in C(E)$ sobre E, se tiene que $(\rho(h_i \circ f))_{i \in I}$ converge uniformemente a $\rho(h \circ f)$ sobre Ω, resulta 3.6.

3.2. De

$$x' \circ \rho(\rho(f)) = \rho(\rho(x' \circ f)) = \rho(x' \circ f) = x' \circ \rho(f)$$

para todo $x' \in E'$, resulta $\rho(\rho(f)) = \rho(f)$ y, por tanto, 3.2 puesto que

$$\rho(p \circ (\rho(f) - f)) = p \circ (\rho(\rho(f)) - \rho(f)) = 0$$

para toda seminorma continua p sobre E.

3.3. De

$$p(\rho(f) - \rho(g)) = \rho(p(f - g))$$

resulta inmediatamente 3.3.

4. Proposición.—*Si* f : $\Omega \longrightarrow E$ *es una función* μ*-medible y* h *es una función real o compleja continua sobre E, se tiene que* $h \circ f$ *es* μ*-medible. Por tanto,* f *es una función de Baire, esto es, si F es el conjunto de los ceros de una función real continua* h *sobre E, se tiene* $f^{-1}(F) \in \Sigma$. *De manera análoga, si* f : $\Omega \longrightarrow E$ *es* $\bar{\mu}$*-medible y* h *es una función real o compleja uniformemente continua sobre E,* $h \circ f$ *es* μ*-medible.*

Demostración.—De la demostración de la proposición anterior se deduce que $h \circ f$ es simple cuando f es simple. Sea f μ-medible y $A \in \Sigma_0$, entonces existe una sucesión de conjuntos disjuntos $K_n \in \Sigma_A(f)$ tales que

$$\mu\left(A - \bigcup_1^\infty K_n\right) = 0$$

y, por tanto,

$$h \circ f = \sum_1^\infty [h \circ (f \chi_{K_n})] \chi_{K_n}$$

en casi todo A, de donde resulta que $h \circ f$ es μ-medible puesto que cada función $f\chi_{K_n}$ es simple. La última parte de la proposición es inmediata.

5. PROPOSICIÓN.—*Sea* h *una función real o compleja uniformemente continua sobre E. Si* f: $\Omega \longrightarrow E$ *es una función totalmente μ-medible, se tiene que* $h \circ f$ *es totalmente μ-medible. Si* f: $\Omega \longrightarrow E$ *es totalmente $\bar{\mu}$-medible,* $h \circ f$ *es totalmente μ-medible.*

DEMOSTRACIÓN.—Inmediata.

6. DEFINICIÓN.—Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida estrictamente localizable y ρ un lifting sobre $S = S(\Sigma, E)$. Si f es una función μ-medible, se escribe $\rho[f] = f$ para denotar que, para todo $A \in \Sigma_0$, existe una sucesión $(K_n)_1^\infty$ de conjuntos disjuntos $K_n \subset A$ de medida finita tales que $f\chi_{K_n} \in S$ para todo $n \in \mathbf{N}$,

$$\mu\left(A - \bigcup_1^\infty K_n\right) = 0$$

y

$$f = \sum_1^\infty \rho\,(f\chi_{K_n})$$

en casi todo A.

7. PROPOSICIÓN.—$\rho[f] = f$ *si y sólo si existe una familia $(K_i)_{i \in I}$ de conjuntos disjuntos de medida finita tales que* $f\chi_{K_i} \in S$ *para todo* $i \in I$,

$$\mu\left(\Omega - \bigcup_{i \in I} K_i\right) = 0$$

y, para todo $A \in \Sigma_0$, existe una subfamilia contable $J \subset I$ tal que

$$\mu\left(A - \bigcup_{i \in J} K_i\right) = 0,$$

y

$$f = \sum_{i \in I} \rho \, (f \, \chi_{K_i})$$

en casi todo Ω.

DEMOSTRACIÓN.—En efecto, por ser (Ω, Σ, μ) estrictamente localizable, existe una familia $(H_i)_{i \in I}$ de conjuntos disjuntos de medida finita tales que

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} H_i$$

y, para todo $A \in \Sigma_0$, hay una subfamilia contable $J \subset I$ tal que

$$\mu \left(A - \bigcup_{i \in J} H_i \right) = 0.$$

Entonces, por la definición 6, para cada $i \in I$, existe una sucesión $(K^i_n)_1^\infty$ de conjuntos medibles disjuntos, tales que $K^i_n \subset H_i$ y $f \chi_{K^i_n} \in S$ para todo $n \in \mathbf{N}$,

$$\mu \left(H_i - \bigcup_{n=1}^{\infty} K^i_n \right) = 0$$

y

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \rho \, (f \, \chi_{K^i_n})$$

en casi todo H_i. Es fácil probar ahora que la familia $(K^i_n)_{(i, n) \in I \times \mathbf{N}}$ verifica las condiciones requeridas y, en particular,

$$f = \sum_{i \in I, \, n \in N} \rho \, (f \, \chi_{K^i_n})$$

en casi todo Ω.

