UNA NOTA SOBRE ESPACIOS ESCALONADOS GENERALES

Miguel Florencio Lora

Recibido: 4 noviembre 1981

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

Let K (E, a^n) be the projective limit of a sequence of weighted Banach spaces (E (a^n)), E being a Banach space with basis. For suitable E several well-know characterizations of K (E, a^n) being Schwartz exist. Here we provide an unified approach to these results. Related tests of nuclearity are included.

Sea (B, $\| \, \|$) un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) provisto de una base de Schauder (a_n). Sea E el espacio de sucesiones en $\mathbb{K}$ $y = (y_n)$ tales que $\Sigma\, y_n \cdot a_n$ converge en B. Si dotamos a E de la norma

$$\| \quad \| = \sup_k \left\| \sum_{n=1}^{k} y_n \cdot a_n \right\|$$

obtenemos que E es un Banach isomorfo a B. En lo que sigue consideraremos B identificado con E.

Si $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ son dos sucesiones en $\mathbb{K}$ escribimos $x \cdot y$ para denotar la sucesión $(x_n \cdot y_n)$. Por $x = (x_n) \in$ E denotamos que $\Sigma\, x_n \cdot e_n$ converge en E, donde e_n es la sucesión cuyos términos son todos nulos salvo el n-ésimo que vale la unidad.

Los siguientes resultados y definiciones pueden encontrarse en [8]: «Dado un espacio de Banach E, dotado de base de Schauder, sea

$$\mathrm{R}(\mathrm{E}) = \{a = (a_n) : a \cdot x \in \mathrm{E}, \quad \forall x \in \mathrm{E}\}.$$

R (E) contiene a la envoltura lineal de los vectores (e_n), $n = 1$, 2, 3, ... y la aplicación lineal $A(a): E \longrightarrow E$, con $a \in R(E)$, definida mediante $A(a)(x) = \Sigma a_n x_n e_n$ es continua. Dotamos a R (E) de una norma $\| a \| = \| A(a) \|$ donde la última norma es la del espacio B (E) de las aplicaciones lineales y continuas de E en E. Se satisface que $\| a \| \geqslant \sup | a_n |$, por lo que R (E) está contenido en l^∞ como espacios vectoriales».

Sea S (E) la clausura de φ en R (E) dotado de la norma anterior. No es difícil probar que los vectores (e_n), $n = 1, 2, \ldots$ forman una base de Schauder de S (E) y que S (E) está contenido en c_0.

Proposición 1.—Sea $a \in R(E)$. La aplicación $A(a): E \longrightarrow E$ es compacta si y sólo si $a \in S(E)$.

Demostración.—Sea B la bola unidad cerrada de E. Como $e_1, e_2, e_3, \ldots$ constituyen una base de E, podemos aplicar la caracterización de los conjuntos relativamente compactos en espacios de Banach con base (véase [7], pág. 166) para obtener que A (a) (B) es relativamente compacto, si y sólo si:

$$\lim_n \sup_{y \in A(a)(B)} \| y - P_n(y) \| = \lim_n \sup_{x \in B} \| a \cdot x - P_n(a \cdot x) \| =$$
$$= \lim_n \sup_{x \in B} \| A(a - P_n(a))(x) \| = \lim_n \| a - P_n(a) \| = 0.$$

donde $P_n(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ con $x = (x_n)$. Teniendo en cuenta que (e_n) es base de S (E), concluimos la prueba, observando que $a \in S(E)$ si y sólo si $\lim_n \| a - P_n(a) \| = 0$.

Dada una sucesión fija $a = (a_n)$ con $a_n \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Definimos $E(a) = \{x = (x_n) : a \cdot x \in E\}$. La transformación diagonal $D_a : E(a) \longrightarrow E$, $D_a(x) = a \cdot x$ es un isomorfismo algebraico que se convierte en isometría sin más que dotar a E (a) de estructura de espacio de Banach mediante $\| x \|_a = \| a \cdot x \|$. Si $b = (b_n)$, con $b_n \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces es fácil observar que si $b/a = (b_n/a_n)$ pertenece a R (E) necesariamente la inyección canónica $I_{a,b} : E(a) \longrightarrow E(b)$ es continua y recíprocamente

$$(I_{a,b} = D_{(1/b)} \circ A(b/a) \circ D_a).$$

Corolario 1.1.—La inyección canónica $I_{a,b}$ es compacta si y sólo si $b/a \in S(E)$.

Sea $a^n = (a_i^n)$ una sucesión de escalones, con $a_i^n \neq 0$, n, $i = 1$, 2, 3, ... Si para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $a^n/a^{n+1} \in \mathrm{R}(\mathrm{E})$ dispondremos de la siguiente situación:

$$\mathrm{E}(a^1) \xleftarrow{\mathrm{I}_1} \supset \mathrm{E}(a^2) \xleftarrow{\mathrm{I}_2} \supset \ldots \longleftarrow \supset \mathrm{E}(a^n) \xleftarrow{\mathrm{I}_n} \supset \mathrm{E}(a^{n+1}) \longleftarrow \supset \ldots$$

con cada I_n continua. Por lo que tiene sentido considerar el espacio escalonado K (E, a^n) límite proyectivo de estos espacios. No es difícil comprobar que K (E, a^n) es un espacio de Fréchet y que su topología puede ser descrita por la familia numerable de seminormas $q_n(x) = \| x \|_{a^n}$. Bajo estas consideraciones tenemos que:

Corolario 1.2.—El espacio K (E, a^n) es un espacio de Schwartz si y sólo si para cada natural n existe un natural $r > n$, tal que $a^n/a^r \in \mathrm{S}(\mathrm{E})$.

Ejemplos:

I. Es fácil comprobar que

$$\mathrm{R}(l^1) = \mathrm{R}(l^p) = \mathrm{R}(c_0) = l^\infty$$

con lo que es inmediato que

$$\mathrm{S}(l^1) = \mathrm{S}(l^p) = \mathrm{S}(c_0) = c_0$$

siendo $p \geqslant 1$. Además cada una de las normas es la de l^∞. Aplicando el corolario 1.2, se obtienen las caracterizaciones de escalonados de Schwartz de orden 1, de orden p (ver [11]) y de orden cero (ver [10]).

II. Sea $c\,s$ el espacio de Banach de todas las sucesiones sumables. Es inmediato que (e_n) es base de $c\,s$. Claramente

$$\mathrm{R}(c\,s) = c\,s^\beta = b\,v,$$

en donde por $c\,s^\beta$ indicamos el β-dual de $c\,s$ (ver [3] y [4]); la norma de R ($c\,s$) coincide con la usual de $b\,v$, es decir,

$$\| a \| = \Sigma \mid a_n - a_{n+1} \mid + \lim \mid a_n \mid .$$

Como los vectores e_1, e_2, e_3, ... forma una base de $b\,v_0$ (ver [8], pág. 108) se sigue que $S(cs) = b\,v_0$. Aplicamos el corolario 1.2 y se obtiene la siguiente:

Proposición 2.—El espacio $K(cs, a^n)$ es Schwartz si y sólo si para cada natural n existe un natural $r > n$, tal que

$$\sum_i \left| \frac{a_i^n}{a_i^r} - \frac{a^n_{i+1}}{a^r_{i+1}} \right| < \infty \quad \text{y} \quad \lim_i \frac{a_i^n}{a_i^r} = 0.$$

III. Sea λ_∞ un espacio escalonado de orden infinito. En [2], Dubinsky introduce estos espacios y caracteriza aquellos que son Schwartz: «λ_∞ es un espacio de Schwartz si y sólo si para cada natural n existe un natural $r > n$ tal que

$$\lim_i a_i^n / a_i^r = 0,$$

siendo

$$\lambda_\infty = \underset{\underset{n}{\longleftarrow}}{\lim}\, l^\infty (a^n)».$$

Este resultado podemos obtenerlo de I. Si λ_∞ es Schwartz, entonces su subespacio cerrado λ_0, que es el escalonado de orden cero correspondiente, es un espacio de Schwartz y por tanto reflexivo. Como λ_∞ es el bidual fuerte de λ_0, se sigue que $\lambda_\infty = \lambda_0$ y basta aplicar I. Recíprocamente, si se cumple la condición, entonces el λ_0 construido con esos escalones es Schwartz, luego λ_0 coincide con λ_∞ y, así, λ_∞ es Schwartz.

Para cada natural n, sea $f_n \in E'$ tal que $f_n(e_m) = \delta_{nm}$, $m = 1, 2, \ldots$ y sea $a = (a_n) \in l^1$. Entonces, $A(a)$ es nuclear. En efecto,

$$\|f_n\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|f_n(x) \cdot e_n\|}{\|e_n\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|P_n(x) - P_{n-1}(x)\|}{\|e_n\|} \leq \frac{2K}{\|e_n\|}.$$

siendo K la constante de la base (e_n) de E. Como

$$A(a)(x) = \Sigma \langle x, a_n f_n \rangle \cdot e_n$$

y como

$$\Sigma \|a_n f_n\| \cdot \|e_n\| < +\infty,$$

se sigue que $A(a)$ es nuclear y así podemos enunciar:

PROPOSICIÓN 3.—Si para cada natural n existe un natural $r > n$ tal que $a^n/a^r \in l^1$, entonces K (E, a^n) es nuclear.

Analizaremos el recíproco en algunos ejemplos:

a) Si K (E, a^n) es un escalonado de orden uno, la condición es necesaria debido a [6, pág. 220]. b) Si K (E, a^n) es un escalonado de orden cero, la condición es también necesaria, pues si A (a): $c_0 \longrightarrow c_0$ es nuclear, también lo será su traspuesta A $(a)^*$: $l^1 \longrightarrow l^1$ y como la matriz representativa de ambas es la misma, por ser diagonal, se vuelve a aplicar [6, pág. 220] y se obtiene que $a \in l^1$. c) Si E $= cs$ la condición de nuclearidad es también necesaria: sea A (a): $cs \longrightarrow cs$ nuclear. También será nuclear la aplicación

$$h \circ \mathrm{T} \circ \mathrm{A}(a) \circ \mathrm{T}^{-1} \circ h^{-1},$$

siendo T: $cs \longrightarrow c$ y h: $c \longrightarrow c_0$ los isomorfismos habituales, es decir,

$$\mathrm{T}(x) = \left(\sum_1^n x_i\right)_{n \in \mathrm{N}}, \quad x \in cs$$

y

$$h(y) = (\lim y_n, y_1 - \lim y_n, y_2 - \lim y_n, \ldots)$$

con $y \in c$. Es fácil ver que si H (a) es la traspuesta de

$$h \circ \mathrm{T} \circ \mathrm{A}(a) \circ \mathrm{T}^{-1} \circ h^{-1},$$

entonces

$$\mathrm{H}(a)(e_n) = \sum_m b_{mn} \cdot e_m,$$

con $b_{mn} = 0$ si $m < n$, $b_{mn} = a_n$ si $m = n$, $b_{mn} = a_{m-1} - a_m$ si $m > n$. Por tanto $\sup |b_{mn}| \geq |a_m|$ y aplicando de nuevo [6, pág. 220] se sigue que $a \in l^1$.

En [1], Crofts considera el espacio escalonado K (λ, a^n), donde λ es un espacio de sucesiones perfecto y tal que $\lambda[\beta(\lambda, \lambda^x)]$ sea un espacio de Banach, y caracteriza a los que son de Schwartz. En nuestro caso, no presuponemos que el espacio E sea perfecto, por lo que podemos usar los resultados obtenidos a espacios como c_0

y *c s* a los que no es posible aplicar [1], pues son espacios no perfectos, pero sí poseen una base.

Por otro lado, suponemos que la topología normada de E está dada incluso antes de identificar a E con un espacio de sucesiones, por lo que no le exigimos ninguna relación con la α-dualidad, luego luego no es necesario que sea la topología β (E, E^x). En estos dos aspectos hemos obtenido una generalización de [1].

Bajo las hipótesis de [1], si β (E, E^x) es compatible con la dualidad, se sigue de [5, pág. 417] que (e_n) es una base de E, por lo que también este caso queda incluido en nuestro estudio.

No sabemos si un estudio para topologías β (λ, λ^x) no compatibles con la dualidad, análogo al realizado en el ejemplo III, permitirá reducir el comportamiento del correspondiente espacio escalonado al de otro generado por un Banach con base.

Referencias

[1] CROFTS, G. (1969). Concerning Perfect Fréchet Spaces and Diagonal Transformations. *Math. Ann.*, **182**, 67-76.
[2] DUBINSKY, E. (1965). Echelon spaces of order ∞. *Proc. Am. Math. Soc.*, **16**, **6**, 17-78-1183.
[3] GARLING, D. J. H. (1967). On topological sequence spaces. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **63**, 997-1019.
[4] GARLING, D. J. H. (1967). The β- and γ-duality of sequence spaces. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **63**, 963-981.
[5] KÖTHE, G. (1969). Topological vector spaces I. Springer.
[6] KÖTHE, G. (1979). Topological vector spaces II. Springer.
[7] LUSTERNIK and SOBOLEV. (1974). Elements of Functional Analisis. Hindustan P. C. New Delhi.
[8] MARTI, J. T. (1969). Introduction to the theory of bases. Springer.
[9] PIETSCH, A. (1972). Nuclear locally convex spaces. Springer.
[10] VALDIVIA, M. (1980). Espacios de sucesiones. Ayudas Manuel Aguilar.
[11] FENSKE, CH. y SCHOCK, E. (1969). Über die diametrale Dimension von lokalkonvexen Räumen. *Gesellsch. Math. Datenvevarbeitung*. Bonn.

Departamento de Matemáticas
E. S. I. I. de la Universidad de Sevilla
Avda. Reina Mercedes, s/n (Sevilla)