ESTRUCTURA DE SYLOW DE CIERTOS GRUPOS LOCALMENTE FINITOS

Consuelo Martínez López

Recibido: 4 noviembre 1981

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO CORRESPONDIENTE D. JUAN SANCHO DE SAN ROMÁN

C. Martínez (1980) define en la tesis doctoral dos clases de grupos localmente finitos Π-resolubles, siendo Π un conjunto de primos fijo. En la primera de ellas, $\mathcal{M}$, se impone la conjugación de los σ-subgrupos de Sylow para todo subconjunto σ de Π. En la segunda clase, $\bar{\mathcal{M}}$, se exige además la conjugación de los Π'-subgrupos de Sylow y de los p'-subgrupos de Sylow para $p \in \Pi$. Se llega a construir en estas clases una teoría de formaciones saturadas.

En este trabajo, empleando los resultados de Hartley (1971) y (1972), ampliaremos el conocimiento de la estructura de Sylow de estos grupos. Se probará que no es necesario imponer la conjugación de los p'-subgrupos de Sylow, obteniéndose la conjugación de todos los τ-subgrupos de Sylow si $\tau \supseteq \Pi'$, imponiendo sólo la conjugación de los Π'-subgrupos y de los σ-subgrupos de Sylow para $\sigma \subseteq \Pi$.

C. Martínez (1980) defined two classes of locally finite Π-soluble groups, where Π is a fixed set of prime numbers. In the first class, $\mathcal{M}$, it was imposed the conjugacy of the Sylow σ-subgroups for every $\sigma \subseteq \Pi$. In the second class, $\bar{\mathcal{M}}$, was also imposed the conjugacy of Sylow τ-subgroups, where $\tau = \Pi'$ or $\tau = p'$ with $p \in \Pi$. A theory of saturated formations in both classes was developed.

In this paper, using the results of Hartley (1971) and (1972), we prove that it is not necessary to impose in the second class $\mathcal{M}$, the conjugacy of Sylow p'-subgroups. We also prove that the conjugacy of Sylow τ-subgroups, for $\tau = \Pi$ or $\tau = \Pi'$ implies the conjugacy of Sylow σ-subgroups for $\sigma \supseteq \Pi'$, particulary for $\sigma = p'$ with $p \in \Pi$.

1. Introducción

Todos los grupos considerados en este trabajo son localmente finitos. Decimos que un grupo es σ-grupo si todos sus elementos son σ-elementos, entendiendo por σ-elemento aquel cuyo orden sólo es dividido por primos de σ. Un σ-subgrupo de Sylow significa simplemente un σ-subgrupo maximal. Usamos Π para denotar un conjunto de primos fijo, del cual depende la definición de las clases consideradas. Para designar otros conjuntos de primos arbitrarios usaremos σ, τ, etc.

Comenzamos dando las definiciones que se usarán más frecuentemente a lo largo del trabajo.

(1.1) DEFINICIÓN.

a) Sea $\mathfrak{M}$ la mayor clase S-cerrada de grupos localmente finitos verificando:

(M.1) Si $G \in \mathfrak{M}$, G posee una serie de longitud finita

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G \qquad (1)$$

en la que cada factor G_i/G_{i-1}, $i = 1, 2, \dots, n$ es un Π'-grupo o un Π-grupo localmente nilpotente.

(M.2) Si $H \leqslant G$, los σ-subgrupos de Sylow de H son conjugados en H para $\sigma \subseteq \Pi$.

b) Sea $\bar{\mathfrak{M}}$ la mayor subclase S-cerrada de $\mathfrak{M}$ satisfaciendo:

($\bar{\text{M}}$.2) Si $H \leqslant G$, los σ-subgrupos de Sylow de H son conjugados en H, para

$$\sigma \in \Omega = \{\tau/\tau \subseteq \Pi\} \cup \{\Pi'\} \cup \{p'/p \in \Pi\}$$

Las definiciones que damos a continuación se deben a Hartley (1971) y (1972).

(1.2) DEFINICIÓN.

a) Un grupo G se dice π-separable si y sólo si tiene una serie finita

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$$

siendo cada uno de sus factores un π-grupo o un π'-grupo.

b) G se dice π-separable superiormente si su π-serie superior $\{P_\alpha\}$ definida por:

$$P_0 = 1, \quad P_{\alpha+1}/P_\alpha = 0_{\pi'\pi}(G/P_\alpha), \quad P_\mu = \bigcup_{\alpha<\mu} P_\alpha$$

para ordinales α y ordinales límite μ, termina en G.

c) $G \in \mathfrak{D}_\pi \iff$ los π-subgrupos de Sylow de G son conjugados en G. También se dice que G es Sylow π-conexo.

$G \in \overline{\mathfrak{D}}_\pi \iff$ G es un grupo contable y $G \in \mathfrak{D}_\pi \cap L\,\mathfrak{D}^s{}_\pi$.

$G \in \mathfrak{B}_\pi \iff$ G es un $L\,\mathfrak{D}^s{}_\pi$-grupo contable y $\mathrm{Syl}_\pi(G)$ es contable.

Si $G \in \mathfrak{D}^s{}_\pi$ se dice también que G es Sylow π-íntegro, siendo como es usual $\mathfrak{D}^s{}_\pi$ la mayor subclase S-cerrada de $\mathfrak{D}_\pi$.

Se dice que un grupo G es Sylow π-sparse si $|\mathrm{Syl}_\pi(H)| < 2^{\omega}$ para todo subgrupo H de G que sea contable.

d) Sea $\mathfrak{R}$ la clase de los grupos G que poseen un subgrupo normal abeliano N con G/N finito y existe un entero $n \geqslant 0$ tal que para cada primo q, un q-subgrupo elemental abeliano de N tiene orden $\leqslant q^n$. Sea $\mathfrak{R}_1$ la clase definida por:

$G \in \mathfrak{R}_1 \iff$ todo subgrupo localmente nilpotente de G pertenece a $\mathfrak{R}$.

2. Primeros resultados

A continuación enunciamos algunos resultados obtenidos al aplicar a nuestras clases de trabajo otros más generales de Hartley (1971).

(2.1) Todo grupo π-separable y $\mathfrak{B}_\pi$-grupo es un $\overline{\mathfrak{D}}_\pi$-grupo. La clase de los $\mathfrak{D}_\pi$-grupos π-separables es Q-, S-cerrada y cerrada para extensiones por grupos π-separables finitos.

En particular obtenemos que la extensión de un $\mathfrak{M}$-grupo contable por un grupo finito Π-resoluble sigue siendo un $\mathfrak{M}$-grupo. Siendo

$$0^1{}_\pi(G) = 0_\pi(G), \quad 0^2{}_\pi(G) = 0_{\pi,\pi'}(G); \quad 0^3{}_\pi(G) = 0_{\pi,\pi',\pi}(G)$$

y así sucesivamente, se tiene:

(2.2) Sea G un $\mathfrak{M}$-grupo contable. Entonces

$$|G : 0^4{}_\sigma(G)| < \infty \quad \text{y} \quad 0^3{}_\sigma(G)/0^2{}_\sigma(G) \in \mathfrak{R}_1.$$

para cualquier $\sigma \subseteq \Pi$. Si además σ es finito,

$$| G : O^s_\sigma (G) | < \infty \quad \text{y} \quad O^s_\sigma (G)/O^s_\sigma (G)$$

satisface Min.

Hartley (1972) demuestra este resultado sustituyendo la π-separabilidad por la π-separabilidad superior.

(2.3) Sea G contable satisfaciendo la propiedad la propiedad (M.1). Entonces $G \in \mathcal{M}$ si y sólo si $Syl_\sigma(G)$ es contable para todo $\sigma \subseteq \Pi$.

(2.4) La extensión de un $\mathcal{M}$-grupo cuyos σ-subgrupos de Sylow, $\sigma \subseteq \Pi$, satisfacen la condición del normalizador por un grupo finito Π-resoluble sigue siendo un $\mathcal{M}$-grupo.

El resultado (2.1) asegura que para grupos contables π-separables, $\bar{\mathcal{D}}_\pi$ y $\mathcal{B}_\pi$ son equivalentes.

Esto es ampliado por un resultado de Hartley (1972) donde se asegura que $\mathcal{D}^s_p$ y Sylow p-sparse son equivalentes y para grupos π-separables, Sylow π-sparse y $\mathcal{D}^s_\pi$ también son equivalentes.

Por tanto en $\mathcal{M}$-grupos son equivalentes Sylow σ-sparse y $\mathcal{D}^s_\sigma$ para $\sigma \subseteq \Pi$ o $\sigma = \Pi'$.

(2.5) Sea $G \in \mathcal{D}^s_\sigma$ y $K \trianglelefteq G$. Entonces los σ-subgrupos de Sylow de G/K son los grupos SK/K con $S \in Syl_\sigma(G)$.

Como consecuencia de este resultado no es necesario imponer en $(\bar{M}.2)$ de la definición de $\bar{\mathcal{M}}$, que

$$G = S_p S_{p'} = S_\Pi S_{\Pi'}$$

obteniéndose como consecuencia.

En efecto, usando inducción sobre la longitud de la serie (1) y el hecho de que para $N \trianglelefteq G$ los σ-subgrupos de Sylow de N son de la forma $S \cap N$ para $S \in Syl_\sigma(G)$, el resultado es obvio para $n = 0$.

Por hipótesis de inducción

$$G_{n-1} = (S_\sigma \cap G_{n-1})(S_{\sigma'} \cap G_{n-1})$$

con $\sigma = p$ o $\sigma = \Pi$. Luego $G_{n-1} \leqslant S_\sigma S_{\sigma'}$.

Si G/G_{n-1} es un Π'-grupo, como

$$S_{\Pi'} G_{n-1}/G_{n-1} \in Syl_{\Pi'}(G/G_{n-1}), \quad G = S_{\Pi'} G_{n-1},$$

luego $G = S_{\Pi'} S_\Pi$.

Si G/G_{n-1} es un Π-grupo localmente nilpotente $G = S_{\Pi} G_{n-1}$, luego de nuevo $G = S_{\Pi'} S_{\Pi}$. También

$$G/G_{n-1} = (S_{p} G_{n-1}/G_{n-1}) (S_{p'} G_{n-1}/G_{n-1})$$

por la local nilpotencia. Luego $G = S_{p'} S_{p}$.

3. Resultados principales

Veremos ahora el resultado fundamental según el cual $(\bar{M}.2)$ puede sustituirse por $(\bar{M}.2')$: $G \in \mathfrak{D}^{s}_{\sigma}$ para $\sigma \subseteq \Pi$ o $\sigma = \Pi'$.

Se deducirá además que $G \in \mathfrak{D}^{s}_{\sigma}$ para $\sigma \supseteq \Pi'$.

(3.1) TEOREMA.—Sea G un grupo localmente finito satisfaciendo (M.1) y $(\bar{M}.2')$ $w(G) = \pi_1 \cup \dots \cup \pi_n$ es una partición de $w(G)$ con $\pi_1 = \Pi' \cap w(G)$ y $\pi_2, \dots, \pi_n \subseteq \Pi$ y mutuamente disjuntos, entonces:

Si τ es cualquier unión de conjuntos π_i, entonces G es Sylow τ-íntegro ($w(G) = \{p/p$ es primo y $p/o(x)$ para un x de $G\}$).

DEMOSTRACIÓN. — Sabemos que G es π_i-separable para $i = 1, 2, \dots, n$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad $\tau = \pi_1 \cup \dots \cup \pi_j$. Para probar que $G \in \mathfrak{D}^{s}_{\tau}$ podemos suponer G contable y como las hipótesis se heredan por subgrupos, es suficiente probar que $G \in D_{\tau}$.

Por ser G π_i-separable para todo i, G es τ-separable, luego posee una serie normal cuyos factores son τ-grupos o τ'-grupos. Usando inducción sobre tal serie y el resultado de Hartley (1972) que nos asegura que si $G \in L\,\mathfrak{D}^{s}_{\tau}$, G es Sylow τ-sparse y $K \trianglelefteq G$, entonces G/K es Sylow τ-sparse, podemos suponer que G contiene un subgrupo normal que es τ-grupo o τ'-grupo y $G/N \in \mathfrak{D}_{\tau}$. Si N es τ-grupo, es inmediato que $G \in \mathfrak{D}_{\tau}$

En otro caso sean $S, T \in \mathrm{Syl}_{\tau}(G)$. Como G/N es Sylow τ-conexo, existe $x \in G$ tal que $\langle S^{x} N/N, T\,N/N \rangle = U/N$ es τ-grupo. Puesto que U/N es contable, existe un τ-subgrupo V de U tal que $U = V\,N$, $V \cap N = 1$.

Sea Y cualquier subgrupo de V. Entonces Y satisface (M.1) y $(\bar{M}.2')$, luego $Y = \langle Y_1, \dots, Y_j \rangle$ donde Y_i es un π_i-grupo.

Ahora $N\,Y_i$ es π_i-Sylow sparse por hipótesis, luego por el resultado Hartley (1972) existe un subgrupo finito F_i de Y_i tal que

$C_N(Y_i) = C_N(F_i)$. Entonces

$$C_N(Y) = \bigcap_{i=1}^{n} C_N(Y_i) = \bigcap_{i=1}^{n} C_N(F_i) = C_N(F)$$

donde $F = \langle F_1, ..., F_n \rangle$ es finito.

De nuevo por el resultado (4.3) de Hartley (1972) $U = N V$ es Sylow τ-conexo. Luego S^g y T que son τ-subgrupos de Sylow de U son conjugados en U y por tanto S y T son conjugados.

Concluimos por tanto que $G \in \bar{\mathcal{M}}$ si y sólo si G satisface (M.1) y $(\bar{M}.2')$ y en este caso $G \in \mathfrak{D}^s_\sigma$ para todo $\sigma \supseteq \Pi'$.

Teniendo en cuenta que un grupo π-separable que contiene un subgrupo de índice finito Sylow π-sparse es Sylow π-íntegro, concluimos:

(3.2) Corolario.—Sea G localmente finito, $H \trianglelefteq G$, $H \in \mathcal{M}$ $(\bar{\mathcal{M}})$ y G/H finito Π-resoluble. Entonces $G \in \mathcal{M}$ $(G \in \bar{\mathcal{M}})$.

Como consecuencia del corolario (C.1) de Hartley (1972) que dice:

Sea G π-separable superiormente y localmente π-resoluble y Sylow π-sparse. Entonces los π-subgrupos de Sylow de $G/0_\pi(G)$ son contables. Si π es finito, entonces $G/0_{\pi,\pi'}(G)$ es contable. Obtenemos:

Si $G \in \mathcal{M}$ y $\sigma \subseteq \Pi$, entonces los σ-subgrupos de Sylow de $G/0_\sigma(G)$ son contables y $G/0_p(G)$ y $G/0_{p,p'}(G)$ son contables para $p \in \Pi$.

(3.3) Teorema.—Sea G Π-separable y localmente Π-resoluble. Entonces:

a) $G \in \mathcal{M}$ si y sólo si G es Sylow σ-sparse para todo $\sigma \subseteq \Pi$.

b) $G \in \bar{\mathcal{M}}$ si y sólo si G es Sylow σ-sparse para todo $\sigma \subseteq \Pi$ y $\sigma \supseteq \Pi'$ si y sólo si G es Sylow σ-sparse para todo $\sigma \subseteq \Pi$ y $\sigma = \Pi'$.

Demostración. — Supongamos G Π-separable y satisfaciendo $(\bar{M}.2')$. Nos falta ver que G satisface (M.1).

Consideremos la serie $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_n = G$ con cada factor Π-grupo o Π'-grupo.

Si $H = G_i/G_{i-1}$ es un Π-factor, es localmente resoluble y completamente Sylow sparse. Luego es un $\mathcal{U}$-grupo y posee una serie con factores localmente nilpotentes.

(3.4) TEOREMA.—Sean G_1 y $G_2 \in \mathcal{M}$ ($\bar{\mathcal{M}}$). Entonces $G_1 \times G_2 \in \mathcal{M}$ ($\bar{\mathcal{M}}$).

DEMOSTRACIÓN.—Puesto que se satisface (M.1) obviamente, basta ver que $G = G_1 \times G_2$ es Sylow σ-íntegro para todo $\sigma \subseteq \Pi$ ($\sigma = \Pi'$).

Sea $H \leqslant G$, S, T σ-subgrupos de Sylow de H. Podemos suponer $H = \langle S, T \rangle$. Como

$$H/(H \cap G_1) \simeq H\, G_1/G_1 \simeq G_2,$$

los σ-subgrupos de Sylow de $H/(H \cap G_1)$ son conjugados. Puesto que

$$S(H \cap G_1)/(H \cap G_1) \quad \text{y} \quad T(H \cap G_1)/(H \cap G_1)$$

son σ-subgrupos de Sylow de $H/(H \cap G_1)$, existe un $h \in H$ tal que $\langle S^h, T \rangle (H \cap K_1)/(H \cap G_1)$ es σ-grupo. Sea $L = \langle S^h, T \rangle$.

$$L/(L \cap G_1) \simeq L(H \cap G_1)/(H \cap G_1)$$

es σ-grupo. Similarmente existe $k \in L$ tal que $M = \langle S^{hk}, T \rangle$, $M/(M \cap G_2)$ es σ-grupo.

También

$$M/(M \cap G_1) \simeq M(L \cap G_1/(L \cap G_1)$$

es σ-grupo y $G_1 \cap G_2 = 1$. Luego M, que es subgrupo de H, es σ-grupo. Por tanto $M = T = S^{hk}$.

También podemos asegurar por el trabajo de Bryant (1979):

— $\bar{\mathcal{M}}$ contiene la clase de los grupos localmente finitos Π-resolubles y σ-separables que pertenecen a $M_c^{\sigma} \cap M_c^{\sigma'}$ para todo $\sigma \subseteq \Pi$.

Finalmente, según el trabajo de Holt (1980), se tiene:

— Sea G un grupo localmente finito Π-resoluble. $G \in \bar{\mathcal{M}}$ si y sólo si G satisface ($\bullet\, \sigma$) y ($\bullet\, \sigma'$), y es σ-separable para todo $\sigma \subseteq \Pi$; siendo la propiedad ($\bullet\, \sigma$) definida por: G satisface ($\bullet\, \sigma$) si siempre que H_i ($i \in N$) es una serie ascendente de σ-subgrupos finitos de G y K_i ($i \in N$) es una serie descendente de σ'-subgrupos de G con $H_i \leqslant N(K_i)$ para todo i, entonces para todo n suficientemente grande

$$C_{K_{n+1}}(H_n) = C_{K_{n+1}}(H_{n+1}).$$

Bibliografía

[1] BRYANT, R. M. y HARTLEY, B. (1979). Periodic Locally Soluble Groups with the Minimal Condition on Centralizers. *J. of Algebra*, **61**, 328.

[2] GARDINER, HARTLEY y TOMKINSON (1971). Saturated formations and Sylow structure in locally finite groups. *J. of Algebra*, **17**, 177.

[3] HARTLEY, B. (1971). Sylow subgroups of locally finite groups. *Proc. London Math. Soc.*, (3), **23**, 159.

[4] HARTLEY, B. (1972). Sylow theory in locally finite groups. *Compositio Mathematica*, **25**, 263.

[5] HOLT, D. F. (1980). A criterion for the Conjugacy of Sylow Subgroups in Periodic locally soluble groups. *J. of Algebra*, **65**, 332.

[6] MARTÍNEZ, C. (1980). Formaciones saturadas en una clase de grupos localmente finitos Π-resolubles. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

Departamento de Algebra y Fundamentos
Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza