ALGUNOS PROCESOS ESTOCASTICOS APLICABLES A LA FISICA, LA EPIDEMIOLOGIA Y LA PUBLICIDAD. LA LEY DE LOS GRANDES NUMEROS ALEATORIOS

Darío Maravall Casesnoves

Recibido: 1 diciembre 1982

We are developed new unidimensional and multidimensional models of stochastic processes for random populations, with applications to Physics, Epidemiology and Advertising management. Among those models we quote a model of the gas flow trhough a tank in the vacuum, and in the atmosphere, a model of the mass and energy fluctuations within a gas and finally a model of the number of times a person or a random population get sick and cure of a non contagious disease.

A law ot the random large numbers and central limit theorems for the sum of random variables in random number are presented.

1. Un proceso estocástico unidimensional de la evolución de una enfermedad no contagiosa, o de la retención y el olvido de un mensaje publicitario

Si en una población de tamaño cierto o aleatorio, se desarrolla una enfermedad no contagiosa, de modo que la probabilidad de que en el intervalo de tiempo de t a $t + dt$ la probabilidad infinitesimal de que enferme un individuo sano es $\lambda\, dt$, y la de que se cure un individuo enfermo es $\mu\, dt$, este fenómeno epidemiológico es explicable mediante un proceso estocástico, que es la adición en número cierto o aleatorio (el tamaño de la población) del proceso estocástico de la evolución temporal de lo que sucede a un solo individuo respecto a esta enfermedad.

El anterior modelo de proceso estocástico es aplicable no sólo a la Epidemiología, sino también a la Publicidad, cuando se supone que los individuos que componen una población de tamaño cierto o aleatorio, pueden olvidar un mensaje publicitario que previamente habían recibido, con una probabilidad $\mu\, dt$, en el intervalo de t a $t + dt$, y si no lo habían recibido nunca o lo habían olvidado, pueden percibirlo con una probabilidad $\lambda\, d\, t$ en el intervalo de t a $t + d\, t$.

El problema anterior se puede resolver como una cadena de Markov en una población aleatoria (véase en bibliografía G). La aditividad del proceso a que se hizo referencia en el párrafo primero, permite darle una solución, que es la que vamos a exponer. Incluso en el caso de una población cierta, que es un caso trivial porque se trata de una cadena de Markov de n estados (n el número de individuos que componen la población), se puede resolver el problema, resolviendo una cadena de Markov de dos estados.

Supongamos que se trata de un solo individuo, el cual puede encontrarse en los estados 1 y 0 (enfermo y sano). Se cumple entonces que:

$$\left.\begin{aligned} P(0, t + d\,t) &= P(0, t)(1 - \lambda\, d\, t) + P(1, t)\,\mu\, d\, t \\ P(1, t + d\,t) &= P(1, t)(1 - \mu\, d\, t) + P(0, t)\,\lambda\, d\, t \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

y de aquí:

$$\left.\begin{aligned} P'(0, t) &= -\lambda\, P(0, t) + \mu\, P(1, t) \\ P'(1, t) &= \lambda\, P(0, t) - \mu\, P(1, t) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Las P son las probabilidades.

La integración de (2) con las condiciones iniciales:

$$t = 0, \quad P(1, 0) = 1, \quad P(0, 0) = 0 \qquad (3)$$

da:

$$P(1, t) = \frac{\lambda + \mu\, e^{-(\lambda + \mu)\, t}}{\lambda + \mu}\,; \qquad P(0, t) = \frac{\mu\,(1 - e^{-(\lambda + \mu)\, t})}{\lambda + \mu} \qquad (4)$$

La integración de (2) con las condiciones iniciales:

$$t = 0, P(0, 0) = 1, \quad P(1, 0) = 0 \qquad (5)$$

da:

$$P(1, t) = \frac{\lambda\,(1 - e^{-(\lambda + \mu)\, t})}{\lambda + \mu}\,; \qquad P(0, t) = \frac{\mu + \lambda\, e^{-(\lambda + \mu)\, t}}{\lambda + \mu} \qquad (6)$$

Y si inicialmente la función generatriz (f. g.) de la población, z_0 para los individuos sanos y z_1 para los enfermos es:

$$g(z_0, z_1, 0) = g_0(z_0, z_1) \qquad (7)$$

La f. g. solución del problema es la:

$$g(z_0, z_1, t) = g_0 \left(z_0 \frac{\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda + \mu} + z_1 \frac{\lambda (1 - e^{-(\lambda+\mu)t})}{\lambda + \mu}, \right.$$
$$\left. z_0 \frac{\mu (1 - e^{-(\lambda+\mu)t})}{\lambda + \mu} + z_1 \frac{\lambda + \mu e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda + \mu} \right) \qquad (8)$$

Como ya señalamos en ocasiones anteriores (véase G, J, O), la f. g. anterior es la de la adición de variables aleatorias (v. a.) binomiales en número aleatorio $g_0(z_0, z_1)$.

Si llamamos m_0 y m_1 los valores medios de la población sana y enferma inicial ($t = 0$) y $m_0(t)$, $m_1(t)$, los antedichos valores en el instante t, de (8) se sigue que:

$$\left. \begin{aligned} m_0(t) &= \frac{m_0(\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}) + m_1 \mu (1 - e^{-(\lambda+\mu)t})}{\lambda + \mu} \\ m_1(t) &= \frac{m_0 \lambda (1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) + m_1 (\lambda + \mu e^{-(\lambda+\mu)t})}{\lambda + \mu} \end{aligned} \right\} \qquad (9)$$

Cuando el tiempo t tiende a infinito, la f. g. (8) es:

$$g(z_0, z_1, \infty) = g_0 \left(\frac{\mu z_0 + \lambda z_1}{\lambda + \mu}, \frac{\mu z_0 + \lambda z_1}{\lambda + \mu} \right) \qquad (10)$$

y las (9) valen:

$$m_0(\infty) = \frac{\mu (m_0 + m_1)}{\lambda + \mu}; \qquad m_1(\infty) = \frac{\lambda (m_0 + m_1)}{\lambda + \mu} \qquad (11)$$

Obsérvese de (9) que:

$$m_0(t) + m_1(t) = m_0 + m_1 \qquad (12)$$

como era de esperar, dada la independencia respecto al tiempo de $g(z, z, t)$.

Si la población es cierta en vez de aleatoria, si a y b son los números iniciales de sanos y enfermos, es:

$$g_0(z_0, z_1) = z_0^a z_1^b \qquad (13)$$

Si en (8) se multiplican ambos argumentos el primero y el segundo par de sumas dentro del paréntesis, por v_0 y v_1, se obtiene la f. g. de la distribución conjunta de la población sana y enferma iniciales ($t = 0$) y en cualquier instante t. Se puede obtener así, la f. g. de la distribución conjunta de la población sana y enferma en dos instantes cualesquiera $t = t_1$ y $t = t_2$, $t_1 < t_2$.

La teoría determinista es trivial, conduce a las (9), porque se cumple:

$$m_0(t + d\,t) = m_0(t)(1 - \lambda\,d\,t) + m_1(t)\,\mu\,d\,t \Rightarrow m'_0(t) = -\lambda\,m_0(t) + \mu\,m_1(t) \quad (14)$$

y análogamente:

$$m'_1(t) = -\mu\,m_1(t) + \lambda\,m_0(t) \quad (15)$$

con las condiciones iniciales:

$$t = 0, \quad m_0(0) = m_0, \quad m_1(0) = m_1 \quad (16)$$

La (10), cuando la f. g. inicial es la (13), es:

$$\left(\frac{\mu\,z_0 + \lambda\,z_1}{\mu + \lambda}\right)^{a+b} \quad (17)$$

La propiedad ergódica se cumple en (17), cadena de Markov en una población de tamaño cierto, pero falla en (10), cadena de Markov en una población aleatoria (véase G).