Recíprocamente, sea $(K_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos disjuntos de medida finita en las condiciones indicadas anteriormente. Sea $A \in \Sigma_0$, entonces existe una subfamilia contable $J \subset I$ tal que

$$\mu\left(A - \bigcup_{i \in J} K_i\right) = 0$$

y, por tanto,

$$\mu\left(A \cap \bigcup_{i \notin J} K_i\right) = 0,$$

de donde resulta

$$f = \sum_{i \in J} \rho\,(f\,\chi_{A \cap K_i})$$

en casi todo A.

8. Proposición.—*Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio estrictamente localizable y* ρ *un lifting sobre* $S(\Sigma, E)$. *Si* $\rho\,[\mathbf{f}] = \mathbf{f}$, $\rho\,[\mathbf{g}] = \mathbf{g}$ *y* $\mathbf{f} \cong \mathbf{g}$, *entonces* $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ *en casi todo* Ω.

Demostración.—Por ser Ω estrictamente localizable, existe una familia $(H_i)_{i \in I}$ de conjuntos disjuntos de medida finita tales que

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} H_i$$

y, para todo $A \in \Sigma_0$, hay una subfamilia contable $J \subset I$ tal que

$$\mu\left(A - \bigcup_{i \in J} H_i\right) = 0.$$

Por ser $\rho\,[f] = f$ y $H_i \in \Sigma_0$ existe una sucesión $(K^i_n)_{n \in N}$ de conjuntos medibles disjuntos $K^i_n \subset H_i$ tales que $f\,\chi_{K^i_n} \in S$ para todo $n \in \mathbf{N}$,

$$\mu\left(H_i - \bigcup_{n=1}^{\infty} K^i_n\right) = 0$$

y

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \rho\,(f\,\chi_{K^i_n})$$

en casi todo H_i.

Por ser $\rho\,[g] = g$ y $H_i \in \Sigma_0$ existe una sucesión $(L^i_n)_{n \in N}$ de conjuntos medibles disjuntos $L^i_n \subset H_i$ tales que $g\,\chi_{L^i_m} \in S$ para todo $m \in \mathbf{N}$,

$$\mu\left(H_i - \bigcup_{m=1}^{\infty} L^i_m\right) = 0$$

y

$$g = \sum_{m=1}^{\infty} \rho\,(g\,\chi_{L^i_m})$$

en casi todo H_i.

Consideremos la familia $(K^i_n \cap L^i_m)_{n,\,m \in N}$. Para todo $(n, m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ se tiene

$$f\,\chi_{K^i_n \cap L^i_m} \cong g\,\chi_{K^i_n \cap L^i_m}$$

y

$$f\,\chi_{K^i_n \cap L^i_m},\quad g\,\chi_{K^i_n \cap L^i_m} \in S.$$

Por tanto,

$$\rho\,(f\,\chi_{K^i_n \cap L^i_m}) = \rho\,(g\,\chi_{K^i_n \cap L^i_m}).$$

Por otra parte, para cada $n \in \mathbf{N}$,

$$\rho\,(f\,\chi_{K^i_n}) = \sum_m \rho\,(f\,\chi_{K^i_n})\,\chi_{L^i_m} = \sum_m \rho\,(f\,\chi_{K^i_n})\,\rho\,(\chi_{L^i_m}) =$$

$$= \sum_m \rho\,(f\,\chi_{K^i_n \cap L^i_m})$$

en casi todo H_i, y

$$f \chi_{H_i} = \sum_{n=1}^{\infty} \rho \, (f \chi_{K^i_n})$$

en casi todo Ω. Por tanto,

$$f \chi_{H_i} = \sum_{n,m} \rho \, (f \chi_{K^i_n \cap L^i_m})$$

en casi todo H_i. Análogamente,

$$g \chi_{H_i} = \sum_{n,m} \rho \, (g \chi_{K^i_n \cap L^i_m})$$

en casi todo H_i. Luego

$$f \chi_{H_i} = g \chi_{H_i}$$

en casi todo Ω para cada $i \in I$, de donde resulta $f = g$ en casi todo Ω.

9. PROPOSICIÓN.—*Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio estrictamente localizable y* ρ *un lifting sobre* $S = S(\Sigma, E)$. *Sea* $f : \Omega \longrightarrow E$ *una función* μ*-integrable y* F *un subconjunto cerrado de* E *tal que* $0 \in F$ *y*

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu \in F$$

para todo $A \in \Sigma_0^+ = \{A \in \Sigma : 0 < \mu(A) < \infty\}$. *Entonces:*

9.1. *Existe una función* μ*-medible* $g \cong f$ *tal que* $\rho[g] = g$ *y* $g(t) \in F$ *para todo* $t \in \Omega$.

9.2. *Para todo entorno* U *de* 0 *en* E *se tiene* $f(t) \in F + U$ *para casi todo* $t \in \Omega$.

