ELEMENTOS DE VOLUMEN SOBRE $\mathbb{R}^n$

Francisca Mascaró

Recibido: 4 noviembre 1981

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

In this paper we prove that for any uniparametric family σ_t of volume elements on $\mathbb{R}^n$ with the same total volume, there is an isotopy of $\mathbb{R}^n$, ψ_t, such that $\psi_t^* (\sigma_t) = \sigma_0$ for any t.

Introducción

Sea M una variedad diferenciable orientada de dimensión n. Un elemento de volumen, σ, sobre ella es una n-forma que no se anula en ningún punto de M. Se denota por vol_σ A el volumen del subconjunto $A \subset M$ con respecto a σ. Si $\Gamma (\Lambda^n M)$ es el conjunto de elementos de volumen, una familia uniparamétrica es una aplicación diferenciable $[0, 1] \longrightarrow \Gamma (\Lambda^n M)$.

El objetivo de esta nota es la demostración del siguiente:

TEOREMA.—Sea σ_t una familia uniparamétrica de elementos de volumen sobre $\mathbb{R}^n$ para los que

$$\mathrm{vol}_{\sigma_0} \mathbb{R}^n = \mathrm{vol}_{\sigma_t} \mathbb{R}^n$$

para todo $t \in [0, 1]$. Entonces, existe una isotopía, $\psi_t \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaciendo $\psi_t^* (\sigma_t) = \sigma_0$ para todo $t \in [0, 1]$.

Este mismo resultado ha sido obtenido, para variedades cerradas, por Moser [5] y para variedades compactas con frontera por Banyaga en [1]. La necesidad de probarlo en el caso de $\mathbb{R}^n$ surgió mientras se realizaba el estudio de subgrupos normales de

$\mathrm{Diff}^{\Omega}(\mathbb{R}^n)$, resultado éste fundamental para la clasificación obtenida en [4]. Asimismo este resultado generaliza, en cierta medida, la demostración de uno de los resultados obtenidos en [2].

Todos los objetos utilizados en esta nota serán de clase C^∞.

Lemas preliminares

Sea M una variedad diferenciable orientada de dimensión n. En todo lo que sigue todos los elementos de volumen considerados sobre M serán compatibles con su orientación.

LEMA 1.—Sea σ_t una familia uniparamétrica de elementos de volumen sobre M. Si K es una subvariedad compacta conexa de M, de codimensión cero, tal que todos los elementos de volumen σ_t coinciden fuera de un compacto contenido en el interior de K y además $\mathrm{vol}_{\sigma_t} K = \mathrm{vol}_{\sigma_0} K$ para todo $t \in [0, 1]$.

Entonces, existe una isotopía $\phi_t\colon M \longrightarrow M$ cumpliendo

$$\phi_t^*(\sigma_t) = \sigma_0 \quad \text{y} \quad \phi_t|_{M\text{-int }K} = \mathrm{id}$$

para todo $t \in [0, 1]$.

DEMOSTRACIÓN.—Puesto que los elementos de volumen σ_t coinciden sobre M-int K se puede aplicar [1] y se obtiene así una isotopía, $\phi_t\colon K \longrightarrow K$, que es la identidad sobre un entorno de ∂K y cumple $\phi_t^*(\sigma_t) = \sigma_0$ para todo $t \in [0, 1]$. Así, la extensión de dicha isotopía a M, mediante la identidad, satisface el lema.

LEMA 2.—Con las mismas hipótesis del lema 1, sea N una subvariedad de M compacta conexa y de codimensión 1. Si U es un entorno tubular de N, entonces, existe una isotopía $\phi_t\colon M \longrightarrow M$ cumpliendo

$$\phi_t|_{M\text{-}U} = \mathrm{id}, \quad \phi_t^*(\sigma_t) = \sigma_0$$

sobre algún entorno de N incluido en U,

$$\mathrm{vol}_{\phi_t^*(\sigma_t)} U_+ = \mathrm{vol}_{\sigma_t} U_+ \quad \text{y} \quad \mathrm{vol}_{\phi_t^*(\sigma_t)} U_- = \mathrm{vol}_{\sigma_t} U_-$$

donde U_+ y U_- representan las dos componentes conexas de U-N.

DEMOSTRACIÓN.—Sea U′ un entorno tubular de N con cierre compacto y $\overline{U'} \subset U$. Entonces existe una familia uniparamétrica de funciones diferenciables, $F_t: M \longrightarrow \mathbb{R}$, y una función diferenciable, $G: M \longrightarrow \mathbb{R}$, todas con soporte incluido en U′ cumpliendo:

$$\text{a)} \quad G = 1, \quad F_t = 1$$

sobre algún entorno de N.

$$\text{b)} \quad F_t \leq 1, \quad G \leq 1$$

$$\text{c)} \quad \mathrm{vol}_{U_+ \cap U'}[(1 - G)\sigma_0 + F_t \sigma_t] = \mathrm{vol}_{U_+ \cap U'} \sigma_0$$

$$\mathrm{vol}_{U_- \cap U'}[(1 - G)\sigma_0 + F_t \sigma_t] = \mathrm{vol}_{U_- \cap U'} \sigma_0 .$$

Por tanto, como el soporte de

$$\sigma_0 - [(1 - G)\sigma_0 + F_t \sigma_t]$$

está incluido en U′, se puede aplicar el lema 1 a la familia $(1 - G)\sigma_0 + F_t \sigma_t$, obteniéndose así una isotopía $\phi_t: M \longrightarrow M$ que para todo $t \in [0, 1]$ cumple

$$\phi_t |_{M - \overline{U'}} = \mathrm{id} \quad \text{y} \quad \phi_t^*(\sigma_0) = (1 - G)\sigma_0 + F_t \sigma_t .$$

Así, por a) se tiene $\phi_t^*(\sigma_0) = \sigma_t$ en un entorno de N.

LEMA 3.—Sea σ_t como en la hipótesis del lema 1. Sea $\{K_i\}_{i \geq 1}$ una sucesión de subvariedades compactas conexas de M, de dimensión n, tales que $M = \bigcup_{i \geq 1} K_i$, $K_i \cap K_j$ es el vacío o una subvariedad de M de codimensión 1 incluida en ∂K_i y en ∂K_j y

$$\mathrm{vol}_{\sigma_0} K_i = \mathrm{vol}_{\sigma_t} K_i$$

para todo $t \in [0, 1]$ y todo i. Entonces, existe una isotopía, $\phi_t: M \longrightarrow M$, de forma que $\phi_t^*(\sigma_t) = \sigma_0$ para todo $t \in [0, 1]$.

DEMOSTRACIÓN.—Aplicando el lema 2 a cada componente conexa de ∂K_i se obtiene una isotopía diferenciable, $\theta_t: M \longrightarrow M$ satisfaciendo:

a) θ_t es la identidad en el complementario de la unión disjunta de entornos tubulares de las componentes conexas de ∂K_i, para todo i.

b) $\theta_t^* (\sigma_t) = \sigma_0$ sobre la unión de entornos de las componentes conexas de ∂K_i, para todo i.

c) $\mathrm{vol}_{\theta_t^*(\sigma_t)} K_i = \mathrm{vol}_{\sigma_0} K_i$, para todo $t \in [0, 1]$ y todo i.

Por tanto, aplicando el lema 1 a cada compacto K_i se obtienen isotopías γ^i_t: $K_i \longrightarrow K_i$, de forma que γ^i_t es la identidad sobre un entorno de ∂K_i y

$$\gamma_t^{i*}\, \theta_t^* (\sigma_t) = \sigma_0$$

sobre K_i. Así, se puede definir una isotopía global, γ_t: $M \longrightarrow M$, mediante $\gamma_t |_{K_i} = \gamma^i_t$. Así, la isotopía $\phi_t = \theta_t \gamma_t$ demuestra el lema.

Demostración del teorema

Ahora se está en condiciones de probar el teorema.

Se denota por M_i el n-disco cerrado de $\mathbb{R}^n$ de centro el origen y radio i. Se tiene

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{i \geq 1} M_i \quad \text{y} \quad M_i \subset \mathrm{int}\, M_{i+1}$$

para cualquier i.

Ahora se construirán inductivamente familias uniparamétricas de elementos de volumen, σ^i_t, e isotopías ϕ^i_t: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de manera que

$$\phi^i_t{}^* (\sigma_t^{i-1}) = \sigma_t^i$$

para cualquier i y para todo $t \in [0, 1]$.

Sea N_1 un entorno de M_1 con cierre compacto incluido en int M_2. Evidentemente, existe una familia uniparamétrica de funciones diferenciables, μ_t^1: $\mathbb{R}^n \longrightarrow (0, \infty)$, de manera que para todo $t \in [0, 1]$ satisfacen:

a) $\overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \mu_t^1 (x) \neq 1\}} \subset \mathrm{int}\, N_1$

b) $\mathrm{vol}_{\mu_t^1 \sigma_t} M_1 = \mathrm{vol}_{\sigma_0} M_1$

c) $\mathrm{vol}_{\mu_t^1 \sigma_t} \mathrm{sop}\, (\sigma_t - \mu_t^1 \sigma_t) = \mathrm{vol}_{\sigma_t} \mathrm{sop}\, (\sigma_t - \mu_t^1 \sigma_t)$

d) $\mathrm{vol}_{\mu_t^1 \sigma_t} (\mathbb{R}^n - M_1) = \mathrm{vol}_{\sigma_0} (\mathbb{R}^n - M_1)$.

Si llamamos σ_t^1 a la familia uniparamétrica de elementos de volumen $\mu_t^1 \sigma_t$, se puede aplicar el lema 1 a $\sigma_t - \sigma_t^1$ y obtener así una isotopía $\phi_t^1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que es la identidad sobre un entorno de $\mathbb{R}^n - N_1$ y verifica $\phi_t^{1*}(\sigma_t) = \sigma_t^1$.

Sea N_2 un entorno de $M_3 - M_2$ con cierre compacto e incluido en $\operatorname{int}(M_4 - M_1)$ y tal que $N_2 \cap \overline{N}_1 = \varnothing$. Como anteriormente, existe una familia uniparamétrica de funciones diferenciables, $\mu_t^2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow (0, \infty)$, cumpliendo:

$$\text{a}')\quad \overline{\{x : x \in \mathbb{R}^n,\ \mu_t^2(x) \neq 1\}} \subset \operatorname{int} N_2$$

$$\text{b}')\quad \operatorname{vol}_{\mu_t^2 \sigma_t^1}(M_3 - M_1) = \operatorname{vol}_{\sigma_0}(M_3 - M_1)$$

$$\text{c}')\quad \operatorname{vol}_{\mu_t^2 \sigma_t^1} \operatorname{sop}(\mu_t^2 \sigma_t^1 - \sigma_t^1) = \operatorname{vol}_{\sigma_t^1} \operatorname{sop}(\mu_t^2 \sigma_t^1 - \sigma_t^1)$$

$$\text{d}')\quad \operatorname{vol}_{\mu_t^2 \sigma_t^1}(\mathbb{R}^n - M_3) = \operatorname{vol}_{\sigma_0}(\mathbb{R}^n - M_3)$$

para todo $t \in [0, 1]$.

Definiendo σ_t^2 como la familia uniparamétrica de elementos de volumen $\mu_t^2 \sigma_t^1$ y aplicando el lema 1 a $\sigma_t^1 - \sigma_t^2$ se obtiene una isotopía, $\phi_t^2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, que es la identidad en un entorno de $\mathbb{R}^n - N_2$ satisfaciendo $\phi_t^{2*}(\sigma_t^1) = \sigma_t^2$.

Por tanto, procediendo inductivamente, se obtienen las familias uniparamétricas de elementos de volumen, σ_t^i, y las isotopías, ϕ_t^i, deseadas.

Ahora, por la construcción de las isotopías ϕ_t^i se puede definir una isotopía global, $\phi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, mediante $\phi_t|_{N_i} = \phi_t^i$. Así, se tiene,

$$\operatorname{vol}_{\phi_t^*(\sigma_t)} M_1 = \operatorname{vol}_{\phi_t^{1*}(\sigma_t)} M_1 = \operatorname{vol}_{\sigma_t^1} M_1 = \operatorname{vol}_{\sigma_0} M_1$$

y

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}_{\phi_t^*(\sigma_t)}(M_{2i+1} - M_{2i-1}) &= \operatorname{vol}_{\sigma_t} \phi_t (M_{2i+1} - M_{2i-1}) = \\
&= \operatorname{vol}_{\sigma_t} \phi_t^i \phi_t^{i+1} (M_{2i+1} - M_{2i-1}) = \\
&= \operatorname{vol}_{\phi_t^{i+1*} \phi_t^{i*}(\sigma_t)} (M_{2i+1} - M_{2i-1}) = \\
&= \operatorname{vol}_{\phi_t^{i+1*} \phi_t^{i*} \cdots \phi_t^{1*}(\sigma_t)} (M_{2i+1} - M_{2i-1}) = \\
&= \operatorname{vol}_{\sigma_t^{i+1}} (M_{2i+1} - M_{2i-1}) = \operatorname{vol}_{\sigma_0} (M_{2i+1} - M_{2i-1}).
\end{aligned}$$

Aplicando el lema 3 a la familia uniparamétrica de elementos de volumen $\phi_t^* (\sigma_t)$ y la sucesión de compactos

$$\bigcup_{i \geq 1} \overline{(\text{int } M_{2i+1} - M_{2i-1})}$$

se obtiene una isotopía $\phi'_t: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\phi'^*_t \, \phi_t^* (\sigma_t) = \sigma_0 \quad \text{y} \quad \psi_t = \phi_t \, \phi'_t$$

da la isotopía deseada.

Bibliografía

[1] Banyaga, A. (1974). Formes-volume sur les variétés à bord. *Enseignement Math.* **(2) 20**, 127-131.

[2] Greene, R. E. and Shiohama, K. (1979). Diffeomorphisms and volumen-preserving embeddings of non compact manifolds. *Trans. Am. Math. Soc.*, **255**, 403-414.

[3] Lang, S. (1972). Differential Manifolds. Addison Wesley P. C.

[4] Mascaró, F. Normal Subgroups of $\text{Diff}^{\Omega}(\mathbb{R}^n)$. Aceptado en *Trans. Am. Math. Soc.*

[5] Moser, J. (1965). On the volume elements on a manifold. *Trans. Am. Math. Soc.*, **120**, 286-294.

Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Valencia