2. Un proceso estocástico bidimensional del número de veces que enferma y se cura un individuo en el caso de una enfermedad no contagiosa, o de que recibe u olvida un mensaje publicitario

En este caso si n es el número de veces que ha enfermado el individuo (o de veces que ha recibido el mensaje, después de haberlo olvidado, o de haberlo recibido por primera vez, si $n = 1$) el número de vecs que ha sanado o curado (o ha olvidado el mensaje después de recibirlo) es ó n ó $n - 1$. Se cumple para las probabilidades P, la primera letra n para el número de veces que ha enfermado, y la segunda n ó $n - 1$ para el número de veces que se ha curado, que:

$$\left.\begin{aligned} P(n, n, t + d\,t) &= P(n, n, t)(1 - \lambda\,d\,t) + P(n, n - 1, t)\,\mu\,d\,t \\ P(n, n - 1, t + d\,t) &= P(n - 1, n - 1, t)\,\lambda\,d\,t + P(n, n - 1, t)(1 - \mu\,d\,t) \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

y de aquí:

$$\left.\begin{aligned} P'(n,n,t) &= -\lambda P(n,n,t) + \mu P(n,n-1,t) \\ P'(n,n-1,t) &= \lambda P(n-1,n-1,t) - \mu P(n,n-1,t) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Si las condiciones iniciales son las:

$$P(0,0,0) = 1 \tag{20}$$

se tiene que:

$$P'(0,0,t) = -\lambda P(0,0,t) \Rightarrow P(0,0,t) = e^{-\lambda t} \tag{21}$$

y después se calculan recurrentemente $P(1,0,t)$, $P(1,1,t)$, $P(2,1,t)$, $P(2,2,t)$. ...

Si las condiciones iniciales son las:

$$P(1,0,0) = 1 \tag{22}$$

en ese caso es:

$$P'(1,0,t) = -\mu P(1,0,t) \Rightarrow P(1,0,t) = e^{-\mu t} \tag{23}$$

y después se calculan recurrentemente $P(1,1,t)$, $P(2,1,t)$, $P(2,2,t)$, ...

Pero vamos a resolver este proceso estocástico, a partir de la f. g., para ello escribamos:

$$g(u,v,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n,n,t)\, u^n v^n; \quad g_1(u,v,t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(n,n-1,t)\, u^n v^{n-1} \tag{24}$$

entonces la f. g. es:

$$g(u,v,t) + g_1(u,v,t) \tag{25}$$

Multiplicando la primera (19) por $u^n v^n$, y la segunda (19) por $u^n v^{n-1}$ y sumando de 0 a ∞, se obtiene el sistema de dos ecuaciones lineales en derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\lambda g + \mu v g_1; \quad \frac{\partial g_1}{\partial t} = \lambda u g - \mu g_1 \tag{26}$$

De (26) se sigue que:

$$\left[\frac{\partial (g + g_1)}{\partial t}\right]_{u=1,\, v=1} = 0 \Rightarrow g(1, 1, t) + g_1(1, 1, t) = g(1, 1, 0) + g_1(1, 1, 0) \quad (27)$$

Para integrar (26), la ecuación característica considerada como un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de coeficientes constantes, es:

$$\begin{vmatrix} r + \lambda & -\mu v \\ -\lambda u & r + \mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r^2 + r(\lambda + \mu) + \lambda \mu (1 - u v) = 0 \quad (28)$$

cuya raíces son:

$$r_1, r_2 = -\frac{\lambda + \mu \pm \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4 \lambda \mu u v}}{2} \quad (29)$$

r_1 para el signo + y r_2 para el signo —.

Las soluciones de (26) son:

$$\left.\begin{aligned} g(u, v, t) &= A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \\ g_1(u, v\ t) &= A e^{r_1 t} \frac{r_1 + \lambda}{\mu v} + B e^{r_2 t} \frac{r_2 + \lambda}{\mu v} \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Obsérvese que $g(u, v, \mathrm{t})$ es una serie de potencias en $u^n v^n$, cuyos coeficientes son las $P(n, n, t)$, y que $g_1(u, v, t)$ es una serie de potencias de $(u^n v^n)/v$, cuyos coeficientes son las $P(n, n-1, t)$.

Si se cumple la condición inicial (20) es:

$$g(u, v, 0) = 1, \quad g_1(u, v, 0) = 0 \quad (31)$$

y si la condición inicial es la (22) se cumple que:

$$g(u, v, 0) = 0, \quad g_2(u, v, 0) = u \quad (32)$$

La solución del sistema (26) con la condición (31) da:

$$A = \frac{r_2 + \lambda}{r_2 - r_1}; \quad B = -\frac{r_1 + \lambda}{r_2 - r_1} \quad (33)$$

con lo que (30) se escribe:

$$\left.\begin{aligned} g(u, v, t) &= \frac{(r_2+\lambda)\, e^{r_1 t} - (r_1+\lambda)\, e^{r_2 t}}{r_2 - r_1} \\ g_1(u, v, t) &= \frac{(r_2+\lambda)(r_1+\lambda)}{(r_2 - r_1)\, \mu\, v} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t}) \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

La solución de (26) con la condición (32) da:

$$A = \frac{\mu\, u\, v}{r_1 - r_2}; \qquad B = -\frac{\mu\, u\, v}{r_1 - r_2} \tag{35}$$

con lo que (30) se escribe:

$$\left.\begin{aligned} g(u, v, t) &= \frac{\mu\, u\, v}{r_1 - r_2} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t}) \\ g_1(u, v, t) &= \frac{u}{r_1 - r_2} [(r_1+\lambda)\, e^{r_1 t} - (r_2+\lambda)\, e^{r_2 t}] \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Obsérvese cómo la f. g. se descompone en suma de dos sumandos g y g_1, que obedecen a un sistema lineal de dos ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, las (26). No conozco otro ejemplo de proceso estocástico que goce de esta propiedad.

Si en (28) hacemos $v = 1/u$, las (29) valen:

$$u\, v = 1; \quad r_1 = -(\lambda+\mu), \quad r_2 = 0 \tag{37}$$

luego las (34):

$$g\left(u, \frac{1}{u}, t\right) = \frac{\mu + \lambda\, e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}; \quad g_1\left(u, \frac{1}{u}, t\right) = \frac{\lambda\, u}{\lambda+\mu} (1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) \tag{38}$$

y las (36) son:

$$g\left(u, \frac{1}{u}, t\right) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} (1 - e^{-(\lambda+\mu)t}); \quad g_1\left(u, \frac{1}{u}, t\right) = \frac{u}{\lambda+\mu} (\lambda + \mu\, e^{-(\lambda+\mu)t}) \tag{39}$$

que coinciden con los argumentos de las (8), cuando en ellas se hace $z_0 = 1$, $z_1 = u$, es decir la f. g. de la distribución marginal del número de individuos enfermos en el instante $t = 0$ en el proceso estocástico del § 1.

Obsérvese que se cumplen las:

$$P(0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n, n, t); \quad P(1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(n, n-1, t) \tag{40}$$

donde las P de los primeros miembros son las del § 1, y las de los segundos miembros las del parágrafo actual.