DEMOSTRACIÓN.—Por ser Ω estrictamente localizable existe una familia $(H_i)_{i \in I}$ de conjuntos disjuntos de medida finita tales que

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} H_i$$

y, para todo $A \in \Sigma_0$, existe una subfamilia contable $J \subset I$ tal que

$$\mu\left(A - \bigcup_{i \in J} H_i\right) = 0.$$

9.1. Supongamos primero que f es una función simple μ-integrable y sea $(f_j)_{j \in J}$ una red de funciones simples de clase cero, que converge uniformemente a f sobre Ω. Entonces, para todo entorno absolutamente convexo y cerrado U de 0 en E, existe un $j_0 \in J$ tal que

$$f_j(t) - f(t) \in (1/2)\, U$$

para todo $j \geqslant j_0$ y $t \in \Omega$. De esto se deduce que

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f_j \, d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu + \frac{1}{\mu(A)} \int_A (f_j - f)\, d\mu$$

$$\in F + (1/2)\, U$$

para $j \geqslant j_0$ y $A \in \Sigma_0^+$.

Como f_j es simple de clase cero y μ es esencial,

$$\rho(f_j)(t) \in F + (1/2)\, U$$

para todo $j \geqslant j_0$ y $t \in \Omega$. Por tanto,

$$\rho(f)(t) \in \overline{F + (1/2)\, U} \subset F + U$$

para $t \in \Omega$. Luego $\rho(f)(t) \in F$ para todo $t \in \Omega$. Así queda probado 9.1 para toda función simple μ-integrable f si se toma $g = \rho(f)$.

Supongamos ahora sólo f μ-integrable. Podemos suponer que $\rho(H_i) = H_i$ para todo $i \in I$, donde $\rho(A)$ está definido por $\rho(\chi_A) = \chi_{\rho(A)}$, ya que en caso contrario se puede sustituir $(H_i)_{i \in I}$ por $(\rho(H_i))_{i \in I}$. Por ser f μ-medible y $\mu(H_i) < \infty$, existe una sucesión de conjuntos medibles disjuntos K_n^i tales que $K_n^i \subset H_i$ y $f \chi_{K_n^i} \in S$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y

$$\mu\left(H_i - \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^i\right) = 0.$$

Sea

$$g_i = \sum_{n=1}^{\infty} \rho\,(f\,\chi_{K^i_n}).$$

Esta función g_i es μ-medible ya que la serie converge casi uniformemente por ser

$$\rho\,(f\,\chi_{K^i_n}) = \rho\,(f\,\chi_{K^i_n})\,\chi_{\rho\,K^i_n}\ (\in S)$$

y los conjuntos $\rho\,(K^i_n)$ disjuntos.

$g_i \cong f$ sobre H_i por ser

$$\rho\,(f\,\chi_{K^i_n}) \cong f\,\chi_{K^i_n}$$

y

$$Z_i = H_i - \bigcup_{n=1}^{\infty} K^i_n$$

de medida nula.

$\rho\,[g_i] = g_i$ sobre H_i ya que si $H^i_n = \rho\,(K^i_n)$ se tiene

$$g_i\,\chi_{H^i_n} = \rho\,(f\,\chi_{K^i_n}) \in S,$$

los conjuntos H^i_n son disjuntos y

$$\mu\left(H_i - \bigcup_{n=1}^{\infty} H^i_n\right) = 0,$$

y además

$$\rho\,(g_i\,\chi_{H^i_n}) = \rho\,(f\,\chi_{K^i_n})$$

y

$$g_i = \sum_{n=1}^{\infty} \rho\,(g_i\,\chi_{H^i_n})$$

en casi todo Ω.

$g_i(H_i) \subset F$ puesto que

$$g_i(H^i_n) = \rho(f\chi_{K^i_n})(H^i_n) \subset F$$

si se aplica la primera parte a la función simple $f \mid H^i_n$, y se tiene

$$g_i = 0 \in F$$

sobre

$$H_i - \bigcup_{n=1}^{\infty} H^i_n .$$

Consideremos ahora

$$g = \sum_{i \in I} g_i .$$

Se tiene $g(t) \in F$ para todo

$$t \in \bigcup_{i \in I} H_i \quad \text{y} \quad g(t) = 0 \in F$$

para todo

$$t \in \Big(\bigcup_{i \in I} H_i\Big)^c .$$

Por otra parte, como para todo $i \in I$,

$$g_i = \sum_n \rho(g_i \chi_{H^i_n})$$

en casi todo Ω, donde los conjuntos H^i_n son disjuntos,

$$H^i_n \subset H_i , \quad g_i \chi_{H^i_n} \in S$$

y

$$\mu\Big(H_i - \bigcup_{n=1}^{\infty} H^i_n\Big) = 0,$$

resulta

$$g = \sum_{i, n} \rho \, (g \, \chi_{H^i_n})$$

en casi todo Ω, y se deduce que g es μ-medible, $\rho [g] = g$, $f \cong g$ y $g(\Omega) \subset F$.

