UNA NOTA EN COMPLETITUD EN LA ρ-DUALIDAD DE ESPACIOS DE SUCESIONES

Mario Bilbao (*) y Pedro Pérez Carreras (**)

Recibido: 4 noviembre 1981

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

An analogon to the normal topology (2) on sequence spaces is introduced and properties of A-convergence of sections, completeness and separability are studied.

Sea T un espacio de sucesiones que, en lo que sigue, supondremos que contiene a φ. En [1] se introduce el concepto de ρ-dual $T^{\wedge}$ de un espacio de sucesiones T como aquel espacio de todas aquellas sucesiones (u_i) tales que la sucesión $u \cdot x = (u_i x_i)$ es sumable en el sentido de Abel para toda sucesión $x = (x_i)$ de T y se prueba que $(T, T^{\wedge})$ es un par dual con la forma bilineal

$$\langle x, u \rangle = \lim_{t \to 1^-} \sum_{i=0}^{\infty} x_i u_i t^i .$$

Además, si T es normal, entonces la α-dualidad y la ρ-dualidad coinciden.

Sea sa el espacio de todas aquellas sucesiones escalares que son sumables en el sentido de Abel. En [3] y [4] se prueban los siguientes resultados:

(i) La aplicación

$$x \in \text{sa} \longmapsto \| x \| = \sup_{0 \leq t < 1} \left| \sum_{i=0}^{\infty} x_i t^i \right|$$

(*) Departamento de Matemáticas. E. T. S. I. Industriales de Sevilla.
(**) Departamento de Matemáticas. E. T. S. I. Industriales de Valencia.

es una norma y las aplicaciones

$$x \in \mathrm{sa} \longmapsto p_j(x) = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i$$

y

$$x \in \mathrm{sa} \longmapsto q_j(x) = \sup_i |x_i| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i; \quad j = 1, 2, \ldots,$$

son dos sucesiones de normas equivalentes.

(ii) El espacio sa dotado de la topología deducida de la familia $(\|\cdot\| + p_j(\cdot))$ es un FK-espacio.

(iii) Para cada x de sa se cumple que

$$x = \lim_{t \to 1^-} \left(\lim_n \sum_{i=0}^{n} x_i t^i e_i \right)$$

en donde e_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, representa el vector unitario i-ésimo de ω.

(iv) Las siguientes afirmaciones son equivalentes: (a) u es una forma lineal continua sobre sa, (b) para todo x de sa se cumple que

$$u(x) = \lim_{t \to 1^-} \sum_{i=0}^{\infty} x_i u_i t^i$$

en donde

$$u_i = u(e_i) = \int_0^1 t^i \, d\alpha + c_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \quad \alpha : [0, 1] \to \mathrm{K}$$

con $\alpha \in \mathrm{BV}([0, 1])$ y $c_i = 0(\sigma^i)$, $0 < \sigma < 1$, (c) u pertenece al ρ-dual de sa.

I. Definiciones

Denominamos dual de Abel da al espacio dual de sa. Diremos que un espacio de sucesiones T es ρ-perfecto si T coincide con $(\mathrm{T}^\frown)^\frown$ y (da)-invariante si T coincide con el espacio

$$\mathrm{da}(\mathrm{T}) = \{\alpha \cdot x : \alpha \in \mathrm{da}, \ x \in \mathrm{T}\}.$$

Para cualquier espacio T, $T^{\wedge}$ es ρ-perfecto y (da)-invariante. Las secciones de un elemento $x = (x_i)$ de un espacio T son los vectores $\sum_{i=0}^{n} x_i\, e_i$. Dado un espacio de sucesiones T, denotamos mediante R (T) al espacio

$$\{(x_i\, t^i) : 0 \leq t \leq 1, \quad x \in \mathrm{T}\}.$$

Si T es ρ-perfecto o (da)-invariante se sigue que T coincide con R (T). Para un espacio T tal que coincida con R (T) definimos la A-convergencia de las secciones al elemento del que provienen con respecto a una topología U localmente convexa que suponemos definida sobre T: Las secciones de un elemento x de T A-convergen a x si

$$\lim_{t \to 1-} \left[\lim_{n} \sum_{i=0}^{n} x_i\, t^i\, e_i \right] = x$$

en donde ambos límites están tomados en el sentido de la topología U.