Como se tiene que:

$$(e^{r_1 t})_{u=0\, v=0} = e^{-\lambda t}; \quad (e^{r_2 t})_{u=0\, v=0} = e^{-\mu t} \tag{41}$$

las P, por el desarrollo en serie de Taylor, debido a su definición como coeficientes de las potencias de $u^n v^n$ y $u^n v^{n-1}$ de g y de g_1, son productos de las anteriores exponenciales por polinomios de t, luego es:

$$\left.\begin{aligned} P(n, n, t) &= e^{-\lambda t} Q_{nn}(t) + e^{-\mu t} R_{nn}(t) \\ P(n, n-1, t) &= e^{-\lambda t} Q_{nn-1}(t) + e^{-\mu t} R_{nn-1}(t) \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

donde las Q y las R son los antedichos polinomios de t. Como las (42) son las soluciones del sistema (19) con las condiciones iniciales (20) o (22), que hacen que la primera ecuación diferencial del sistema (19) sea la (21) o la (23), las (42) permiten también calcular las antedichas soluciones programadamente a partir de (19) con las condiciones iniciales antedichas.

Este proceso estocástico se puede invertir, es decir considerar n, n ó $n, n-1$, como ciertas y t como aleatorio, mientras que en el anterior proceso estocástico, que era el directo, t era cierto y n, n ó $n, n-1$ aleatorios. Debido a que a las probabilidades infinitesimales $\lambda\, d\, t$, y $\mu\, d\, t$, corresponden las distribuciones exponenciales de función de frecuencia:

$$\lambda e^{-\lambda t}; \quad \mu e^{-\mu t} \tag{43}$$

y de función característica:

$$\frac{\lambda}{\lambda - i z}; \quad \frac{\mu}{\mu - i z} \tag{44}$$

se tiene que:

$$\begin{gathered} \varphi(z, n, n; 0) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i z}\right)^n \left(\frac{\mu}{\mu - i z}\right)^n; \varphi(z, n, n-1, 0) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i z}\right)^n \left(\frac{\mu}{\mu - i z}\right)^{n-1} \\ \varphi(z, n, n\, 1) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i z}\right)^{n-1} \left(\frac{\mu}{\mu - i z}\right)^n; \ \varphi(z, n, n-1, 1) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i z}\right)^{n-1} \left(\frac{\mu}{\mu - i z}\right)^{n-1} \end{gathered} \tag{45}$$

donde por ejemplo $\varphi(z, n, n, 0)$ es la función característica de que en el instante aleatorio t tenga lugar la enésima curación. Y así para las demás φ.

Como las φ (45) son las funciones características de la adición de dos v. a. gamma, se tiene que:

$$f(t, n\, n, 0) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} e^{-\mu\tau} \frac{(\lambda\, \mu)^n}{(n-1)!^2} (t-\tau)^{n-1} \tau^{n-1}\, d\tau \tag{46}$$

y análogamente para las restantes f (funciones de frecuencia).

Vamos a calcular el comportamiento asintótico de (34) y (36), cuando t tiende a infinito. Como:

$$t \to \infty \Rightarrow e^{r_1 t} = 0, \quad e^{r_2 t} = 0 \tag{47}$$

se sigue que tanto el valor de n en los estados n, n, como en $n, n-1$, tiende a infinito, cuando t tiende a infinito. Es decir que el número de veces que ha estado enfermo o que se ha curado un individuo tiende a infinito, cuando t tiende a infinito.

En cambio por (38) y (39), en ambos casos es:

$$t \to \infty \Rightarrow g\left(u, \frac{1}{u}, \infty\right) + g_1\left(u, \frac{1}{u}, \infty\right) = \frac{\mu + \lambda u}{\mu + \lambda} \tag{48}$$

que es la f. g. de una distribución de probabilidad binomial, de probabilidades $\mu/(\mu + \lambda)$, y $\lambda/(\mu + \lambda)$ de estar sano o enfermo el individuo para $t = \infty$.

Vamos a obtener el comportamiento asintótico ($t = \infty$) de la distribución marginal del número de veces que ha estado enfermo el individuo ($v = 1$). Sustituyamos u por e^{iz}, lo que equivale a sustituir la f. g. por la función característica (f. c.), y cambiamos z por z/t:

$$v = 1; \quad u \to e^{iz}; \quad z \to \frac{z}{t}; \quad e^{iz/t} = 1 + \frac{iz}{t} \tag{49}$$

lo que equivale a obtener la f. c. del número de veces que el individuo ha estado enfermo dividido por el tiempo. Se obtiene:

$$t \to \infty \Rightarrow r_1 t = -\frac{\lambda + \mu + \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4\lambda\mu\, e^{iz/t}}}{2} t = -(\lambda + \mu)\, t \tag{50}$$

y de aquí:

$$t \to \infty \Longrightarrow e^{r_1 t} \to 0; \quad r_1 \to -(\lambda + \mu) \tag{51}$$

En cambio sustituyendo $e^{iz/t}$ por $1 + i\,z/t$, en r_2, se obtiene.

$$t \to \infty \Longrightarrow r_2\, t = -\frac{\lambda + \mu - \sqrt{(\lambda + \mu)^2 + 4\,\lambda\,\mu\, i\,z/t}}{2}\, t = \frac{\lambda\,\mu}{\lambda + \mu}\, i\,z \tag{52}$$

y de aquí:

$$t \to \infty \Longrightarrow e^{r_2 t} \to e^{\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} i z}, \quad r_2 \to 0 \tag{53}$$

Llevando estos valores (51) y (53) de $r_1(t)$, $r_2(t)$, $e^{r_1 t}$, $e^{r_2 t}$ a (30) con $v = 1$ se obtiene:

$$t \to \infty, \quad r_1 = -(\lambda + \mu); \quad r_2 = 0, \quad g + g_1 = \mathrm{B}\,\frac{\lambda + \mu}{\mu}\, e^{r_2 t} \tag{54}$$

y tanto (34) como (36) dan:

$$t \to \infty \Longrightarrow g + g_1 = e^{r_2 t} = e^{\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} i z} \tag{55}$$

que muestra que cuando t tiende a infinito, n/t converge en probabilidad a $\lambda\,\mu/(\lambda + \mu)$:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{n}{t} = \frac{\lambda\,\mu}{\lambda + \mu} \tag{56}$$

Para obtener las desviaciones de n/t respecto a su valor medio, cuando t tiende a infinito, es decir la f. c. de la v. a.:

$$\lim_{t \to \infty} \left(\frac{n}{t} - \frac{\lambda\,\mu}{\lambda + \mu}\right)\sqrt{t} \tag{57}$$

teniendo en cuenta que:

$$e^{iz/\sqrt{t}} = 1 + \frac{i\,z}{\sqrt{t}} - \frac{z^2}{2\,t} \cdots \tag{58}$$

se obtiene para:

$$e^{r_2 t}\, e^{-i \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \sqrt{t}} \tag{59}$$

el valor:

$$e^{-\frac{\lambda+\mu-\sqrt{(\lambda+\mu)^2+4\lambda\mu iz/\sqrt{t}-2\lambda\mu z^2/t}}{2}t}\, e^{-i\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\sqrt{t}} \tag{60}$$

y desarrollando en serie la raíz cuadrada, se obtiene:

$$e^{-\frac{z^2\lambda\mu(\lambda^2+\mu^2)}{2(\lambda+\mu)^3}} \tag{61}$$

y por tanto la v. a. (57) tiende a distribuirse según una v. a. normal o gaussiana de valor medio nulo, y varianza σ^2 dada por:

$$\sigma^2 = \frac{\lambda\mu(\lambda^2+\mu^2)}{(\lambda+\mu)^3} \tag{62}$$

Respecto al proceso estocástico inverso, las (45) dan para la v. a. t/n cuando n tiende a infinito, que ésta converge en probabilidad a la variable cierta:

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu} \tag{63}$$

que se obtiene sustituyendo en cualquiera de las (45), z por z/n y hacer tender n a infinito.

Respecto a la v. a.:

$$\left(\frac{t}{n} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu}\right)\sqrt{n} \tag{64}$$

se obtiene a partir de las (45), cualquiera que sea ella, que cuando n tiende a infinito, tiende a distribuirse según una v. a. normal de valor medio nulo, y varianza:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} \tag{65}$$

que resulta de:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda - \frac{iz}{\sqrt{n}}}\right)^n \left(\frac{\mu}{\mu - \frac{iz}{\sqrt{n}}}\right)^n e^{-iz\frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu}\sqrt{n}} \tag{66}$$

Obsérvese que (56) y (63) son valores inversos respecto a la unidad.

Si el tiempo en vez de ser una variable continua t, es una variable discreta, m, se obtienen los resultados anteriores, efectuando los cambio:

$$e^{r_1 t} \longrightarrow r_1^m \qquad e^{r_2 t} \longrightarrow r_2^m \tag{67}$$

3. Un proceso estocástico bidimensional del número de veces que enferman y se curan de una enfermedad no contagiosa, los individuos de una población cierta o aleatoria, o del número de veces que reciben u olvidan un mensaje publicitario

Por la aditividad de este proceso estocástico, basada en que lo que le sucede a cada individuo es independiente de lo que le sucede a los demás, y la aleatoriedad de estos sucesos viene representada por la misma v. a. para todos los individuos, este problema se resuelve a partri de la solución del problema anterior, para el proceso estocástico directo. Para el proceso estocástico inverso, la solución es enormemente complicada.

Si:

$$g_0(z_0, z_1) \tag{68}$$

es la f. g. inicial de la población aleatoria, z_0 para los individuos inicialmente sanos, y z_1 para los inicialmente enfermos, la f. g. en el instante t, se obtiene sustituyendo z_0 y z_1, por las (34) y (36), de modo que es:

$$h(u, v, t) = g_0\,[1.^a\,(34) + 2.^a\,(34),\, 1.^a\,(36) + 2.^a\,(36)] \tag{69}$$

la f. g. de los números de veces que han estado enfermos (u) y de veces que se han curado (v) los individuos de la población aleatoria en el tiempo t. Si se multiplican ambos argumentos por z_0 y z_1 se obtiene la f. g. de la distribución conjunta de los números de veces aleatorios anteriores y de los números iniciales de sanos y de enfermos.

Si la población es cierta en vez de aleatoria, hay que sustituir la (68) por la $z^a{}_0\, z^b{}_1$.

Teniendo en cuenta que:

$$\left.\begin{array}{ll}[e^{r_1 t}]_{u=1,\, v=1} = e^{-(\lambda+\mu)\,t}; & [e^{r_2 t}]_{u=1,\, v=1} = 1 \\ [r_1]_{u=1,\, v=1} = -\,(\lambda+\mu); & [r_2]_{u=1,\, v=1} = 0\end{array}\right\} \tag{70}$$

se obtienen los valores medios n y m en el instante t, de los números de veces que han estado enfermos y se han curado los individuos de la población. Pero estos valores medios, también se pueden obtener directamente a partir de la teoría determinista, por ser este proceso lineal.

Si α, β son los valores iniciales de enfermos y sanos, en una teoría determinista del fenómeno, se cumplen las ecuaciones diferenciales:

$$d\,n = \lambda\,(\alpha + \beta - n + m)\,d\,t; \qquad d\,m = \mu\,(n - m)\,d\,t \tag{71}$$

de las que se sigue que:

$$d\,(n - m) = \lambda\,(\alpha + \beta)\,d\,t - (\mu + \lambda)\,(n - m)\,d\,t \tag{72}$$

cuya integral es:

$$n - m = \frac{\lambda\,(\alpha+\beta)}{\mu+\lambda}\,(1 - e^{-(\lambda+\mu)\,t}) + \alpha\,e^{-(\mu+\lambda)\,t} \tag{73}$$

Las integrales de (71) con los anteriores valores iniciales son:

$$\left.\begin{array}{l} n = \dfrac{\lambda\,\mu\,(\alpha+\beta)\,t}{\lambda+\mu} + \left(\dfrac{\lambda^2\,(\alpha+\beta)}{(\lambda+\mu)^2} + \dfrac{\mu\,\alpha}{\lambda+\mu}\right)(1 - e^{-(\lambda+\mu)\,t}) + \alpha\,e^{-(\lambda+\mu)\,t} \\ m = \dfrac{\lambda\,\mu\,(\alpha+\beta)\,t}{\lambda+\mu} + \left(\dfrac{\mu\,\alpha}{\lambda+\mu} - \dfrac{\lambda\,\mu\,\alpha}{(\lambda+\mu)^2}\right)(1 - e^{-(\lambda+\mu)\,t}) \end{array}\right\} \tag{74}$$

Asintóticamente para t tendiendo a infinito, se obtiene:

$$t \longrightarrow \infty \quad \frac{n}{t} = \frac{m}{t} = \frac{\lambda\,\mu\,(\alpha+\beta)}{\lambda+\mu}\,; \qquad n - m = \frac{\lambda\,(\alpha+\beta)}{\lambda+\mu} \tag{75}$$

Si en las anteriores hacemos $\alpha = 1$, $\beta = 0$, ó $\alpha = 0$, $\beta = 1$, se obtiene la teoría determinista para un solo individuo, según que inicialmente esté enfermo o sano. En este caso las (75) coinciden con el valor medio de la (48) y con (56).

Si en las ecuaciones anteriores, α y β significan los valores medios iniciales de enfermos y sanos en la población de tamaño aleatorio, entonces las (71) a (75) se conservan siendo n y m los valores medios de enfermos y sanos en el instante t.

Estos valores se obtienen también por las fórmulas:

$$\bar{n} = \alpha\left[\frac{\partial (g + g_1)(36)}{\partial u}\right]_{u=1,\, v=1} + \beta\left[\frac{\partial (g + g_1)(34)}{\partial u}\right]_{u=1,\, v=1}$$
$$\bar{m} = \alpha\left[\frac{\partial (g + g_1)(36)}{\partial v}\right]_{u=1,\, v=1} + \beta\left[\frac{\partial (g + g_1)(34)}{\partial v}\right]_{u=1,\, v=1} \qquad (76)$$

cuyo cálculo se simplifica en virtud de las (70).

4. El proceso estocástico de la salida de un gas en el vacío. Comparación con el proceso estocástico de la desintegración radioactiva

En trabajos anteriores (véase J, K, L) hemos investigado con profundidad los procesos estocásticos directo e inverso de la desintegración radioactiva, su comportamiento asintótico, así como los procesos estocásticos de las familias radioactivas. El proceso que vamos a investigar ahora y en el parágrafo siguiente, tiene un gran parecido matemático.

Supongamos un gas encerrado en un depósito de volumen v, según la teoría cinética de los gases se cumplen las:

$$p\, v = n\, \mathrm{R\,T}; \quad n = \frac{m}{\mathrm{M}}; \quad \frac{p}{\rho} = \frac{\mathrm{R\,T}}{\mathrm{M}} \qquad (77)$$

siendo p la presión, n el número de moles, R la constante de los gases, m la masa del gas, T la temperatura absoluta, ρ la densidad y M la masa de un mol.

Si se abre un orificio de sección (área) s en el depósito, la velocidad de salida V del gas en el vacío, como es sabido por el teorema de Bernoulli, es:

$$\frac{1}{2}\mathrm{V}^2 = \frac{p}{\rho} \Rightarrow \mathrm{V} = \sqrt{\frac{2p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\,\mathrm{R\,T}}{\mathrm{M}}} \qquad (78)$$

V es la antedicha velocidad de salida. Es fácil dar la teoría determinista de este fenómeno. Se cumple para la disminución de la masa o de la densidad del gas (que son proporcionales por ser el volumen constante) que:

$$d\,m = v\,d\,\rho = -\,\rho\,\mathrm{V}\,s\,d\,t \Rightarrow \rho = \rho_0\,e^{-(\mathrm{V}\,s/v)\,t} \tag{79}$$

denotando por el subíndice cero los valores iniciales. Se cumple también que:

$$\frac{n}{n_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{m}{m_0} \Rightarrow n = n_0\,e^{-(\mathrm{V}\,s/v)\,t} \tag{80 *}$$

Esta disminución exponencial de la masa es la misma que la que tiene lugar en la desintegración radiactiva, si hacemos la constante de desintegración radioactiva λ igual a:

$$\lambda = \frac{\mathrm{V}\,s}{v} \tag{81}$$

Al pasar de una teoría determinista a una probabilista $\lambda\,d\,t$ es la probabilidad de salida de una molécula de gas del depósito en el intervalo infinitesimal de tiempo de t a $t + d\,t$. Obsérvese que es directamente proporcional a la velocidad de salida V a la sección s del orificio e inversamente proporcional al volumen; $\lambda\,d\,t$ es pues la probabilidad de que estando la molécula en el volumen v, esté en el volumen $V\ s\ d\,t$, que es el volumen de gas que sale en el intervalo $d\,t$. Por tanto se puede desarrollar directamente la teoría probabilista de este fenómeno sin necesidad de conocer previamente la teoría determinista.

Si consideramos cualquier molécula (una sola), en cualquier instante t solamente puede estar dentro o fuera del depósito. Si llamamos P $(0, t)$ y P $(1, t)$ la probabilidad de que en el tiempo t la molécula esté dentro o fuera del depósito, se cumple que:

$$\mathrm{P}\,(0, t + d\,t) = \mathrm{P}\,(0, t)\,(1 - \lambda\,d\,t) \Rightarrow \mathrm{P}\,(0, t) = e^{-\lambda\,t} \tag{82}$$

luego en el tiempo t esta distribución de probabilidad es una ley binomial, y por la aditividad del proceso, la distribución de probabilidad de las n_0 moléculas en el tiempo t es la de Bernoulli de f. c.:

$$\varphi\,(z, t) = [1 + e^{-\lambda\,t}\,(e^{iz} - 1)]^{n_0} \tag{83}$$

(*) También el número de moléculas es proporcional al de moles. De ahora en adelante n significará el número de moléculas.

igual que en el caso radioactivo. Se tiene para el valor medio de las moléculas que en el tiempo t permanecen dentro del depósito la misma (80):

$$\bar{n}(t) = n_0 e^{-\lambda t} \tag{84}$$

Como n_0 es muy grande se cumple que:

$$\lim_{n_0 \to \infty} \frac{n(t)}{n_0} = e^{-\lambda t} \tag{85}$$

siendo la convergencia en probabilidad. Y asimismo que:

$$\lim_{n_0 \to \infty} \frac{n(t) - \bar{n}(t)}{\sqrt{n_0}} = \sigma \eta \tag{86}$$

siendo η una v. a. normal de valor medio nulo y varianza:

$$\sigma^2 = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}) \tag{87}$$

Se pasa en (86) del número n de moléculas a la masa m, multiplicando por la masa molecular m_m y se obtiene:

$$\lim_{m_0 \to \infty} \frac{m(t) - \bar{m}(t)}{\sqrt{m_0 \, m_m}} = \sigma \eta \tag{88}$$

Como este proceso estocástico es matemáticamente idéntico al de la desintegración radioactiva, para el estudio de las propiedades del proceso estocástico inverso (número de moléculas que han salido cierto, y tiempo aleatorio) remitimos a la bibliografía.

5. El proceso estocástico de la salida de un gas en la atmósfera

Si llamamos p_a a la presión atmosférica, el teorema de Bernoulli, para la velocidad de salida es en este caso:

$$\frac{1}{2} V^2 = \frac{p - p_a}{\rho} \tag{89}$$

y la disminución de la masa en una teoría determinista, viene dada por:

$$d m = v d \rho = - \rho V s d t = - \rho s \sqrt{2 \frac{p - p_a}{\rho}} d t = - s \sqrt{\frac{2 R T}{M}} \sqrt{\rho (\rho - \rho_a)}$$

$$\Rightarrow \frac{d \rho}{\sqrt{\rho (\rho - \rho_a)}} = - \frac{s}{v} \sqrt{\frac{2 R T}{M}} d t \qquad (90)$$

Mientras que en el caso del parágrafo anterior se tarda un tiempo infinito en vaciarse el depósito, aquí se tarda un tiempo finito en que el depósito se ponga a la presión atmosférica, porque la integral del primer miembro de (90) entre los límites ρ y ρ_a tiene un valor finito.

Para calcular dicha integral hagamos el cambio de variable:

$$\rho = \rho_a \, \mathrm{C}h^2 \varphi \Rightarrow \frac{d \rho}{\sqrt{\rho (\rho - \rho_a)}} = 2 d \varphi \qquad (91)$$

con lo que la última (90) se escribe:

$$d \varphi = - \frac{s}{v} \sqrt{\frac{R T}{2 M}} d t \Rightarrow \varphi_0 = \frac{s}{v} \sqrt{\frac{R T}{2 M}} t \qquad (92)$$

por el subíndice cero indicamos el valor de φ que corresponde a ρ_0 valor inicial de la densidad del gas (antes de abrir el depósito).

Se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{\rho}{\rho_a} = \mathrm{C}h^2 \varphi \Rightarrow e^{4\varphi} + e^{2\varphi} \left(2 - 4 \dfrac{\rho}{\rho_a}\right) + 1 = 0 \\ e^{2\varphi} = - 1 + \dfrac{2 \rho}{\rho_a} \pm \sqrt{\left(1 - \dfrac{2 \rho}{\rho_a}\right)^2 - 1} \end{array} \right\} \qquad (93)$$

El signo delante de la raíz cuadrada es +, porque el logaritmo neperiano ha de ser positivo, y el producto de las raíces de la ecuación de segundo grado (93) es igual a 1, luego una raíz ha de ser mayor que 1 y la otra menor que 1. Se tiene que:

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{2 \rho}{\rho_a} - 1 + \sqrt{\left(\frac{2 \rho}{\rho_a} - 1\right)^2 - 1} \right] \qquad (94)$$

$\varphi_0 - \varphi$ da el tiempo que tarda en bajar la densidad del gas de ρ_0 a ρ y como $\varphi_a = 0$, φ_0 da el tiempo que tarda en alcanzar la presión atmosférica el depósito.

También en este caso se cumplen las (77).

Si el depósito está inicialmente a una presión inferior a la atmosférica, entonces entra gas en el depósito (aire) según un proceso estocástico igual al antes descrito. El caso de dos depósitos puestos en comunicación, si las presiones iniciales de gas en uno y otro son distintas, se trata también de manera análoga.

Vamos a investigar el proceso estocástico inverso (tiempo aleatorio, y número de moléculas que permanecen dentro del depósito cierto) de la anterior teoría determinista. Primeramente podemos escribir a partir de (90) para la disminución del número de moléculas del depósito:

$$\lambda = \frac{s}{v}\sqrt{\frac{2\,R\,T}{M}}\,; \qquad d\,n = -\lambda\sqrt{n\,(n - n_a)}\,d\,t \tag{95}$$

Por tanto la probabilidad de que en intervalo de tiempo $d\,t$ salga una molécula del depósito, si en él hay n moléculas es:

$$\lambda\sqrt{n\,(n\,(n - n_a)}\,d\,t \tag{96}$$

Si llamamos F (t, n) a la función de distribución (f. d.) del tiempo aleatorio que transcurre entre que dentro del depósito haya n moléculas y $n - 1$, se tiene que:

$$F\,(t + d\,t, n) = F\,(t, n) + [1 - F\,(t, n)]\,\lambda\sqrt{n\,(n - a)}\,d\,t \tag{97}$$

de donde:

$$F\,(t, n) = 1 - e^{-\lambda\sqrt{n\,(n - a)}\,t}\,; \qquad \varphi\,(z, n) = \frac{1}{1 - \dfrac{i\,z}{\lambda\sqrt{n\,(n - a)}}} \tag{98}$$

por φ representamos la f. c. Es una distribución de probabilidad exponencial. El tiempo que tarda el depósito en alcanzar la presión atmosférica es una v. a., que por ser suma de v. a. independientes, cuyas f. c. son las (98) con n variando desde n_0 a $a + 1$, tiene por f. c.:

$$\prod_{n=a+1}^{n_0} \frac{\lambda \sqrt{n(n-a)}}{\lambda \sqrt{n(n-a)} - i z} \tag{99}$$

Se sigue por tanto que el valor medio del tiempo y la varianza vienen dados por las sumas:

$$\bar{t} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=a+1}^{n_0} \frac{1}{\sqrt{n(n-n_a)}}; \qquad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{n=a+1}^{n_0} \frac{1}{n(n-n_a)} \tag{100}$$

Siendo n_0 y a muy grandes, si hacemos $n_0 = k\,a$ $(k > 1)$, y hacemos tender a a infinito, las sumas (100) son finitas. En el caso del valor medio (primera suma) la suma se puede calcular mediante una integral, porque se tiene haciendo $n = x\,a$, $\dfrac{1}{a} = d\,x$, que:

$$\sum_{n=a+1}^{n_0} \frac{1}{n(n-n_a)} = \int_1 \frac{d\,x}{\sqrt{x(x-1)}} \tag{101}$$

pero esta integral es igual a:

$$\rho_0 = k\,\rho_a; \quad \rho = x\,\rho_a; \int_{\rho_a}^{\rho_0} \frac{d\,\rho}{\sqrt{\rho(\rho-\rho_a)}} \tag{102}$$

Por tanto en la teoría probabilista se obtiene el mismo valor que en la teoría determinista. Si el límite inferior de la integral lo hacemos igual a x, se calcula el tiempo que tarda en bajar la densidad del gas del depósito de ρ_0 a ρ.

Respecto a la varianza (segunda suma de (100)), si hacemos $n_0 = k\,a$, y a tiende a infinito es:

$$\frac{1}{a}\left(\sum_{a+1}^{k\,a} \frac{1}{n-a} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{a}\left(\sum_{1}^{(k-1)\,a} \frac{1}{n} - \sum_{1}^{k\,a} \frac{1}{n} + \sum_{1}^{a} \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{a}\left[\ln \frac{k-1}{k} + \ln a\right] \tag{103}$$

que tiende a cero, cuando a tiende a infinito como lo hace:

$$\frac{\ln a}{a} \tag{104}$$

luego la v. a. $n(t)$ converge en probabilidad y en media cuadrática a su valor medio $\bar{n}(t)$, cuando n_0 y a tienden a infinito, y la v. a. $n(t) - \bar{n}(t)$, es tal que:

$$\lim_{a \to \infty} [n(t) - \bar{n}(t)] \sqrt{\frac{a}{\ln a}} = \frac{1}{\lambda} \eta \tag{105}$$

siendo η una v. a. normal de valor medio nulo y varianza la unidad.

6. Nuevos teoremas del límite central para la adición de variables aleatorias en número aleatorio. Ley de los grandes números aleatorios

En anteriores trabajos (véase A, B, I, J, K, L) hemos investigado la adición de v. a. en número aleatorio y sus propiedades. Habiendo obtenido las siguientes fórmulas:

Si $\psi(z)$ es la f. c. de una v. a. discreta, que puede tomar los valores 0, 1, 2, ... (números naturales), siendo p_n la probabilidad de que tome el valor n, y si $\varphi(z)$ es la f. c. de una v. a. ξ, la suma de n v. a. $\xi_1, ..., \xi_n$, independientes de f. c. $\varphi(z)$, siendo n un número aleatorio de f. c. $\psi(z)$, se tiene que la f. c. $\theta(z, v)$ de la distribución conjunta del número n de sumandos aleatorio (v) y de la suma $\alpha(z)$ es:

$$\theta(z, v) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{inv} \varphi(z)^n = \psi\left(\frac{\log \varphi(z)}{i} + v\right) \tag{106 *}$$

Si en ella hacemos $v = 0$, se obtiene la f. c. de la distribución marginal de α. El cálculo nos da:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \Sigma p_n n e^{inv} \varphi(z)^{n-1} \varphi'(z)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \Sigma p_n n(n-1) e^{inv} \varphi(z)^{n-2} \varphi'(z)^2 + p_n e^{inv} n \varphi(z)^{n-1} \varphi''(z)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial v} = i \Sigma p_n n^2 e^{inv} \varphi(z)^{n-1} \varphi'(z) \tag{107}$$

(*) Si $n = 0$, por convenio tomamos $\alpha = 0$.

y si particularizamos para $v = 0$, $z = 0$, se obtiene:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)_0 = \Sigma p_n n \varphi'(0)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right)_0 = \Sigma p_n [n(n-1)\varphi'(0)^2 + n\varphi''(0)]$$

$$\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial v}\right)_0 = i \Sigma p_n n^2 \varphi'(0) \tag{108}$$

y de aquí:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\alpha} = \overline{n}\,\overline{\xi}; \quad \sigma_\alpha^2 = \overline{n}\,\sigma_\xi^2 + (\overline{\xi})^2 \sigma^2_n \\ &\overline{\alpha n} - \overline{\alpha}\,\overline{n} = \overline{\xi}\,\sigma^2_n; \quad r_{n\alpha} = \overline{\xi}\,\frac{\sigma_n}{\sigma_\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

donde $r_{n\alpha}$ es el coeficiente de correlación de n y α.

Supongamos ahora que $\psi(z, \lambda)$ depende de un parámetro λ tal que:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \psi(z, \lambda) = 0 \tag{110}$$

es decir la v. a. n, cuando λ tiende a infinito, tiende también a infinito, y que:

$$\lambda \to \infty \Rightarrow \overline{n} = \lambda m, \quad \sigma^2_n = \lambda \sigma^2 \tag{111}$$

siendo m y σ^2 constantes (independientes de λ), y que el momento central de tercer orden de n dividido por $\lambda^{3/2}$ tiende a cero, cuando λ tiende a infinito, entonces se cumple que:

$$\lambda \to \infty \Rightarrow \frac{\overline{\alpha}}{\lambda} = m\overline{\xi} \quad \frac{\sigma_\alpha^2}{\lambda} = m\,\sigma_\xi^2 + (\overline{\xi})^2 \sigma^2; \quad \frac{\overline{\alpha n} - \overline{\alpha}\,\overline{n}}{\lambda} = \overline{\xi}\,\sigma^2 \tag{112}$$

También se cumple que:

$$\lim \lambda \to \infty \left\{\begin{aligned} &\psi\left(\frac{z}{\lambda}\right) = e^{imz}; \quad \psi\left(\frac{z}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{-im\sqrt{\lambda}} = e^{-\sigma^2 z^2/2} \\ &\theta\left(\frac{z}{\lambda}, 0\right) = e^{izm\overline{\xi}}; \quad \theta\left(\frac{z}{\sqrt{\lambda}}, 0\right) e^{-izm\overline{\xi}\sqrt{\lambda}} = e^{-(m\sigma_\xi^2 + (\overline{\xi})^2\sigma^2) z^2/2} \end{aligned}\right. \tag{112 *}$$

(*) Véase la demostración en la nota final.

y que:

$$\lim \lambda \to \infty \left\{ \begin{array}{l} \theta\left(\dfrac{z}{\lambda}, \dfrac{v}{\lambda}\right) = e^{i z m \overline{\xi} + i v m} \\ \theta\left(\dfrac{z}{\sqrt{\lambda}}, \dfrac{v}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{-i(z m \overline{\xi} + v m) \sqrt{\lambda}} = \\ e^{-\frac{1}{2}[(m \sigma_\xi^2 + (\overline{\xi})^2 \sigma^2) z^2 + \sigma^2 v^2 + 2 \overline{\xi} \sigma^2 z v)} \end{array} \right. \qquad (113\ ^*)$$

Es decir que α/λ converge en probabilidad a $m\,\overline{\xi}$, cuando λ tiende a infinito y que:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{\alpha - \lambda m \overline{\xi}}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{m \sigma_\xi^2 + (\overline{\xi})^2 \sigma^2}\, \eta \qquad (114)$$

siendo η una v. a. normal de valor medio nulo y varianza la unidad. La cual resulta de la última (112) o de hacer $v = 0$ en (113). Las (112) a (114) expresan los teoremas del límite central para la adición de v. a. en número aleatorio, y también la ley de los grandes números aleatorios.

Obsérvese que en este caso el número aleatorio de sumandos es muy grande. Lo cual vamos a aplicar en el parágrafo siguiente.

7. El proceso estocástico de las fluctuaciones de densidad y energía en un gas o en un colectivo de partículas

Si hay N partículas en un volumen V, y la probabilidad de que una partícula pase de la posición A a la B, es la misma que la de que pase de B a A (no existen posiciones privilegiadas), la cadena de Markov de las posiciones de las partículas tiene la potencia del continuo (existe una infinidad de estados), pero la matriz estocástica de las probabilidades de transición (que es una matriz continua) es simétrica y por tanto biestocástica, y por tanto cuando el tiempo tiende a infinito (el número de transiciones tiende a infinito) la probabilidad de la presencia de una partícula en cualquier posición es la misma. Es decir las partículas tienden a repartirse uniformemente al azar por todo el volumen.

No obstante como el razonamiento anterior introduce el infinito, vamos a dar una demostración sin necesidad de introducir el conti-

(*) Véase la demostración en la nota final.

nuo. Si dividimos el volumen V en m volúmenes iguales $v = V/m$, por la hipótesis hecha antes la probabilidad P_{ij} de que la partícula pase del ísimo volumen v_i al j volumen v_j es igual a p_{ji}, por tanto la matriz de las probabilidades de transición de la cadena de Markov que ahora tiene solamente m estados es simétrica, luego biestocástica, y por tanto las partículas tienden a repartirse en partes iguales entre los m volúmenes.

Incluso podemos descomponer el volumen V en m volúmenes, que pueden ser distintos:

$$V = v_1 + \ldots + v_m \tag{115}$$

y con la hipótesis del principio del parágrafo se tiene que:

$$\frac{p_{ij}}{p_{ji}} = \frac{v_j}{v_i} \Rightarrow p_{ij} = \lambda_{ij}\frac{v_j}{V}\,; \quad p_{ji} = \lambda_{ji}\frac{v_i}{V} \Rightarrow \lambda_{ij} = \lambda_{ji} \tag{116}$$

y por ser la matriz estocástica es:

$$\frac{1}{V}\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}v_j = 1 \tag{117}$$

y esta matriz A es la:

$$A = \left\| \begin{matrix} \lambda_{11}\frac{v_1}{V} & \lambda_{12}\frac{v_2}{V} \ldots \lambda_{1m} & \frac{v_m}{V} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{m1}\frac{v_1}{V} & \lambda_{m2}\frac{v_2}{V} \ldots \lambda_{mm} & \frac{v_m}{V} \end{matrix} \right\| \tag{118}$$

El vector propio de la matriz A, correspondiente al valor propio 1 es el:

$$\frac{1}{V}\,\| v_1, \ldots, v_m \| \tag{119}$$

porque:

$$\frac{1}{V}\,\| v_1, \ldots v_m \|\, A = \frac{1}{V}\left\| v_1 \Sigma \lambda_{i1}\frac{v_i}{V}, \ldots v_m \Sigma \lambda_{im}\frac{v_i}{V} \right\| \tag{120}$$

y como por (116) y (117) es:

$$\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ij}v_i = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ji}v_i = 1 \tag{121}$$

queda demostrada la propiedad anterior. Por tanto el límite cuando n tiende a infinito de A^n es la matriz cuyas filas son todas iguales al vector propio (119) correspondiente al valor propio la unidad, y por la propiedad ergódica, es este vector el que da la distribución final de probabilidad. Como lo anterior se cumple cualesquiera que sea la división de V en volúmenes parciales, se sigue el repartimiento uniformemente al azar de las partículas sobre todo el volumen V. Repartimiento que es estable, es decir que cualquier perturbación de la misma, el tiempo la anula, se vuelve a alcanzar el repartimiento uniforme al azar, como consecuencia de la antecitada propiedad ergódica.

La distribución de las partículas (en número de N) entre los m volúmenes $v_1, \ldots, v_m$ en que se ha descompuesto V, viene dada por la ley multinomial de f. c.:

$$\left[\frac{v_1 e^{iz_1} + \ldots + v_m e^{iz_m}}{V}\right]^N \tag{122}$$

Se sigue que la distribución de partículas en el interior de un volumen cualquiera v, contenido en V, viene dada por la distribución de Bernoulli de f. c.:

$$\left[1 + \frac{v}{V}(e^{iz} - 1)\right]^N \tag{123}$$

de valor medio y varianza:

$$\bar{n} = N\frac{v}{V}; \quad \sigma^2{}_n = N\frac{v}{V}\left(1 - \frac{v}{V}\right) \tag{124}$$

n es el número de partículas en v.

Si a estas partículas hay asociada una magnitud física (energía, velocidad, etc.) distribuida aleatoriamente entre las partículas, si a esta v. a. la denotamos por ξ (véase parágrafo 6), la cantidad de esta magnitud física poseída por todas las partículas en v, es una v. a. α, suma de v. a. ξ independientes, en número aleatorio n. Por tanto se le pueden aplicar las fórmulas (106) a (109).

Si N tiende a infinito, desempeña el papel de λ del parágrafo 6, y se le pueden aplicar las fórmulas (110), (111), (112), (113) y (114). Cuando N es muy grande estas fórmulas son muy aproximadas a la realidad.

Si:

$$N \to \infty, \quad V \to \infty, \quad \lim N \frac{v}{V} \to m \tag{125}$$

la f. c. (123) tiende a la f. c. de la distribución de Poisson:

$$e^{m(e^{iz}-1)} \tag{126}$$

de valor medio y varianza iguales:

$$\bar{m} = \sigma^2 = m \tag{127 *}$$

con lo que las fórmulas del parágrafo 6 se simplifican notablemente.

Estas fórmulas se pueden aplicar a diversos fenómenos físicos, tales como la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann de las moléculas de un gas, o a la distribución de su energía cinética, que es una distribución gamma de función de frecuencias y f. c. respectivamente:

$$\frac{2}{(k\,T)^{3/2}\sqrt{\pi}}\, e^{-E/kT}\sqrt{E}\,; \qquad \left(\frac{1}{1 - i z k T}\right)^{3/2} \tag{128}$$

cuyos valores medio y varianza son:

$$\bar{E} = \frac{3\,k\,T}{2}\,; \qquad \sigma = \sqrt{\frac{3}{2}}\,k\,T \tag{129}$$

También a la distribución de la energía potencial de un colectivo de momentos magnéticos elementales en un campo magnético, que es una distribución exponencial de función de frecuencias y f. c.:

$$\frac{1}{k\,T}\, e^{-E/kT}; \qquad \frac{1}{1 - i z k T} \tag{130}$$

cuyos valores medio y variaza son:

$$\bar{E} = k\,T, \quad \sigma = k\,T \tag{131}$$

(*) Cuando N es muy grande y v es del orden de V/N, la ley de Poisson y las fórmulas del § 6 que de ella se derivan son muy próximas a la realidad.

En estas últimas fórmulas E es la energía, k la constante de Boltzmann, y T la temperatura absoluta.

Y en general se puede aplicar a otros muchos fenómenos físicos (teoría de fluctuaciones). Se obtienen desviaciones respecto a las teorías en que se considera fijo el número de partículas en un volumen fijo. El desarrollo de todas las aplicaciones nos llevaría a escribir una monografía.

Nota.—Cálculo de los momentos centrales de tercer orden de la adición de variables aleatorias en número aleatorio

Para demostrar la ley de los grandes números aleatorios y los correspondientes teoremas del límite central del § 6, fórmulas (110) a (114) es preciso demostrar que:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{\overline{(n-\bar{n})^3}}{\lambda^{3/2}} = 0 \Rightarrow \lim_{\lambda \to \infty} \frac{\overline{(\alpha-\bar{\alpha})^3}}{\lambda^{3/2}} = 0 \tag{132}$$

Para demostrarlo, es preciso calcular previamente el momento central de tercer orden de α. Se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^3\,\theta(z)}{d\,z^3} &= \Sigma\, n\,(n - (1\,(n-2)\,p_n\,\varphi(z)^{n-3}\,\varphi'(z)^3 + \\ &+ 3\,n\,(n-1)\,p_n\,\varphi(z)^{n-2}\,\varphi'(z)\,\varphi''(z) + n\,p_n\,\varphi(z)^{n-1}\,\varphi'''(z) \end{aligned} \tag{133}$$

y de aquí teniendo en cuenta las fórmulas del § 6 es:

$$\overline{\alpha^3} = (\overline{n^3} - 3\,\overline{n^2} + 2\,\bar{n})(\bar{\xi})^3 + 3\,(\overline{n^2} - \bar{n})\,\bar{\xi}\,\overline{\xi^2} + \bar{n}\,\overline{\xi^3} \tag{134}$$

para el momento de tercer orden, y para el momento central de tercer orden, se obtiene:

$$\overline{(\alpha - \bar{\alpha})^3} = (\overline{(n-\bar{n})^3} - 3\,\sigma^2{}_n + 2\,\bar{n})(\bar{\xi})^3 - 3\,\bar{n}\,\bar{\xi}\,\overline{\xi^2} + \bar{n}\,\overline{\xi^3} \tag{135}$$

y como:

$$\lambda \to \infty \Rightarrow \frac{\bar{n}}{\lambda^{3/2}} \to 0, \quad \frac{\sigma^2{}_n}{\lambda^{3/2}} \to 0; \quad \frac{\overline{(n-\bar{n})^3}}{\lambda^{3/2}} \to 0 \tag{136 *}$$

(*) Esta última lo es por hipótesis y las dos primeras por las (111).

se sigue la (132), lo que demuestra el final del § 6 (ley de los grandes números aleatorios y teoremas del límite central correspondientes).

Este teorema sirve para demostrar la última (112). Para demostrar la última (113) hay que demostrar que también los momentos mixtos de tercer orden de α y n, tienden a cero, cuando λ tiende a infinito, como $\lambda^{-3/2}$. Para ello es preciso calcularlos y se obtienen los valores:

$$\left.\begin{aligned} \overline{(\alpha - \overline{\alpha})^2 (n - \bar{n})} &= \sigma^2{}_n \sigma^2{}_\xi + (\overline{\xi})^2 \overline{(n - \bar{n})^3} \\ \overline{(\alpha - \overline{\alpha}) (n - \bar{n})^2} &= \overline{\xi}\, \overline{(n - \bar{n})^3} \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

que demuestra que la primera (132) implica también:

$$\lambda \to \infty \Rightarrow \lim \frac{\overline{(\alpha - \overline{\alpha})^2 (n - \bar{n})}}{\lambda^{3/2}} = 0;$$

$$\lim \frac{\overline{(\alpha - \overline{\alpha}) (n - \bar{n})^2}}{\lambda^{3/2}} = 0 \tag{138}$$

Bibliografía

Las memorias del autor a las que se hace referencia en el texto son:

A) «Nuevos modelos de distribuciones y de procesos estocásticos», 1958.

B) «Algunos nuevos procesos estocásticos y sus aplicaciones», 1959.

C) «El proceso estocástico de la recombinación iónica y una teoría de la curva logística», 1976.

D) «Los procesos estocásticos del equilibrio químico y una teoría estadsítica de la ley de acción de masas», 1976.

E) «Nuevas leyes de los sucesos raros y los procesos estocásticos del equilibrio químico», 1976.

F) «El proceso estocástico del agente provocador», 1979.

G) «Cadenas de Markov en poblaciones aleatorias y probabilidades en cadena generalizadas», 1981.

Todas las anteriores publicadas en la *Revista de la Real Academia de Ciencias*.

H) «Vectores aleatorios en los espacios de Hilbert y en los espacios euclídeos», 1976.

I) «Un proceso estocástico tridimensional de natalidad, mortalidad e inmigración», 1979.

Las dos últimas publicadas en el *Buletinul Institutului Polithenic din IASI* (Rumanía).

Y los libros del autor a los que se hace referencia son:

J) «Cálculo de Probabilidades y Procesos Estocásticos», edit. Paraninfo, 1974.

K) «Líneas de investigación en los procesos estocásticos y el movimiento browniano», editado por el Instituto de España, 1975.

L) «Introducción a la Investigación en Física y Matemáticas», edit. Empeño, 1981.

M) «Diccionario de Matemática Moderna», Editora Nacional, 2.ª edición, 1982.

N) «Fundamentos de Mecánica Cuántica», edit. ETS Ingenieros Agrónomos, 1979, distribuido por editorial Paraninfo.

O) «Matemática Financiera», edit. Dossat, 1970.