9.2. Es fácil ver que $f \cong g$ es equivalente a que, para todo entorno U de 0 en E, se verifique

$$f(t) - g(t) \in U$$

para casi todo $t \in \Omega$. Por tanto,

$$f(t) \in g(\Omega) + U \subset F + U$$

para casi todo $t \in \Omega$.

10. Observación.—En la demostración de la proposición 9 se prueba que, siempre que (Ω, Σ, μ) sea un espacio estrictamente localizable, si f es una función μ-medible, existe una función μ-medible g, tal que $g \cong f$, $\rho [g] = g$ y, para todo entorno U de 0 en E, se tiene

$$f(t) \in g(\Omega) + U$$

para casi todo $t \in \Omega$.

11. Proposición.—*Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio estrictamente localizable. Si* f *y* g *son funciones* μ*-medibles y para cada* $x' \in E'$ *se tiene*

$$< f(t), x' > = < g(t), x' >$$

para casi todo $t \in \Omega$. *Entonces* $f \cong g$.

Demostración. — Sea $h = f - g \in M(\Sigma, \mu, E)$. Por hipótesis $\langle h, x' \rangle = 0$ en casi todo Ω.

Por ser (Ω, Σ, μ) estrictamente localizable existe una familia $(H_i)_{i \in I}$ de conjuntos disjuntos de medida finita tales que

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} H_i$$

y, para todo $A \in \Sigma_0$, existe una subfamilia contable $J \subset I$ tal que

$$\mu\left(A - \bigcup_{i \in J} H_i\right) = 0$$

Para todo $i \in I$, por ser $\mu(H_i) < \infty$ y ser h una función μ-medible, existe una sucesión $(K^i_n)_1^\infty$ de conjuntos medibles disjuntos tales que, para todo $n \in \mathbf{N}$, se tiene

$$K^i_n \subset H_i, \quad h\,\chi_{K^i_n} \in S \quad \text{y} \quad \mu\left(H_i - \bigcup_{n=1}^{\infty} K^i_n\right) = 0.$$

Sea $h^i_n = h\,\chi_{K^i_n} \in S$. Entonces, si $x' \in E'$, se verifica

$$< \frac{1}{\mu(A)} \int_A h^i_n \, d\mu, x' > = \frac{1}{\mu(A)} \int_{A \cap K^i_n} < h, x' > d\mu = 0$$

para todo $A \in \Sigma_0^+$, luego

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A h^i_n \, d\mu = 0$$

para todo $A \in \Sigma_0^+$. Por la proposición 9.2 resulta entonces $h^i_n \cong 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$ y todo $i \in I$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} h^i_n \cong 0 \quad \text{y} \quad h\,\chi_{H_i} \cong 0$$

puesto que

$$\mu\left(H_i - \bigcup_{n=1}^{\infty} K^i_n\right) = 0.$$

Luego $h \cong 0$.

2. El rango esencial

12. Definición.—Sea $f\colon \Omega \longrightarrow E$ y $A \in \Sigma$. El *rango esencial* de f sobre A se define por

$$er_A(f) = \{x \in E : \mu(\{t \in A : p(f(t) - x) \leq 1\}) \neq 0 \quad \forall p \in P\}$$

siendo P el conjunto de las seminormas continuas sobre E e interpretando la expresión en el sentido de que la medida considerada puede no estar definida.

Si el espacio (Ω, Σ, μ) es estrictamente localizable y ρ es un lifting sobre $S(\Sigma, E)$, para toda función $f \in S$ y $A \in \Sigma$ se verifica

$$\mathbf{er}_A(f) = \mathbf{er}_A(\rho(f)) = \overline{\rho(f)(A)} \subset \overline{f(A)}$$

si $\rho(A) \supset A$ y, por tanto,

$$\mathbf{er}_A(f) = \overline{\rho(f)(\rho(A))}$$

cualquiera que sea $A \in \Sigma$.

En primer lugar observemos que si $f \cong g$ se tiene $\mathrm{er}_A(f) = \mathrm{er}_A(g)$ ya que entonces

$$\mu(\{t \in \Omega : p(f(t) - g(t)) \neq 0\}) = 0$$

para toda $p \in P$ y, por tanto,

$$\{t \in A : p(f(t) - x) \leq 1\} \equiv \{t \in A : p(g(t) - x) \leq 1\}$$

para toda $p \in P$, donde se escribe $A \equiv B$ para denotar que $\chi_A = \chi_B$ en casi todo Ω. Luego

$$\mathbf{er}_A(f) = \mathbf{er}_A(g)$$

y, en particular,

$$\mathbf{er}_A(f) = \mathbf{er}_A(\rho(f)).$$

$\mathrm{er}_A(f) \subset \overline{f(A)}$ ya que si $x \notin \overline{f(A)}$ existe $p \in P$ tal que

$$p(f - x) \geq 1$$

en A y, por tanto,

$$\{t \in A : 2p(f(t) - x) \leq 1\} = \emptyset$$

y $x \notin \mathrm{er}_A(f)$.

$\mathrm{er}_A(f) = \overline{\rho(f)(A)}$ si $\rho(A) \supset A$. En efecto, si $x \notin \mathrm{er}_A(f)$, existe $p \in P$ tal que

$$\{ t \in A;\ p(f(t)-x) \leqq 1 \} \equiv \emptyset .$$

Por tanto, $p(f-x) > 1$ en casi todo A y

$$p(f-x) \geqq \chi_A$$

en casi todo Ω. Entonces

$$p(\rho(f)-x) = \rho(p(f-x)) \geqq \rho(\chi_A) = \chi_{\rho(A)} \geqq \chi_A$$

y

$$p(\rho(f)-x) \geqq 1$$

en A, luego $x \notin \overline{\rho(f)(A)}$. Por consiguiente,

$$\overline{\rho(f)(A)} \subset \mathrm{er}_A(f) = \mathrm{er}_A(\rho(f)) \subset \overline{\rho(f)(A)}$$

y queda probado que

$$\mathrm{er}_A(f) = \mathrm{er}_A(\rho(f)) = \overline{\rho(f)(A)} \subset \overline{f(A)}$$

si $\rho(A) \supset A$.

13. PROPOSICIÓN.—*Sea* $f: \Omega \longrightarrow E$ *y* $A \in \Sigma$, *entonces:*

13.1. er_A (f) *es cerrado.*

13.2. $er_A(f) \subset \overline{f(A)}$.

13.3. *Si* $A \subset B \in \Sigma$, *se tiene* $er_A(f) \subset er_B(f)$.

13.4. *Si* $f \cong g$ *se tiene* $er_A(f) = er_A(g)$.

DEMOSTRACIÓN.—13.2 y 13.4 han quedado demostradas anteriormente.

13.1. En el caso de que el espacio (Ω, Σ, μ) sea estrictamente localizable resulta de

$$\mathrm{er}_A(f) = \overline{\rho(f)(\rho(A))} .$$

En el caso general procederemos como sigue: Sea $x \notin er_A(f)$, entonces existe una seminorma $p \in P$ tal que

$$\mu(\{t \in A: p(f(t)-x) \leq 1\})=0.$$

Consideremos la seminorma $q = 2p \in P$ y sea

$$U=\{y \in E: q(x-y) \leq 1\}.$$

Si $y \in U$ se verifica

$$A_0=\{t \in A: q(f(t)-y) \leq 1\} \subset \{t \in A: p(f(t)-x) \leq 1\}$$

puesto que

$$q(f(t)-x) \leq q(f(t)-y)+q(y-x) \leq 2$$

y

$$p(f(t)-x) \leq 1$$

para $t \in A_0$. Entonces $U \subset (er_A(f))^c$ y se deduce que $er_A(f)$ es cerrado.

13.3. Inmediata.

14. PROPOSICIÓN. — *Sea* f *μ-medible. Entonces, para todo* $A \in \Sigma_0^+$ *y todo* $\varepsilon > 0$, *existe un conjunto* $K \in \Sigma_0^+$, $K \subset A$ *tal que* $\mu(A-K) < \varepsilon$ *y* $er_K(f)$ *es compacto.*

DEMOSTRACIÓN.—Dado $A \in \Sigma_0^+$ por ser f μ-medible, para todo $\varepsilon > 0$, existe $K \in \Sigma_0^+$, $K \subset A$ tal que $\mu(A-K) < \varepsilon$ y $f\chi_K \in S$.

Por 13.1 y 13.2, $er_K(f)$ es cerrado y $er_K(f) \subset \overline{f(K)}$. Por ser $f\chi_K$ simple, $f(K)$ es precompacto y, por tanto, relativamente compacto ya que E es polar semi-reflexivo, luego $er_K(f)$ es compacto.

15. PROPOSICIÓN.—*Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio estrictamente localizable,* ρ *un lifting sobre* $S(\Sigma, E)$ *y* f *una función μ-medible. Entonces existe otra función μ-medible* g *tal que* $f \cong g$, $\rho[g] = g$ *y para cada* $A \in \Sigma_0^+$ *se tiene*

$$g(t) \in er_A(f)=er_A(g)$$

en casi todo A, y

$$g(A) \subset er_A(g) \cup \{0\}$$

si $\rho(A) \supset A$.

Demostración.—Sea $g = \sum_{i \in I} g_i$ la función de la proposición 9, donde para todo $i \in I$

$$g_i = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(f \chi_{K^i_n}).$$

Entonces g es una función μ-medible tal que $g \cong f$ y $\rho[g] = g$. Dado $A \in \Sigma_0^+$ tal que $\rho(A) \supset A$, existe una familia contable $J \subset I$, que podemos identificar con **N**, que verifica

$$\mu\left(A - \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j\right) = 0.$$

Entonces, si $H^j_n = \rho(K^j_n)$, se tiene

$$g(A \cap H^j_n) = \rho(f \chi_{K^j_n})(A \cap H^j_n) \subset er_{A \cap H^j_n}(f \chi_{K^j_n}) =$$

$$= er_{A \cap H^j_n}(f) \subset er_A(f)$$

y

$$\mu\left(A - \bigcup_{n,j=1}^{\infty} H^j_n\right) = 0.$$

Luego, si $\rho(A) \supset A$,

$$g(t) \in er_A(f) = er_A(g)$$

para casi todo $t \in A$, y

$$g(A) \subset er_A(g) \cup \{0\}$$

ya que

$$g = 0 \quad \text{en} \quad A - \bigcup_{n,j=1}^{\infty} H^j_n.$$

Por tanto, para todo $A \in \Sigma_0^+$, se tiene

$$g(t) \subset \mathrm{er}_{\rho(A)}(f) = \mathrm{er}_A(f)$$

para casi todo $t \in \rho(A)$ y para casi todo $t \in A$.

De esta proposición resulta, en particular, $\mathrm{er}_A(f) \neq \varnothing$ para toda función μ-medible f y todo $A \in \Sigma_0^+$.

16. PROPOSICIÓN.—*Sea* $f: \Omega \longrightarrow E$ *una función tal que:*

16.1. $er_A(f) \neq \varnothing$ *para todo* $A \in \Sigma_0^+$.

16.2. $p^{\bullet} \circ (f - x)$ *es* μ*-medible para toda seminorma continua* p *sobre* E *y todo* $x \in E$.

Entonces f *es* $\bar{\mu}$*-medible.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $A \in \Sigma_0^+$, p una seminorma continua sobre E y Φ el conjunto de todas las familias $(B_i)_{i \in I}$ de conjuntos disjuntos $B_i \in \Sigma_0^+$, $B_i \subset A$, para los que existe $y_i \in E$ tal que

$$p(f(t) - y_i) \leq 1$$

para todo $t \in B_i$.

$\Phi \neq \varnothing$ ya que $\mathrm{er}_A(f) \neq \varnothing$ por ser $A \in \Sigma_0^+$, y existe $x \in \mathrm{er}_A(f)$ y, por 16.2,

$$B = \} t \in A: \ p(f(t) - x) \leq 1 \{ \in \Sigma_0^+$$

y, por tanto, $\{B\} \in \Phi$.

Ordenado Φ por inclusión, es fácil ver que Φ es un conjunto inductivo. Entonces aplicando el axioma de Zora se deduce que Φ admite un elemento maximal, que será una familia $(A_i)_{i \in I}$ de conjuntos disjuntos $A_i \in \Sigma_0^+$, $A_i \subset A$, para los que existe $y_i \in E$ con la propiedad de que

$$p(f(t) - y_i) \leq 1$$

para todo $t \in A_i$. Esta familia es, evidentemente, contable puesto que

$$\sum_{i \in I} \mu(A_i) \leq \mu(A) < \infty$$

y $\mu(A_i) > 0$ para cada $i \in I$. Sea

$$Z = A - \bigcup_{i \in I} A_i \in \Sigma.$$

Vamos a probar que $\mu(Z) = 0$. Supongamos $\mu(Z) > 0$, entonces por 16.1 existe $y \in er_Z(f)$ y por 16.2 el conjunto

$$B = \{ t \in Z : \ p(f(t) - y) \leq 1 \} \in \Sigma_0^+$$

y esto está en contradicción con la maximalidad de $(A_i)_{i \in I}$.

Sea ahora

$$f_p = \sum_{i \in I} y_i \chi_{A_i} + f \chi_Z .$$

Entonces f_p es una función μ-medible tal que

$$p(f_p(t) - f(t)) \leq 1$$

para todo $t \in A$. Luego f es límite uniforme sobre A de la red $(f_p)_p$ de funciones μ-medibles y se deduce que f es una función $\bar{\mu}$-medible.

17. Proposición.—*Como en la proposición 4 de [10], sea E el espacio de las funciones reales o complejas acotadas sobre [0, 1) con la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos compactos contables K de [0, 1). Sea* (Ω, Σ, μ) *el espacio de medida de Lebesgue sobre* $\Omega = [0, 1)$. *Definimos* $f : \Omega \longrightarrow E$ *por* $f(t) = \chi_{[0, t]}$. *Entonces* f *es una función* $\bar{\mu}$*-medible (y* $\bar{\mu}$*-integrable) tal que* $er_\Omega(f) = \emptyset$.

Demostración.—En primer lugar, vamos a probar que $\overline{f(\Omega)} = f(\Omega)$ es un conjunto aislado. En efecto, si $x \in \overline{f(\Omega)}$ existe una red $(t_i)_{i \in I}$ en Ω tal que $\lim_i f(t_i) = x$. Por tanto, se puede extraer una subred de $(t_i)_{i \in I}$ convergente a un punto $t_0 \in [0, 1]$ que podemos suponer es la misma. Vamos a ver ahora que $t_i = t_0$ para $i \geqslant i_0$ y cierto $i_0 \in I$. Supongamos $t_0 \in (0, 1)$. Entonces existen dos sucesiones monótonas $(t'_m)_1^\infty$ y $(t''_n)_1^\infty$, la primera creciente y la segunda decreciente, con límite t_0. Si

$$K = \{ t'_m \}_1^\infty \cup \{ t''_n \}_1^\infty \cup \{ t_0 \}$$

existe un $i_0 \in \mathrm{I}$ tal que

$$p_{\mathrm{K}}(f(t_i) - f(t_j)) < 1$$

para $i, j \geqslant i_0$, donde como en la proposición 4 de [10] p_{K} es la seminorma asociada al compacto contable K. Si $\{t_i \colon i \geqslant i_0\} \neq \{t_0\}$ existe un $t_i \neq t_0$ con $i \geqslant i_0$, pero entonces si se toma $j > i$ suficientemente grande para que haya un punto de K entre t_i y t_j resultaría

$$p_{\mathrm{K}}(f(t_i) - f(t_j)) = 1,$$

que está en contradicción con lo anterior. Luego $\{t_i \colon i \geqslant i_0\} = \{t_0\}$.

Del mismo modo, si $t_0 = 0$ o $t_0 = 1$, se puede probar que $\{t_i \colon i \geqslant i_0\} = \{t_0\}$ para cierto $i_0 \in \mathrm{I}$.

De todo esto se deduce que $t_0 \in \Omega$ y que

$$x = \lim_i f(t_i) = f(t_0) \in f(\Omega)$$

es un punto aislado de $f(\Omega)$.

Por tanto, siendo

$$\mu\{t \colon p_{\mathrm{K}}(f(t) - f(t_0)) < 1\} = \mu\{t \colon p_{\mathrm{K}}(\chi_{(t, t_0]}) < 1 \quad \text{o} \quad p_{\mathrm{K}}(\chi_{(t_0, t]}) < 1\} =$$
$$= \mu(\{t_0\}) = 0,$$

resulta que $x = f(t_0) \notin \mathrm{er}_\Omega(f)$, lo cual está en contradicción con

$$\mathrm{er}_\Omega(f) \subset \overline{f(\Omega)} = f(\Omega)$$

según 13.2.

18. Definición.—Una función $\bar{\mu}$-medible f se dice *regular* si $\mathrm{er}_{\mathrm{A}}(f) \neq \varnothing$ para todo $\mathrm{A} \in \Sigma^+$.

Entonces toda función μ-medible es regular.

Sea $m \colon \Sigma \longrightarrow \mathrm{E}$ una medida vectorial sobre la σ-álgebra Σ y

$$\mathrm{A_H}(m) = \left\{ \frac{m(\mathrm{A})}{\mu(\mathrm{A})} \colon \ \mathrm{H} \supset \mathrm{A} \in \Sigma^+ \right\}$$

para $\mathrm{H} \in \Sigma^+$.

19. PROPOSICIÓN.—*Si* f *es una función* $\bar{\mu}$*-integrable regular se tiene*

$$er_H(f) \subset \overline{A_H(m_f)} \subset \overline{co}[er_H(f)]$$

para todo $H \in \Sigma^+$.

DEMOSTRACIÓN.—Veamos primero la demostración para el caso que $H \in \Sigma_0^+$. Para toda seminorma continua p sobre E, tomemos la función

$$f_p = \sum_1^n y_i \chi_{A_i} + f \chi_Z$$

de la proposición 16 con $y_i \in er_H(f)$. Entonces, si $A \in \Sigma^+$, $A \subset H$ y $S_n = \bigcup_1^n A_i$, se tiene

$$p\left(\frac{1}{\mu(A \cap S_n)} \int_{A \cap S_n} f\, d\mu - \sum_1^n y_i \frac{\mu(A \cap A_i)}{\mu(A \cap S_n)}\right) =$$

$$= p\left(\frac{1}{\mu(A \cap S_n)} \int_{A \cap S_n} f\, d\mu - \frac{1}{\mu(A \cap S_n)} \int_{A \cap S_n} f_p\, d\mu\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\mu(A \cap S_n)} \int_{A \cap S_n} p(f - f_p)\, d\mu \leqq 1$$

para n suficientemente grande de modo que $\mu(A \cap S_n) > 0$. Por tanto, como

$$\lim_n \frac{1}{\mu(A \cap S_n)} \int_{A \cap S_n} f\, d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \int_A f\, d\mu,$$

para cada seminorma continua p sobre E, existe un

$$y_p \in co[er_H(f)]$$

tal que

$$p\left(\frac{1}{\mu(A)} \int_A f\, d\mu - y_p\right) \leqq 2 \quad (A \in \Sigma^+),$$

