PROPIEDADES HEREDITARIAS DE DOS NUEVAS CLASES DE ESPACIOS

José M. Mazón (*)

Recibido: 4 noviembre 1981

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

In this paper we study the hereditary properties of two new classes of locally convex spaces, the C-quasibarrelled spaces and the quasi-(DF) spaces.

Los espacios vectoriales que usaremos están definidos sobre el cuerpo K de los números reales o complejos. Dado un par dual [E, F] denotaremos mediante σ (E, F), μ (E, F) y β (E, F) las topologías débil, de Mackey y fuerte, respectivamente. Con la palabra espacio y el símbolo E [T] significaremos un espacio vectorial E dotado de una topología T localmente convexa y separada. Como es usual, escribiremos E′ y E* cuando nos refiramos al espacio dual topológico y algebraico, respectivamente. Si B es un subconjunto cerrado acotado y absolutamente convexo de E [T], E_B denota la envoltura lineal de B provista de la topología normada que se deduce del calibrador de B. Diremos que un espacio E [T] es *localmente completo* si para cada B subconjunto cerrado acotado y absolutamente convexo de E [T], E_B es un espacio de Banach. Sean E, F y G tres espacios: L (E, F) denotará el espacio vectorial de las aplicaciones lineales y continuas de E en F, B (E $\times$ F, G) el espacio vectorial de las aplicaciones bilineales y continuas de E $\times$ F en G, y B^s (E $\times$ F, G) el espacio vectorial de las aplicaciones bilineales

(*) Este trabajo ha sido realizado en el Departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Matemáticas de Valencia, bajo la dirección del Prof. Dr. D. Manuel Valdivia Ureña.

de $E \times F$ en G separadamente continuas. Generalmente seguiremos la notación y definiciones de [3] y [4].

Diremos que un espacio $E[T]$ es *C-casi-tonelado* si para cada sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos equicontinuos de E' que fuertemente converja a cero (i. e., dado W un $\beta(E', E)$-entorno de 0 existe un $n_0 \in N$ tal que, $A_n \subset W$ para todo $n \geqslant n_0$) su unión es un equicontinuo. A los espacios C-casi-tonelados que poseen una sucesión fundamental de acotados les llamaremos espacios *casi-(DF)*. Estas dos clases de espacios fueron introducidas en [5] y [6]; en donde son separadas de las clases de espacios conocidas.

Diremos que una sucesión $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de un espacio $E[T]$ es *casibornívora* si para cada acotado B de $E[T]$ existe un $n_0 \in N$ tal que, $B \subset U_n$ para todo $n \geqslant n_0$ ([6]). El siguiente teorema de caracterización es obtenido en [6]: «Un espacio $E[T]$ es C-casi-tonelado si, y sólo si, la intersección de cada sucesión casibornívora en $E[T]$ de entornos de 0 absolutamente convexos y cerrados es un entorno de 0 en $E[T]$».

Un espacio $E[T]$ es *sucesionalmente casi-tonelado* si cada sucesión $\beta(E', E)$-nula es un equicontinuo ([14]). Evidentemente, cada espacio C-casi-tonelado es sucesionalmente casi-tonelado. Entonces, como todo espacio sucesionalmente casi-tonelado tiene dual fuerte localmente completo ([9]), tendremos:

PROPOSICIÓN 1.—*Si $E[T]$ es C-casi-tonelado, $E'[\beta(E', E)]$ es localmente completo. Y si $E[T]$ es casi-(DF), $E'[\beta(E', E)]$ es un espacio de Fréchet.*

TEOREMA 1.—*Cada envoltura localmente convexa de espacios C-casi-tonelados es un espacio C-casi-tonelado.*

DEMOSTRACIÓN.—Consideremos la envoltura localmente convexa

$$E[T] = \sum_{i \in I} f_i(E_i[T_i]),$$

donde cada $E_i[T_i]$ es un C-casi-tonelado. Sea $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión casibornívora en $E[T]$ de entornos de 0 absolutamente convexos y cerrados, y sea $U = \bigcap_{n \in N} U_n$. Para cada $i \in I$, $\{f_i^{-1}(U_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es casibornívora en $E_i[T_i]$, pues $f_i(B)$ es un acotado de $E[T]$ si B

es un acotado de $E_i [T_i]$. Por tanto, $\bigcap_{n \in N} f_i^{-1} (U_n)$ es un entorno de 0 en $E_i [T_i]$, con lo cual, U será un entorno de 0 en E [T], c. q. d.

COROLARIO 1.—(1) *Cada cociente por un subespacio cerrado de un espacio C-casi-tonelado es un especio C-casi-tonelado.*

(2) *Cada límite inductivo de una familia de espacios C-casi-tonelados es un espacio C-casi-tonelado.*

PROPOSICIÓN 2.—*$E [T] = \bigoplus_{i \in I} E_i [T_i]$ es C-casi-tonelado si, y sólo si, cada $E_i [T_i]$ es C-casi-tonelado.*

DEMOSTRACIÓN.—Que la condición es suficiente, es consecuencia del teorema 1. Veamos que es necesaria: Sea $\{A^i_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de T_i-equicontinuos que $\beta (E'_i, E_i)$-converge a 0. Para cada $n \in N$, sea

$$A_n = \left\{ (x_j) \in E' = \prod_{j \in I} E'_j : x_i \in A^i_n \quad \text{y} \quad x_j = 0 \quad \text{para cada} \quad j \neq i \right\}.$$

Evidentemente, cada A_n es un T-equicontinuo. Además, como la topología fuerte del producto es el producto de las topologías fuertes ([3], pág. 285), $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es β (E', E)-nula. Por tanto, $\bigcup_{n \in N} A_n$ es un T-equicontinuo; de donde se desprende fácilmente que $\bigcup_{n \in N} A^i_n$ es un T_i-equicontinuo, c. q. d.

COROLARIO 2.—*La suma directa localmente convexa de una sucesión de espacios casi-(DF) es un espacio casi-(DF).*

TEOREMA 2.—*Sea $E [T] = \prod_{i \in I} E_i [T_i]$. Entonces, E [T] es C-casi-tonelado si, y sólo si, cada $E_i [T_i]$ es C-casi-tonelado.*

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos primeramente que E [T] es C-casi-tonelado. Sea $\{A^i_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de T_i-equicontinuos que $\beta (E'_i, E_i)$-converja a 0, y sea $A^i = \bigcup_{n \in N} A^i_n$. Sea $A_n = I_i (A^i_n)$, siendo I_i la inyección canónica de E'_i en $E' = \bigoplus_{i \in I} E'_i$. Entonces, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ β (E', E)-converge a 0 ([3], pág. 286). Por tanto, $A = \bigcup_{n \in N} A_n$ es un T-equicontinuo. Entonces, teniendo en cuenta ([3], pág. 285), se deduce fácilmente que A^i es un T_i-equicontinuo.

Supongamos ahora que cada $E_i\,[T_i]$ es un C-casi-tonelado. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de T-equicontinuos que fuertemente converge a cero. Entonces, $A = \bigcup_{n \in N} A_n$ es un $\beta\,(E', E)$-acotado, con lo cual, $A \subset \bigoplus_{p=1}^{k} E'_i$ ([3], pág. 286 y p. 213). Ahora, como

$$\Big(\bigoplus_{t=1}^{k} E'_{i_t}\Big)\,[\beta\,(E', E)] = \bigoplus_{t=1}^{k} E'_{i_t}\,[\beta\,(E'_{i_t}, E_{i_t})]$$

([3], pág. 212), tendremos que, $\{P_i\,(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ $\beta\,(E'_{it}, E_{i_t})$-converge a 0, para $t = 1, 2, ..., k$. Con lo cual:

$$B_t = \bigcup_{n \in N} P_{i_t}(A_n)$$

será un T_i -equicontinuo, para $t = 1, 2, ..., k$; y como $A \subset \bigoplus_{t=1}^{k} B_t$, A será un T-equicontinuo, c. q. d.

PROPOSICIÓN 3.—*Sea F un subespacio denso de un espacio E [T]. Si F [T] es C-casi-tonelado, entonces, E [T] es C-casi-tonelado.*

DEMOSTRACIÓN.—Se deduce fácilmente de la caracterización por sucesiones casibornívoras, c. q. d.

COROLARIO 3.—*La completación y la casi-completación de un espacio C-casi-tonelado es un espacio C-casi-tonelado.*

W. Ruess en [8] da los siguientes resultados: (a) «Si E [T] es un espacio sucesionalmente casi-tonelado con una sucesión fundamental de acotados, y F es un subespacio cerrado de E [T]. Entonces, en F^0 coinciden las topologías $\beta\,(E', E)$ y $\beta\,(F^0, E/F)$». (b) «Si F es un subespacio vectorial de un espacio E [T] tal que, F [T] es sucesionalmente casi-tonelado y tiene una sucesión fundamental de acotados. Entonces, el dual fuerte de F [T] es topológicamente isomorfo a $\dfrac{E'\,[\beta\,(E', E)]}{F^0}$ ».

PROPOSICIÓN 4.—*Sea E [T] un espacio casi-(DF). Entonces:*

(1) *Si F es un subespacio cerrado de E [T], (E/F) [T] es casi-(DF).*

(2) *E [T] es completo si, y sólo si, es casi-completo.*
(3) *La completación de E [T] es un espacio casi-(DF).*

DEMOSTRACIÓN.—Por (a), (E/F) [T] tiene una sucesión fundamental de acotados. Entonces, teniendo en cuenta el corolario 1, tendremos establecido (1). (2) es consecuencia inmediata de (b). Por último, (3) es consecuencia de (b) y del corolario 3, c. q. d.

Veamos ahora qué ocurre con los subespacios.

TEOREMA 3.—*Todo subespacio de codimensión finita de un espacio C-casi-tonelado (casi-(DF) es un espacio C-casi-tonelado (casi-(DF)).*

DEMOSTRACIÓN.—Como las sucesiones fundamentales de acotados se heredan por subespacio, bastará demostrar el caso C-casi-tonelado. Sea E [T] un espacio C-casi-tonelado. Evidentemente, será suficiente con demostrar el teorema en el caso en que F es un hiperplano de E. Puede ocurrir:

1. F cerrado en E [T]. En este caso, F es un subespacio complementado de E [T], con lo cual el resultado es consecuencia del corolario 1.

2. F denso en E [T]. Como E′ [β (E′, E)] es localmente completo, aplicando el teorema 1 de [13] en el caso en que $\mathcal{B}$ es la familia de todos los acotados de E [T], obtenemos:

(c) «En E′ los β (E′, E)-acotados y los β (E′, F)-acotados son los mismos».

Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de equicontinuos que β (E′, F)-converja a 0. Entonces, como E [T] es C-casi-tonelado, bastará con que demostremos que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ β (E′, E)-converge a 0. Supongamos que esto no ocurre. Entonces, existe un B acotado de E [T] y una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, tales que, A_n no está contenido en B^0, para $k = 1, 2, \ldots$ Por tanto, podemos obtener una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ de elementos de $\bigcup_{n \in N} A_n$, que es β (E′, F)-nula y que ninguna de sus subsucesiones β (E′, E)-converge a 0.

Sea D un acotado de E [T] absolutamente convexo y cerrado. Entonces, existe un $z \in D$, tal que, si Z es la envoltura absolutamente convexa y cerrada de z, existe un $\delta > 0$ tal que,

$$\delta D \subset \overline{D \cap F} + Z.$$

Aplicando (c), tenemos que $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ es β (E′, E)-acotada, luego será un σ (E′, E)-precompacto. Por tanto, existe una subsucesión $\{x_{k_t}\}_{t=1}^{\infty}$ que es σ (E′, E)-Cauchy; con lo cual $\{\langle x_{k_t}, z\rangle\}_{t=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en K. Entonces, dado un $\varepsilon > 0$, existirá un $t_0 \in$ N tal que. para todo $t, r \geqslant t_0$ se tendrá:

$$|\langle x_{k_t} - x_{k_r}, x\rangle| \leqslant \frac{\delta\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } x \text{ de } \overline{D \cap F}$$

y

$$|\langle x_{k_t} - x_{k_r}, z\rangle| \leqslant \frac{\delta\varepsilon}{2}$$

Ahora, si $y \in$ D, $y = y_1 + y_2$ con $y_1 \in \overline{D \cap F}$ e $y_2 = \lambda z$ con $|\lambda| \leqslant 1$. Luego,

$$|\langle x_{k_t} - x_{k_r}, y\rangle| \leqslant \frac{1}{\delta}[|\langle x_{k_t} - x_{k_r}, y_1\rangle| + |\langle x_{k_t} - x_{k_r}, \lambda z\rangle|] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\delta}\left[\frac{\delta\varepsilon}{2} + |\lambda|\frac{\delta\varepsilon}{2}\right] \leqslant \varepsilon.$$

Por tanto, $\{x_{k_t}\}_{t=1}^{\infty}$ es β (E′, E)-Cauchy, y como evidentemente, 0 es σ (E′, E)-adherente a dicha sucesión, tendremos que $\{x_{k_t}\}_{t=1}^{\infty}$ β (E′, E)-converge a cero. Absurdo, c. q. d.

Un subespacio F de un espacio E [T] tiene la *propiedad (b)* si F tiene codimensión finita en la envoltura lineal de F ∪ B, para cada acotado B de E [T] ([10]). Un subespacio F es *quasi-distinguido* en E [T], si cada acotado de E [T] está contenido en la clausura de un acotado de F [T] ([10]). B. Tsirulnikov en [10] da los siguientes resultados: (d) «Sea F un subespacio cerrado de E [T] con la propiedad (b). Sea T′ una topología en E, tal que, cada absolutamente convexo σ (E′, E)-compacto contenido en F^0 es T′-equicontinuo. Supongamos que se da una de las siguientes condiciones: (1) E′ [β (E′, E)] es completo. (2) F es de codimensión numerable en E y E′ [β (E′, E)] es localmente completo. Entonces, F es un subespacio complementado de E [T]». (e) «Sea E [T] un espacio con dual fuerte completo. Entonces, cada subespacio denso con la propiedad (b) es quasi-distinguido.

El siguiente lema se deduce fácilmente de las propias definiciones:

LEMA 1.—*Todo subespacio denso y quasi-distinguido de un espacio C-casi-tonelado (casi-(DF)) es C-casi-tonelado (casi-(DF)).*

NOTA 1.—Después de los resultados anteriores, el teorema 3 para el caso casi-(DF) se puede obtener directamente de forma muy sencilla, ya que, por (e), todo hiperplano denso de un espacio casi-(DF) es quasi-distinguido.

PROPOSICIÓN 5.—*Sea E [T] un espacio de Mackey C-casi-tonelado. Si F es un subespacio cerrado de E [T] de codimensión numerable y con la propiedad (b). Entonces, F [T] es C-casi-tonelado.*

DEMOSTRACIÓN.—Como T es la topología de Mackey, los $\sigma(E', E)$-compactos contenidos en F^0 serán T-equicontinuos. Entonces podemos aplicar (d), con lo cual, F [T] está complementado en E [T]. Por tanto, F [T] es C-casi-tonelado, c. q. d.

PROPOSICIÓN 6.—*Sea E [T] un espacio de Mackey C-casi-tonelado y con dual fuerte completo. Entonces, todo subespacio de E con la propiedad (b) es C-casi-tonelado.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea F un subespacio de E [T] con la propiedad (b). Si F es denso en E [T], por (e), F será quasi-distinguido, con lo cual el resultado es consecuencia del lema 1. Si F es cerrado en E [T], usando un argumento similar al usado en la proposición anterior, se llega a que F [T] es C-casi-tonelado. Supongamos por último que F es un subespacio cualquiera. Por lo anterior, $\overline{F}$ [T] es C-casi-tonelado, y por (d), $\overline{F}$ [T] es complementado en E [T], con lo cual, $\overline{F}$ [T] será un espacio de Mackey y tendrá dual fuerte completo. Por tanto, aplicando lo anterior, F [T] es C-casi- tonelado, c. q. d.

COROLARIO 4.—*Todo subespacio con la propiedad (b) de un espacio casi-(DF) de Mackey, es un espacio casi-(DF).*

M. Valdivia, en la demostración del teorema 6 de [12], da el siguiente resultado: (f) «En un espacio E [T] sea $\mathcal{B}$ una familia saturada de acotados absolutamente convexos y cerrados, tal que E_B es tonelado para cada $B \in \mathcal{B}$. Si F es un subespacio denso de E [T] de codimensión numerable y E' es $T_{\mathcal{B}}$-completo. Entonces, dado un $P \in \mathcal{B}$ existe un $Q \in \mathcal{B}$ tla que, $P \subset \overline{Q \cap F}$».

Si en (f) tomamos $\mathcal{B}$ la familia de todos los acotados absolutamente convexos y cerrados obtenemos:

LEMA 2.—*Si* $E\,[T]$ *es un espacio con dual fuerte completo y tal que,* E_B *es tonelado para cada* B *absolutamente convexo cerrado y acotado. Entonces, todo subespacio denso y de codimensión numerable es quasi-distinguido.*

TEOREMA 4.—*Sea* $E\,[T]$ *un espacio de Mackey casi-(DF) y localmente completo. Si* F *es un subespacio de codimensión numerable de* E*, entonces,* $F\,[T]$ *es casi-(DF).*

DEMOSTRACIÓN.—Sea T^x *la topología bornológica asociada a* T*. Entonces, como* $E\,[T]$ *es localmente completo,* $E\,[T^x]$ es tonelado (en realidad es ultrabornológico). Sea E_1 la clausura de F en $E\,[T^x]$. Vamos a demostrar primeramente que $E_1\,[T]$ es casi-(DF). Supongamos que E_1 tiene codimensión infinita numerable en E (pues si es de codimensión finita será casi-(DF)), y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una cobase. Tomemos E_n la envoltura lineal de $E \cup \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ $(n \geqslant 2)$. Entonces, $E\,[T^x]$ es el límite inductivo estricto de la sucesión $\{E_n\,[T^x]\}_{n=1}^{\infty}$ ([11]).

Como E_1 tiene codimensión finita en E_n y E_1 es cerrado en $E\,[T^x]$, cada E_n es cerrado en $E\,[T^x]$. Por tanto, dado un B acotado de $E\,[T^x]$, o lo que es lo mismo de $E\,[T]$, ya que tienen los mismos acotados; existe un $n_0 \in N$ tal que, $B \subset E_{n_0}$ ([3], pág. 223). Con lo cual, E_1 tiene la propiedad (b) en $E\,[T]$. Por tanto, $E_1\,[T]$ es casi-(DF) (corolario 4).

Ahora, si B es un absolutamente convexo cerrado y acotado de $E_1\,[T]$, $(E_1)_B$ tiene codimensión numerable en E_B, con lo cual, $(E_1)_B$ será tonelado ([11]). Además, $E_1\,[T]$ tiene dual fuerte completo (pues es casi-(DF)). Por tanto, aplicando el lema 2, F será quasi-distinguido en $E_1\,[T]$, y como es denso, $F\,[T]$ será casi-(DF) (lema 1), c. q. d.

NOTA 2.—No sabemos si en general la propiedad de ser C-casi-tonelado es conservada por los subespacios de codimensión numerable. En general dicha propiedad no se hereda por los subespacios cerrados, ya que, como todo espacio es un subespacio cerrado de un espacio tonelado ([2]), bastará con considerar el ejemplo 1.6 de [6].

Por último vamos a considerar el π-producto tensorial de dos espacios casi-(DF). Primeramente vamos a generalizar algunos resultados obtenidos por A. Grothendieck para los espacios (DF) (ver [4]).

LEMA 3.—*Sea $E[T]$ un espacio casi-(DF). Para cada sucesión $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de entornos de 0 en $E[T]$, existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de escalares tal que, $\bigcap_{n \in N} a_n U_n$ es un entorno de 0 en $E[T]$.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots$, una sucesión fundamental de acotados de $E[T]$. Entonces, como $\{U_n + B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es casibornívora en $E[T]$, tendremos que, $U = \bigcap_{n \in N} (U_n + B_n\}$ será un entorno de 0 en $E[T]$. Ahora, dado B_n existe un $b_n \in K$ tal que, $B_n \subset b_n U_n$. Por tanto,

$$U \subset \bigcap_{n \in N} (U_n + b_n U_n) \subset \bigcap_{n \in N} 2(1 + b_n) U_n.$$

Luego bastará con tomar $a_n = 2(1 + b_n)$, c. q. d.

Con el lema anterior y teniendo en cuenta que si $E[T]$ es un espacio casi-(DF) (o incluso un C-casi-tonelado), dada una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de T-equicontinuos cuya unión sea un fuerte acotado, entonces, para cada sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de escalares que converja a 0, $\{a_n A_n\}_{n=1}^{\infty}$ fuertemente converge a cero, con lo cual, $\bigcup_{n \in N} a_n A_n$ es un T-equicontinuo. Se pueden adaptar las técnicas usadas para los espacios (DF) en [4], para obtener las siguientes generalizaciones:

PROPOSICIÓN 7.—*Si E es un espacio casi-(DF) y F es un espacio metrizable, entonces, cada equicontinuo de $L(E, F)$ es un equiacotado.*

PROPOSICIÓN 8.—*Sean E y F espacios casi-(DF) y G un espacio cualquiera. Sea $f \in B^s(E \times F, G)$, f es continua si, y sólo si, f es hypocontinua. Sea H un subconjunto de $B^s(E \times F, G)$, H es equicontinuo si, y sólo si, H es equihypocontinuo.*

NOTA 3.—Este último resultado también generaliza un resultado dado por R. Hollstein ([1]), ya que los espacios σ-localmente topo lógicos son los D_b-espacios de K. Noureddine ([7]) y los (DF)-generalizados de W. Ruess. Espacios que separamos en [6] de los casi-(DF).

PROPOSICIÓN 9.—*Sean E y F espacios casi-(DF) y G un espacio cualquiera. Sea $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos equicontinuos de $B^s(E \times F, G)$. Si la sucesión es nula en la topología biacotada, entonces, $\bigcup_{n \in N} H_n$ es un equicontinuo.*

La proposición anterior nos permite usar las mismas técnicas que se usan en el caso de los espacios (DF) (ver [4], p. 186), para establecer el siguiente resultado:

TEOREMA 5.—*Sean E y F espacios casi-(DF). Entonces, $E \otimes_\pi F$ y $E \tilde{\otimes}_\pi F$ son espacios casi-(DF). Si $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones fundamentales de acotados en E y F, respectivamente. Entonces $\{\Gamma(B_n \otimes D_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión fundamental de acotados en $E \tilde{\otimes}_\pi F$.*

La topología fuerte en $(E \tilde{\otimes}_\pi F)'$ y la topología biacotada en $B(E \times F)$ coinciden.

Referencias

[1] HOLLTEIN, R. (1975). σ-topologicher Räume und projektive Tensorprodukte. *Collectanea Math.*, **26**, 239-252.

[2] KOMURA, Y. (1962). On linear topological spaces. *Kumamoto J. Sci.*, Ser. A, **3**, 148-157.

[3] KOTHE, G. (1969). Topological Vector Spaces I. Springer-Verlag.

[4] KOTHE, G. (1979). Topological Vector Spaces II. Springer-Verlag.

[5] MAZÓN, J. M. (1980). Tres nuevas clases de espacios localmente convexos. Tesis doctoral, Valencia.

[6] MAZÓN, J. M. Some classes of locally convex spaces. *Archiv. Math.* **38** (1982), 131-137.

[7] NOUREDDINE, K. (1976). Note sur les Espaces D_b. *Math. Ann.*, **219**, 97-103.

[8] RUESS, W. (1977). On the Locally Convex Structure of Strict Topologies. *Math. Z.*, **153**, 179-192.

[9] RUESS, W. (1977). Closed graph theorems for generalized inductive limit topologies. *Proc. Cambridge Soc.*, **82**, 67-83.

[10] TSIRULNIKOV, B. (1980). Subspaces with property (b) in locally convex spaces of quasi-barrelled type. *Math. Proc. Cambridge Soc.*, **88**, 331-337.

[11] VALDIVIA, M. (1971). Absolutely convex sets in barrelled spaces. *Ann. Inst. Fourier,* **21**, 3-13.
[12] VALDIVIA, M. (1972). On subspaces of countable codimension of a locally convex space. *J. reine angew Math.,* **256**, 185-189.
[13] VALDIVIA, M. (1975). On quasi-completeness and sequential completeness in locally convex spaces. *J. reine angew Math.,* **276**, 190-199.
[14] WEBB, J. H . (1968). Sequential convergence convex spaces. *Proc. Cambridge Phil. Soc.,* **64**, 341-364.

Facultad de Matemáticas
Dr. Moliner, 4
Burjasot (Valencia)