II. A-Topologías

La familia de subconjuntos

$$\frac{1}{j}\, \mathrm{U}_j = \left\{ x \in \mathrm{sa} : \| x \| + p_j(x) \leq \frac{1}{j} \right\}$$

con $j = 1, 2, 3, \ldots$, forman una base de entornos del origen que son absolutamente convexos y cerrados del espacio sa. Dado un elemento u de $T^{\wedge}$, definimos la aplicación $f_u : \mathrm{da} \longrightarrow T^{\wedge}$ como $f_u(h) = h \cdot u$ y llamaremos u_j^{da} a la imagen mediante f_u de U_j^0, conjunto polar en da de U_j, que será obviamente un conjunto absolutamente convexo. También es $\sigma\,(T^{\wedge}, T)$-compacto. En efecto, sea $(h^p \cdot u : p \in \mathrm{P})$ una red en u_j^{da}. Entonces, $(h^p : p \in \mathrm{P})$ es una red en U_j^0 que contiene una subred (que denotaremos igual) que σ (da, sa)-converge a un cierto h' de U_j^0. Sea x un elemento de T. Como $u \cdot x$ pertenece a sa y como

$$\langle h' - h^p, u \cdot x \rangle = \langle u \cdot h' - u \cdot h^p, x \rangle$$

se sigue que la red $(h^p \cdot u : p \in P)$ converge débilmente en u_j^{da} a $h' \cdot u$. Si el espacio T es da-invariante, los subconjuntos de la forma $x_j^{da} = (h \cdot x : h \in U_j^0)$ con $x \in T$, están contenidos en T y como la topología $\sigma(T^{\wedge\wedge}, T^{\wedge})$ induce $\sigma(T, T^{\wedge})$ sobre T, se sigue que x_j^{da} son $\sigma(T, T^{\wedge})$-compactos.

DEFINICIÓN 1.—Sea T un espacio de sucesiones. Los conjuntos $(u_j^{da})^0$ con u variando en $T^{\wedge}$ y todas sus intersecciones finitas forman una base de entornos del origen para una topología localmente convexa, la A-topología, U (T, $T^{\wedge}$). Si suponemos T (da)-invariante proveemos a $T^{\wedge}$ de la A-topología U ($T^{\wedge}$, T), topología para la que forman una base de entornos del origen los conjuntos $(x_j^{da})^0$, con x variando en T, y todas sus intersecciones finitas.

Dado que las A-topologías son compatibles, que sa es un espacio de Fréchet y dado que U_j^0 coincide con e_j^{da}, siendo $e = (1, 1, 1, \ldots)$, es obvio que la topología del espacio sa coincide con la topología sobre sa de la convergencia uniforme sobre la familia de subconjuntos de da formada por los conjuntos u_j^{da}, u variando en da, y sus uniones finitas.

III. Completitud y separabilidad

PROPOSICIÓN 1.—Si T es (da)-invariante, entonces $T^{\wedge}$ [U ($T^{\wedge}$, T)] es completo.

DEMOSTRACIÓN. — Sea $(u^p : p \in P)$ una red de Cauchy en $T^{\wedge}$ [U ($T^{\wedge}$, T)] y, por lo tanto, para la topología $\sigma(T^{\wedge}, \varphi)$; luego, para cada i, existe u_i^* que es el límite de la red $(u_i^p : p \in P)$. La aplicación lineal

$$G_x : T^{\wedge}\,[U(T^{\wedge}, T)] \longrightarrow \mathrm{sa}\,[U(\mathrm{sa}, \mathrm{da})]$$

definida mediante $G_x(u) = u \cdot x$ para cada x de T es continua y así la red

$$(G_x(u^p) : p \in P) = (u^p \cdot x : p \in P)$$

es de Cauchy en sa que, al ser un FK-espacio, converge a su límite coordenada a coordenada $u^* \cdot x$ en sa. Así, u^* pertenece a $T^{\wedge}$. Además, $(u^p : p \in P)$ converge a u para U ($T^{\wedge}$, T), pues fijados x de T y un natural j, existe h de P tal que si $p \geqslant h$

$$u^* \cdot x - u^p \cdot x \in U_j$$

luego

$$\sup_{\alpha \in U_j^0} | \langle u^* x - u^p \cdot x, \alpha \rangle | = \sup_{\alpha \in U_j^0} | \langle (u^* - u^p, \alpha \cdot x \rangle | \leq 1$$

LEMA 1.—Si T es (da)-invariante, dado u perteneciente a T^, las secciones de u A-convergen a u para la topología U (T^, T).

DEMOSTRACIÓN.—Sea $x \in$ T. Como $x \cdot u$ pertenece a sa aplicamos (iii) para concluir que

$$\lim_n \sum_{i=0}^{n} x_i u_i t^i e_i = (x_i u_i t^i)$$

para cada t de (0, 1) en la topología de sa. Entonces, dado un natural j, existe un natural n_0 tal que si $n \geqslant n_0$

$$(x_i u_i t^i) - \sum_{i=0}^{n} x_i u_i t^i e_i \in U_j$$

luego

$$\sup_{\alpha \in U_j^0} \left| \left\langle (u_i t^i) - \sum_{i=0}^{n} u_i t^i e_i, (\alpha_i x_i) \right\rangle \right| \leq 1$$

y así, para cada t de (0, 1),

$$\lim_n \sum_{i=0}^{n} u_i t^i e_i = (u_i t^i).$$

Como $x \cdot u$ pertenece a sa, aplicamos de nuevo (iii) para concluir que

$$\lim_{t \to 1-} (x_i u_i t^i) = (x_i u_i)$$

luego, dado un natural j, existe un real t_0 tal que

$$(x_i u_i) - (x_i u_i t^i) \in U_j \quad \text{si} \quad t_0 \leq t < 1$$

Entonces,

$$\sup_{\alpha \in U_j^0} |\langle (x_i u_i) - (x_i u_i t^i),\ (\alpha_i) \rangle| = \sup_{\alpha \in U_j^0} |\langle (u_i) - (u_i t^i),\ (\alpha_i x_i) \rangle| \leq 1$$

Proposición 2.—Si T es U (T, T^)-sucesionalmente completo, entonces T es ρ-perfecto.

Demostración.—Sea x perteneciente a T^^. Entonces

$$x = \lim_{t \to 1-} \left[\lim_n \sum_{i=0}^{n} x_i t^i e_i \right]$$

$$(\text{Lema } 1) = \lim_j \left[\lim_n \sum_{i=0}^{\infty} x_i \left(\frac{j}{j+1} \right)^i e_i \right] = \lim_j \left[\lim_n \alpha^{nj}(x) \right]$$

en la topología U (T^^, T^). La sucesión $(\alpha^{nj}(x))_{n=0,1,2,\ldots}$ es U (T, T^)-Cauchy luego convergente en T a su límite coordenada a coordenada

$$\left(x_i \left(\frac{j}{j+1} \right)^i \right).$$

Aplicamos el mismo razonamiento a

$$\left\{ \left(x_i \left(\frac{j}{j+1} \right)^i \right) \right\}_{j=1,2,\ldots}$$

para concluir que converge en T a su límite coordenada a coordenada x. Así, x pertenece a T.

Teorema 1.—T es ρ-perfecto si y sólo si es U (T, T^)-completo.

Demostración.—Si T es ρ-perfecto, aplicamos la proposición 1 a T = T^^. Si T es U (T, T^)-completo, aplicamos la proposición 2.

Proposición 3.—Si T satisface T = R (T), entonces T (U (T, T^)) es separable.

Demotración.—Consideremos el conjunto numerable

$$A = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \rho_i^{(n)} \cdot \left(\frac{j}{j+1} \right)^i e_i : \text{ con } \rho_i^{(n)} \text{ racional}, \ n = 0, 1, 2, \ldots, \ j = 1, 2, \ldots \right\}$$

y sea x un elemento de T. Para cada n y j, podemos hallar un elemento x^{nj} de A,

$$x^{nj} = \sum_{i=0}^{n} \rho_i^{(n)} \left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i$$

verificando

$$| x_i - \rho_i^{(n)} | \leq \frac{| x_i |}{n} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots n.$$

Del método de prueba del lema 1 se deduce que, bajo la hipótesis T = R (T), las secciones de un elemento de T A-convergen al elemento para la topología U (T, T^), por lo que, en particular,

$$x = \lim_j \left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \right)$$

para U (T, T^). Así, es suficiente probar que

$$\lim x^{nj} = \left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \right)$$

con j fijo para saber que

$$x = \lim_j \lim_n x^{nj}$$

lo que prueba la proposición. Fijemos, pues, un natural j y un elemento u de T^. Entonces,

$$\sup_{\alpha \in u_j^0} \left| \left\langle \left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \right) - x^{nj}, (\alpha_i u_i) \right\rangle \right| \leq \sup_{\alpha \in u_j^0} \left| \left\langle \left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{i=0}^{n} x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i, (\alpha_i u_i) \right\rangle \right| + \sup_{\alpha \in u_j^0} \left| \left\langle \sum_{i=0}^{n} (x_i - \rho_i^{(n)}) \left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i, \right.\right.$$

$$\left.\left. (\alpha_i u_i) \right\rangle \right| = (1) + (2)$$

De acuerdo con la observación que hicimos sobre la A-convergencia de las secciones, tenemos que

$$\lim_n \sum_{i=0}^{n} x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i = \left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right)$$

por lo que existe un natural n_1 tal que si $n \geqslant n_1$ el sumando (1) es menor o igual que 1/2. Por otro lado, es claro que, para cada $i = 0, 1, 2, \ldots$ y para cada $j = 1, 2, \ldots$, el elemento $e_i/2$ pertenece a U_j, por lo que el sumando (2) es menor o igual que

$$\sum_{i=0}^{n} | x_i - \rho_i^{(n)} | \cdot | u_i | \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \cdot \sup_{a \in u_j^{\circ}} | \langle e_i, (a_i) \rangle | \leq$$

$$\leq \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{\infty} | x_i | \cdot | u_i | \left(\frac{j}{j+1}\right)^i = \frac{2}{n} p_j (x \cdot u)$$

dado que $u \cdot x$ se encuentra en sa. Así, existe un natural n_2 tal que si $n \geqslant n_2$ se tiene que

$$\frac{2}{n} p_j (x \cdot u) \leq \frac{1}{2} \,.$$

Tomando $n_0 = \max (n_1, n_2)$ se obtiene que

$$\left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) - x^{nj}$$

se encuentra en $(u_j^{\text{da}})^{\circ}$ si $n \geqslant n_0$.

Bibliografía

[1] ANTONINO, J. A. (1974). Propiedades de los espacios de sucesiones, ρ-dualidad y espacios casiperfectos. Tesis doctoral. Universidad de Valencia.

[2] KÖTHE, G. (1969). Topological Vector Spaces I. Berlin-Heidelberg-New York. Springer Verlag.

[3] ZELLER, K. (1953). Sur la méthode de sommation d'Abel. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **236**, 568-569.

[4] ZELLER, K. (1958). Theorie der Limitierungsverfahren. Berlin-Heidelberg-New York. Springer Verlag.

Departamento de Matemáticas
E. S. I. Industriales
Avda. Reina Mercedes, s/n
Sevilla-12