y se deduce que

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu$$

es adherente a co $[er_H (f)]$ y que

$$A_H (m_f) \subset \overline{co} \, [er_H (f)] .$$

Sea $x \in er_H (f)$. Entonces, si

$$A = \{ t \in H : \ p (f(t) - x) \leq 1 \}$$

se tiene $A \in \Sigma^+$ y, por tanto, $\overline{co} \, f (A)$ está contenido en la p-bola de centro x y radio 1. Como además

$$\frac{m_f (A)}{\mu (A)} \in \overline{co} \, f (A)$$

resulta

$$p \left(x - \frac{m_f (A)}{\mu (A)} \right) \leq 1 ,$$

de donde se deduce que

$$er_H (f) \subset \overline{A_H (m_f)} .$$

Veamos ahora el caso general. Por ser f $\bar{\mu}$-integrable, existe un subconjunto medible Ω_0 de Ω, fuera del cual f se anula, que es un espacio estrictamente localizable, es decir, existe una familia $(K_i)_{i \in I}$ de conjuntos disjuntos de medida finita tales que

$$\Omega_0 = \bigcup_{i \in I} K_i$$

y, para todo $A \in \Sigma_0$, $A \subset \Omega_0$, hay una subfamilia contable $J \subset I$ tal que

$$\mu \left(A - \bigcup_{i \in J} K_i \right) = 0 .$$

Sea $H \in \Sigma^+$ cualquiera, y sea $A \subset H$, $A \in \Sigma_0^+$. Para todo $i \in I$, aplicando la conclusión precedente resulta

$$\frac{m_f(A \cap K_i)}{\mu(A \cap K_i)} \in \overline{\text{co}}\,[\text{er}_{A \cap K_i}(f)] \subset \overline{\text{co}}\,[\text{er}_H(f)]$$

cuando $\mu(A \cap K_i) \neq 0$.

Por ser $\mu(A) < \infty$ hay una subfamilia contable $J \subset I$ tal que

$$\mu\left(A \cap \Omega_0 - \bigcup_{i \in J} K_i\right) = 0.$$

Por tanto,

$$\frac{m_f(A)}{\mu(A)} = \sum_{i \in J} \frac{\mu(A \cap K_i)}{\mu(A)} \, \frac{m_f(A \cap K_i)}{\mu(A \cap K_i)} \in \overline{\text{co}}\,[\text{er}_H(f)].$$

Luego

$$A_H(m_f) \subset \overline{\text{co}}\,[\text{er}_H(f)].$$

Sea ahora $x \in \text{er}_H(f)$. Por ser μ esencial y ser f una función $\bar{\mu}$-integrable regular, existe un conjunto $A \in \Sigma_0^+$ tal que

$$A \subset \{t \in H:\ p(f(t) - x) \leq 1\}$$

y, por tanto, $\overline{\text{co}}\, f(A)$ está contenido en la p-bola de centro x y radio 1. Como además

$$\frac{m_f(A)}{\mu(A)} \in \overline{\text{co}}\, f(A)$$

resulta

$$p\left(x - \frac{m_f(A)}{\mu(A)}\right) \leq 1$$

de donde se deduce

$$\text{er}_H(f) \subset \overline{A_H(m_f)}.$$

Es claro que la proposición anterior cae en defecto cuando f no es regular y $\mu \neq 0$.

Bibliografía

[1] Chi, G. Y. H. (1976). On the Radon-Nikodym theorem in locally convex spaces. *Measure Theory,* Lect. Notes in Math., n.° 541. Springer, Berlin.

[2] Diestel, J. and Uhl, J. Jr. (1977). Vector Measures. Math. Surveys, **15**. *Amer. Math. Soc.*, Providence, R. I.

[3] Gilliam, D. (1977). On integration and the Radon-Nikodym theorem in quasicomplete locally convex topological vector spaces. *J. Reine Angew. Math.*, **292**, 125-137.

[4] Ionescu Tulcea, A. and C. (1969). Topics in the Theory of Lifting. Springer, Berlin.

[5] Rodríguez-Salinas, B. (1979). Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid,* **73**, 361-387.

[6] Rodríguez-Salinas, B. (1980). El teorema de Radon-Nikodym para las medidas con valores en un espacio localmente convexo. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid,* **74**, 41-64.

[7] Rodríguez-Salinas, B. (1980). La propiedad de Radon-Nikodym, σ-dentabilidad y martingalas en espacios localmente convexos. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid,* **74**, 65-89.

[8] Rodríguez-Salinas, B. (1983). Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo respecto de medidas infinitas. I. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid,* **77**, 49-60.

[9] Rodríguez-Salinas, B. (1983). Integración de funciones con didas infinitas. II. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid,* **77**, 61-78.

[10] Rodríguez-Salinas, B. (1983). Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo respecto de medidas infinitas. III. (En curso de publicación.)

[11] Thomas, E. (1976). Totally summable functions with values in locally convex spaces. *Measure Theory*, Lect. Notes in Math., n.° 541. Springer, Berlin.

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid