UNA CARACTERIZACION GEOMETRICA DE BASES INCONDICIONALES

Andrés Reyes

Recibido: 2 diciembre 1981

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO CORRESPONDIENTE D. ANTONIO PLANS

Concerning the theory of unconditional bases in Banach spaces, we prove the following result:

A M-basis in a Banach space is an unconditional basis if and only if its coordinate space is solid.

The proof is based in the geometric behavior of the linear, closed spans generated by the subsequences of the given sequence.

1. Introducción

Si $S = (a_n, a_n^*)_{n \in N}$ es un sistema biortogonal completo en un espacio de Banach B, y x es un vector de B, se define la *coordenada n-ésima* de x respecto de S como el escalar $x^{(n)} = a_n^*(x)$. De esta manera, queda asociado a cada vector x en B, y de modo natural, la sucesión de escalares $(x^{(n)})_{n \in N}$. Designemos por τ_S la aplicación lineal coordenada: $x \longrightarrow (x^{(n)})_{n \in N}$. Obviamente, el núcleo de τ_S es $\bigcap_{n \in N}$ Ker. a_n^*.

Se tiene el siguiente resultado:

TEOREMA.—*Si S es una M-base, son equivalentes:*

(i) *S es una base incondicional.*

(ii) *El espacio imagen de τ_S, Im. τ_S, es sólido (v. Definición 5.2).*

(iii)

$$M(S) = \{(\lambda_n)_{n \in N};\ (\lambda_n x^{(n)})_{n \in N} \in \text{Im.}\, \tau_S,\ \ x \in B\},$$

contiene todas las sucesiones de escalares convergentes a cero.

En [2], Kadec demostró que (i) es equivalente a (iii). Por otro lado, tal caracterización de base incondicional es menos geométrica que la establecida por (ii). El objeto de este trabajo es el de obtener una prueba de (ii) $\Longrightarrow$ (i) ((i) $\Longrightarrow$ (ii) se sigue fácilmente, ver [3]). Basaremos la prueba en el *comportamiento de las envolturas lineales y cerradas engendradas por las subsucesiones de la sucesión dada* (comportamiento geométrico). Interesa notar que la caracterización dada por Kadec ya da una prueba (*indirecta*) de (ii) $\Longrightarrow$ (i), pues es trivial que (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Nuestra aportación pues, consiste *exclusivamente* en una nueva demostración (geométrica) de (ii) $\Longrightarrow$ (i).

2. Definiciones y resultados previos

Con B denotaremos un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), y si B_1 es un subconjunto de B, $[B_1]$ denotará el subespacio lineal y cerrado engendrado por B_1. En lo sucesivo nos referiremos a sistemas en B de la forma $S = (a_n, a_n^*)_{n \in N}$, donde $(a_n)_{n \in N}$ es una *sucesión minimal y completa* en B (i. e.

$$a_n \notin [a_k; k \in N - \{n\}] \; (n \in N), \quad y \quad [a_n; n \in N] = B),$$

y $(a_n^*)_{n \in N}$ es su sucesión conjugada (i. e. $a_n^* (a_m) = \delta_{nm}$).

Si T es un subconjunto de N, pondremos

$$W_T = [a_k : k \in T]$$

y

$$W^*_T = \bigcap_{k \notin T} \operatorname{Ker.} a^*_k .$$

Evidentemente $W_T \subseteq W^*_T$.

El *núcleo* de $(a_n)_{n \in N}$ se define como W^*_Φ, siendo Φ el conjunto vacío.

No resulta difícil probar:

1.2. Proposición.—Para cualquier familia $(T_\alpha ; \alpha \in J)$ de subconjuntos de N, se tiene

$$\bigcap_{\alpha \in J} W^*_{T_\alpha} = W^*_{\bigcap_{\alpha \in J} T_\alpha} .$$

2.2. DEFINICIÓN.—La sucesión $(a_n)_{n \in N}$ se dice que es una *M-base* (ó base de Markusevic) si su núcleo es el subespacio nulo (equivalentemente, la aplicación τ_S es inyectiva).

Para un estudio sobre M-bases (y en general, todo tipo de bases), recomendamos [5].

La sucesión $(a_n)_{n \in N}$ se dice que es una *base incondicional* (ó heterogonal) si para todo vector x en B, la serie $\sum_{n \in N} x^{(n)} a_n$ converge incondicionalmente a x.

Es evidente entonces que toda base incondicional es una M-base.

En [4], Lorch estableció la siguiente y notable caracterización geométrica para que una sucesión completa cualquiera en B sea una base incondicional:

3.2. PROPOSICIÓN.—Una sucesión de vectores completa en B es una base incondicional si y sólo si

$$B = W_T \oplus W_{N-T},$$

cualquiera que sea $T \subseteq N$.

Dados M, N subespacios lineales y cerrados en B, denotaremos con $\partial(M, N)$ a la *inclinación* de M relativa a N

$$\partial(M, N) = \inf\{\, \| a + b \| ; \quad a \in M, \| a \| = 1, \quad b \in N\}.$$

El siguiente resultado es debido a Grimblyum:

4.2. PROPOSICIÓN (Grimblyum [1]).—Si M, N son dos subespacios lineales y cerrados en B con $M \cap N = \{o\}$, la suma algebraica $M + N$ es cerrada si y sólo si $\partial(M, N) > 0$.

5.2. DEFINICIÓN.—Se dice que un conjunto L de sucesiones de escalares es *sólido* si para toda sucesión $(\lambda_n)_{n \in N}$ en L y para toda sucesión de escalares $(\mu_n)_{n \in N}$ tal que

$$| \mu_n | \leq | \lambda_n | \quad (n \in N),$$

se verifica $(\mu_n)_{n \in N} \in L$.

Estamos ya en condiciones de demostrar la implicación (ii) $\Longrightarrow$ (i), objeto de este trabajo.

3. Prueba de (ii) $\Longrightarrow$ (i)

De acuerdo con Prop. 3.2, hemos de probar que para todo subconjunto T de N, $B = W_T \oplus W_{N-T}$. Sea x un elemento arbitrario de B, y sea $(x^{(n)})_{n \in N} \in \text{Im. } \tau_S$ su sucesión coordenada. Puesto que, por hipótesis, Im. τ_S es un conjunto sólido, se sigue la existencia de vectores x_1, x_2 en B tales que

$$\tau_S(x_1) = (y^{(n)})_{n \in N}, \quad \text{con} \begin{cases} y^{(n)} = x^{(n)}, & \text{si} \quad n \in T \\ y^{(n)} = 0 \quad , & \text{si} \quad n \notin T \end{cases}$$

y

$$\tau_S(x_2) = (z^{(n)})_{n \in N}, \quad \text{con} \begin{cases} z^{(n)} = 0 \quad , & \text{si} \quad n \in T \\ z^{(n)} = x^{(n)}, & \text{si} \quad n \notin T \end{cases}$$

Se tiene

$$(x^{(n)})_{n \in N} = (y^{(n)})_{n \in N} + (z^{(n)})_{n \in N},$$

luego el carácter lineal e inyectivo de τ_S implica $x = x_1 + x_2$.

Además es claro que $x_1 \in W^*_T$ y que $x_2 \in W^*_{N-T}$. Por consiguiente, queda probado

$$B = W^*_T + W^*_{N-T}.$$

Puesto que

$$W^*_T \cap W^*_{N-T} \underset{1.2.}{=} W^*_\Phi = \{o\},$$

se sigue que la anterior suma es directa.

Entonces

$$W_T \cap W_{N-T} \subseteq W^*_T \cap W^*_{N-T} = \{o\}$$

y

$$\partial(W_T, W_{N-T}) \geq \partial(W^*_T, W^*_{N-T}) \underset{4.2.}{>} 0.$$

Luego por la Proposición 4.2, concluimos

$$B = W_T \oplus W_{N-T}.$$

Bibliografía

[1] GRIMBLYUM, M. M. (1950). On the representation of a space of type B in the form of a direct sum of subspaces. *Dokl. Akad. Nauk. Ukr. SSSR*, **70**, 749-752.

[2] KADEC, M. I. (1964). Bases and their spaces of coefficients. *Dopovidi Akad. Nauk. Ukr. RSR*, **9**, 1139-1141.

[3] LINDENSTRAUSS, J.-TZAFRIRI, L. (1973). Classical Banach spaces. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, p. 16.

[4] LORCH, E. R. (1939). Bicontinuous linear transformations in certain vector spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45**, 564-569.

[5] SINGER, I. (1981). Bases in Banach Spaces II. Springer-Verlag.

CORRECCION A

UNA NOTA SOBRE EL TEOREMA DE KREIN

V. Montesinos

(«Rev. Real Academia de Ciencias», t. LXXVI, c. 1.º, 1982, pp. 73-77)

Se omitió por error una línea en la formulación de la Proposición 3. Dicha Proposición queda así: *Sea B un disco de Banach. Si $B = \overline{\Gamma(A)}$, donde A es $\sigma(E, E')$-relativamente numerablemente compacto, entonces, sobre B coinciden las topologías $\sigma(E, E')$ y $\sigma(E, K(E'))$.*