ESPACIOS SEMI-ESCALONADOS CON VALORES Y ESCALONES VECTORIALES

Rafael Crespo (*)

Recibido: 7 octubre 1981.

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

Let $\langle E, F \rangle$ be a dual pair, the semi-echelon vector sequence spaces valued in E with certain echelons valued in F are studied.

Dado un par dual $\langle E, F \rangle$, se estudian los espacios semi-escalonados con valores en E a partir de una familia de escalones con valor en F.

Nuestro objetivo es dar para el caso vectorial una generalización de los espacios semi-escalonados escalares tal y como se estudian en [1], y que son definidos por Valdivia [12]. Otro tipo de generalización, más adecuada para las aplicaciones, se estudia en [2].

Los espacios vectoriales usados se entenderán definidos sobre $\mathbb{K}$ que indistintamente indicará el cuerpo de los números reales o de los complejos. Con la palabra «espacio» designaremos un espacio vectorial topológico localmente convexo y separado. Dado un espacio $E[\mathfrak{T}]$, E' y $\tilde{E}$ representarán respectivamente su dual topológico y su completación. Por E^N y $E^{(N)}$ denotamos el producto y suma directa de una cardinalidad numerable de copias de E. Dado un par dual $\langle E, F \rangle$ representaremos por $\sigma(E, F)$, $\mu(E, F)$, $\beta(E, F)$ y $\beta^*(E, F)$ las topologías débil, de Mackey, fuerte y de convergencia uniforme sobre los conjuntos $\beta(F, E)$-acotados.

(*) El presente trabajo ha sido realizado bajo la dirección del Prof. Dr. D. Manuel Valdivia Ureña en el Departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia.

Llamaremos espacio de sucesiones vectoriales a un subespacio Λ de E^N que contenga a $E^{(N)}$. A partir de él podemos considerar en F el espacio de sucesiones

$$\Lambda^x = \{ (y_n) \in F^N : (<x_n, y_n>) \in l^1, \quad \text{para todo} \quad (x_n) \in \Lambda \}$$

donde $\langle .,. \rangle$ representa la forma bilineal asociada al par dual.

Como en el caso escalar Λ^x es denominado α-dual de Λ. Evidentemente $\Lambda \subset \Lambda^{xx}$, y en el caso en que se cumpla la igualdad Λ se denominará perfecto. Dichos espacios, generalización inmediata de los perfectos escalares, son estudiados por Gregory [3] y [4], Phuong-Các [10] y [11], Gupta, Katman y Rao [6], [7], [8] y Gribanov [5].

Sea Λ un espacio perfecto de sucesiones en E; a partir de él se definen

$$\Lambda_0 = \{ (x_n) \in E^N : (<x_n, y_n>) \in c_0 \quad \text{para todo} \quad (y_n) \in \Lambda^x \}$$

$$\Lambda_\infty = \{ (x_n) \in E^N : (<x_n, y_n>) \in l^\infty \quad \text{para todo} \quad (y_n) \in \Lambda^x \}$$

que denominaremos respectivamente espacio semi-escalonado y espacio escalonado de orden infinito asociados al espacio escalonado Λ, o con escalones, los elementos de Λ^x. Es inmediato que ambos contienen a $E^{(N)}$ y que son normales en el sentido de que si (x_n) es un elemento de cualquiera de ellos y (α_n) una sucesión en $\mathbb{K}$, cuyos elementos son de módulo menor o igual a la unidad, entonces la sucesión $(\alpha_n \cdot x_n)$ está en el espacio.

Para un natural j se definen de forma inmediata las aplicaciones

$$\pi_j : \Lambda_\infty \longrightarrow E, \quad \text{tal que} \quad \pi_j((x_n)) = x_j$$

$$I_j : E \longrightarrow \Lambda_\infty, \quad \text{tal que} \quad I_j(x) = (x_n)$$

donde (x_n) es la sucesión cuyos términos son todos nulos salvo el x_j que vale x. Igualmente se puede poner Λ_0 en lugar de Λ_∞. Es inmediato que para cada j, la composición $\pi_j \cdot I_j$ es la aplicación identidad en E, mientras que la composición $I_j \cdot \pi_j$ es una proyección en el subespacio $I_j(E)$.

Los espacios Λ y Λ^x forman un par dual para la forma bilineal

$$<(x_n), (y_n)> = \sum_{n=1}^{\infty} <x_n, y_n>$$

Tomemos entonces una familia $\mathcal{M}$ de conjuntos $\sigma(\Lambda^x, \Lambda)$-acotados cumpliendo las condiciones:

(i) $\cup \{M : M \in \mathcal{M}\} = \Lambda^x$.

(ii) $\rho M \in \mathcal{M}$, siempre que $M \in \mathcal{M}$ y $\rho > 0$.

(iii) Si M_1 y M_2 son dos elementos de $\mathcal{M}$, existe entonces un M_3 en $\mathcal{M}$ de forma que $M_1 \cup M_2 \subset M_3$.

A tal familia la denominaremos sistema topologizador. Para cada $M \in \mathcal{M}$ se define

$$Q_M((x_n)) = \sup \{\sup_n |<x_n, y_n>| : (y_n) \in M\}$$

para $(x_n) \in \Lambda_\infty$. Con la misma demostración de la proposición 1 de [1] con las correspondientes variaciones para actuar con la forma bilineal en lugar del producto numérico usual, enunciamos:

Proposición 1.—La familia $\{Q_M : M \in \mathcal{M}\}$ es una familia de semi-normas en Λ_∞ y Λ_0 que definen una topología localmente convexa y separada y que denotaremos por $\mathcal{M}_0$.

A los espacios resultantes los denotaremos por $\Lambda_\infty \mathcal{M}_0$ y $\Lambda_0 \mathcal{M}_0$.

La menos fina de estas topologías la denominaremos semi-normal $\mathcal{N}_0$ e induce en el correspondiente espacio escalonado una topología que es en general menos fina que la normal $\eta(\Lambda, \Lambda^x)$ definida en [10].

Si denotamos por $\mathcal{K}$, $\mathcal{B}^*$ y $\mathcal{B}$ las familias de conjuntos $\sigma(\Lambda^x, \Lambda)$-relativamente compactos, $\beta(\Lambda^x, \Lambda)$-acotados y $\sigma(\Lambda^x, \Lambda)$-acotados de Λ^x, como es fácil probar que la topología de Mackey es más fina que $\eta(\Lambda, \Lambda^x)$ tenemos las inclusiones

$$\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{K}_0 \subset \mathcal{B}_0^* \subset \mathcal{B}_0$$

También es consecuencia inmediata de las definiciones la siguiente:

Proposición 2.—(a) La aplicación π_j es $\mathcal{N}_0$-$\mathcal{T}$-abierta para cualquier espacio $E[\mathcal{T}]$.

(b) I_j es $\mathcal{T}$-$\mathcal{N}_0$-continua.

(c) Si π_j es continua, I_j es cerrada.

(d) π_j es $\mathcal{N}_0$-$\sigma(E, E')$ continua.

Corolario 3.—Para toda topología $\mathcal{M}_0$, $E[\sigma(E, F)]$ es isomorfo a un subespacio cerrado de $\Lambda_\infty \mathcal{M}_0$.

DEMOSTRACIÓN.—Por los apartados (d) y (c) de la proposición anterior vemos que I_1 es $\sigma(E, F)$-$\mathcal{N}_0$ cerrada, luego $I_1(E)$ es $\mathcal{N}_0$-cerrado en Λ_∞ y «a fortiori» $\mathcal{M}_0$-cerrado. Por otro lado es trivial que $I_1(E)$ es isomorfo a $E[\sigma(E, F)]$.

PROPOSICIÓN.—Λ_0 es un subespacio cerrado de $\Lambda_\infty \mathcal{M}_0$.

DEMOSTRACIÓN.—Obvia con las técnicas habituales.

En [1] se ve que los espacios semi-escalonados escalares y escalonados de orden infinito son completos. Para el caso vectorial se tiene:

PROPOSICIÓN 5.—El espacio $\Lambda_\infty \mathcal{M}_0$ es completo si, y sólo si, E es $\sigma(E, F)$-completo.

DEMOSTRACIÓN.—*Por* el corolario 3 la completitud de $\Lambda_\infty \mathcal{M}_0$ implica la de $E[\sigma(E, F)]$. Inversamente sea $\{(x\delta_n): \delta \in D\}$ una red de Cauchy en $\Lambda_\infty \mathcal{M}_0$. Para un real positivo ε y para un $M \in \mathcal{M}$ se puede encontrar un δ_0 en D tal que

$$Q_M((x_{\delta n}) - (x_{\delta' n})) < \varepsilon \quad \text{si} \quad \delta_1 \delta' \geq \delta_0 \tag{1}$$

Para un n fijo la red $\{x_{\delta n}: \delta \in D\}$ es de Cauchy en $\sigma(E, F)$. Sea x_n el límite de dicha red en E, que existe por hipótesis. Si $(y_n) \in \Lambda^x$ se tiene

$$\sup_n |<x_n, y_n>| \leq \sup_n |<x_{\delta n}, y_n>| + \sup_n |<x_{\delta n} - x_n, y_n>|$$

buscando un M tal que $(y_n) \in M$ se deduce de (1) tomando límites para δ'

$$\sup_n |<x_n, y_n>| \leq \sup_n |<x_{\delta n}, y_n>| + \varepsilon$$

luego (x_n) pertenece a Λ_∞, y es el $\mathcal{M}_0$-límite de la red inicial.

En virtud de la proposición 4 el resultado anterior es cierto para Λ_0. También estos resultados con mínimas modificaciones en la demostración son válidos para la completitud sucesional y la casi-completitud.

Pasemos a estudiar ahora los conjuntos acotados para las topologías $\mathcal{M}_0$. Un subconjunto B de Λ_∞ (resp. Λ_0) diremos que está acotado si para cada $(y_n) \in \Lambda^x$ existe un real positivo ρ tal que

$$\sup_n \{ | < x_n , y_n > | \} \leq \rho \quad \text{para cada} \quad (x_n) \in B$$

Evidentemente B es acotado si, y sólo si, su envoltura normal (el mínimo conjunto normal que lo contiene) es acotada. Además π_j (B) es entonces σ (E, F)-acotado para todo natural j.

Proposición 6.—Sea $\langle E, F \rangle$ un par dual con F σ (F, E)-sucesionalmente completo. Un subconjunto de Λ_∞ (resp. Λ_0) es acotado si, y sólo si, es $\mathcal{M}_0$-acotado para cualquier sistema topologizador $\mathcal{M}$.

Demostración.—Si B es $\mathcal{M}_0$-acotado es evidentemente acotado. Supongamos inversamente que B fuese acotado sin serlo para una topología $\mathcal{M}_0$.

Para cada natural k se podrían encontrar elementos (x_{kn}) en B y (a_{kn}) en M, para un cierto M $\in \mathcal{M}$ con

$$\sup_n | < x_{kn} , a_{kn} > | > k \cdot 2^k$$

Al ser M σ (Λ^x, Λ)-acotado para un p natural

$$M_p = \{ y \in F \; : \; \text{existe un} \quad (a_n) \in M \quad \text{con} \quad a_p = y \}$$

es σ (F, E)-acotado; luego para cada x en E se puede encontrar un real ρ_{xp} de forma que

$$\sup \{ | < x , y > | \; : \; y \in M_p \} \leq \rho_{xp}$$

La sucesión

$$z_{pn} = \sum_{k=1}^{p} \frac{a_{kn}}{2^k}$$

es σ (F, E)-Cauchy en F, luego σ (F, E)-convergente a un $z_n \in F$.

Entonces $\sup_p | \langle x, z_{pn} \rangle | \leqslant \rho_{xn}$.

Tomando ahora $(y_n) \in \Lambda$, de la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} | < y_n , a_n > |$$

resulta la de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} | < y_n , z_n > | ,$$

y por lo tanto $(z_n) \in \Lambda^x$.

Al ser B acotado existe un ρ_0 de forma que

$$\sup_n | < x_n , z_n > | \leq \rho_0 \quad \text{para cada} \quad (x_n) \in B$$

pero sin embargo

$$\sup_n | < x_n , z_n > \quad > k \quad \text{para} \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

por construcción lo que contradice la expresión anterior.

La condición de que F sea σ (F, E)-sucesionalmente completo **no** se puede omitir como demostramos en el siguiente ejemplo:

Sea $E = F = \varphi$ el conjunto de las sucesiones en $\mathbb{K}$ con sólo un número finito de coordenadas no nulas, con la forma bilineal usual. Sea $\Lambda = E^N$, es fácil comprobar que $\Lambda^x = F^{(N)}$ y por lo tanto $\Lambda_0 = E^N$.

Consideremos el subconjunto

$$M = \{ (x_n) \in E \; : \; | x_n | \leq 1 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \}$$

M es σ (E, F)-acotado pero no β (E, F)-acotado ([9] pág. 254), Tomemos $B = \prod_{n=1}^{\infty} B_n$, donde $B_1 = M$ y $B_n = 0$ para $n > 1$.

B es acotado, pues si $(y_n) \in \Lambda^x$,

$$\sup_n | < x_n , y_n > | \leq \rho , \quad \text{para todo} \quad (x_n) \in B$$

siendo $\rho = \sup_n | \langle x, y_1 \rangle |$ para todo $x \in M$. Sin embargo, como los acotados de $F^{(N)}$ son finito dimensionales $\mathcal{B}_0 = \beta (\Lambda, \Lambda^x)$ y por lo tanto si B fuese acotado para $\mathcal{B}_0$ debería ser producto de conjuntos β (E, F)-acotados, cosa que no ocurre al no serlo B_1.

En [1] y en el contexto de los espacios semi-escalonados escalares obteníamos un resultado de tipo Eberlein. Desgraciadamente y como en la proposición anterior es necesario imponer condiciones al par dual $\langle E, F \rangle$.

Se dice que un par dual $\langle E, F \rangle$ es reflexivo si $E [\beta (E, F)]' = F$ y $F [\beta (F, E)]' = E$. Una condición necesaria y suficiente para que el par dual sea reflexivo es que tanto E como F sean débilmente casi-completos ([9] § 23.6).

Diremos que E es submetrizable respecto del par dual $\langle E, F \rangle$ si admite una topología metrizable menos fina que una compatible con el par dual.

PROPOSICIÓN 7.—Sea $\langle E, F \rangle$ un par dual reflexivo con E submetrizable con respecto a él. Para cualquier topología $\mathcal{M}_0$, y B un subconjunto de Λ_0 son equivalentes:

(a) B es $\mathcal{M}_0$-relativamente compacto.

(b) B es $\mathcal{M}_0$-relativamente numerablemente compacto.

(c) B es $\mathcal{M}_0$-relativamente sucesionalmente compacto.

(d) B es acotado y si $\{(x_{kn}),\ k = 1, 2, 3, \ldots\}$ es una sucesión en B que para cada n es $\sigma (E, F)$-convergente a un $x_n \in E$, entonces (x_n) es el $\mathcal{M}_0$-límite de la sucesión dada en Λ_0.

DEMOSTRACIÓN.—Con las hipótesis se tiene que $\Lambda_0\, \mathcal{M}_0$ es casi-completo. Como la topología $\mu (\Lambda_0, \Lambda'_0)$ admite una base de entornos $\mathcal{M}_0$-cerrados $\Lambda_0 [\mu (\Lambda_0, \Lambda'_0)]$ es casi-completo ([9] pág. 210), luego aplicando el teorema de Eberlein ([9] pág. 313) a $\Lambda_0\, \mathcal{M}_0$ obtemos (a) $\Longleftrightarrow$ (b).

Por otro lado es inmediato que (c) $\Longrightarrow$ (b).

(b) $\Longrightarrow$ (c): Si B es relativamente numerablemente compacto para la topología $\mathcal{M}_0$, sea $\{(x_{kn}) : k = 1, 2, 3, \ldots\}$ una sucesión en B. Al ser B acotado para un n fijo la sucesión $\{x_{kn},\ k = 1, 2, 3, \ldots\}$ es $\sigma (E, F)$-acotada; por ser $\langle E, F \rangle$ reflexivo, todo acotado de E es relativamente numerablemente $\sigma (E, F)$-compacto. Por el teorema de Smulian ([9] pág. 311) contiene una subsucesión convergente. Aplicando un método diagonal típico en estos casos, podemos obtener una subsucesión de la inicial que seguiremos denotando de idéntica manera, tal que para cada n, exista un x_n en E de forma que

$$\sigma (E, F) - \lim_k x_{nk} = x_n$$

Por hipótesis dicha sucesión admite un punto $\mathcal{M}_0$-adherente $(y_n) \in \Lambda_0$. Es evidente que entonces $x_n = y_n$ y entonces la sucesión admite un solo punto adherente, que debe ser su límite, por lo que B es $\mathcal{M}_0$-relativamente sucesionalmente compacto.

(c) $\Longrightarrow$ (d): Supongamos que de cada sucesión en B se pueda extraer una subsucesión convergente. Evidentemente la hipótesis implica la acotación de B. Sea $\{(x_{kn}) : k = 1, 2, 3, \ldots\}$ una sucesión en B, de forma que para cada n exista un x_n en E que sea el σ (E, F)-límite de la sucesión $\{x_{kn} : k = 1, 2, 3, \ldots\}$. (x_n) es el $\mathcal{M}_0$-límite de la sucesión inicial, ya que si no fuese así existiría una subsucesión $\{(x_{k_j n}) : j = 1, 2, 3, \ldots\}$ que convergería a un (y_n) distinto de (x_n). Se puede encontrar un natural n_0 tal que $x_{n_0} \neq y_{n_0}$. La sucesión $\{x_{k_j n} : j = 1, 2, 3, \ldots\}$ tendría dos límites distintos, lo que es absurdo.

(d) $\Longrightarrow$ (c): Sea $\{(x_{kn}) : k = 1, 2, 3, \ldots\}$ una sucesión arbitraria en B. Al ser B acotado, la sucesión $\{x_{kn} : k = 1, 2, 3, \ldots\}$ está acotada para cada k y podemos extraer una subsucesión, que denotaremos de la misma manera que converge a x_n en σ (E, F). Por (d) (x_n) es el $\mathcal{M}_0$-límite de la sucesión en Λ_0, por lo que para cada sucesión en B encontramos una subsucesión convergente.

Corolario 8.—Si E $[\mathcal{T}]$ es un espacio de Fréchet-Montel, y $\Lambda_0 \mathcal{M}_0$ un espacio semi-escalonado con valores en E, para cualquier subconjunto B de las cuatro condiciones de la proposición 7 son equivalente.

Demostración.—Se reduce a la proposición anterior, pues en ese caso el par dual $\langle E, E' \rangle$ es reflexivo y E $[\mathcal{T}]$ es metrizable.

Dado un elemento de E^N, (x_n), llamaremos sección k-ésima $(x_n^{(k)})$ a la sucesión con valores en E que son todos nulos salvo los k primeros que coinciden con los de (x_n). Denotaremos por $(\Lambda_\infty \mathcal{M}_0)$ y $(\Lambda_0 \mathcal{M}_0)$ los subespacios de $\Lambda_\infty \mathcal{M}_0$ y $\Lambda_0 \mathcal{M}_0$ formados por aquellos elementos que son límite en $\mathcal{M}_0$ de sus secciones. Es fácil probar que ambos coinciden y forman un subespacio $\mathcal{M}_0$-cerrado en Λ_0. Denotaremos por $\mathcal{T}_j$ la topología inducida en E por la topología $\mathcal{M}_0$ al tomar sólo la coordenada j.

Proposición 9.—Para un sistema topologizador $\mathcal{M}$ se tiene $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ si, y sólo si, $(\Lambda_0 \mathcal{M}_0) = \Lambda_0$ y $\mathcal{T}_j \subset \mu$ (E, F) para todo j.

Demostración.—Si $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$, para un j cualquiera la restricción de un $M \in \mathcal{M}$ en su coordenada j es relativamente compacto para la topología σ (F, E), luego $\mathcal{T}_j \subset \mu$ (E, F). Supongamos ahora que existiera un (x_n) en Λ_0 que no fuese el $\mathcal{M}_0$-límite de sus secciones. Se podría encontrar un ε_0 positivo y un $M \in \mathcal{M}$ de forma que

$$\sup \{ | < x_{n_k}, a_{n_k} > | : (a_n) \in M \} > \varepsilon_0$$

para una sucesión estrictamente creciente de naturales n_k; entonces se tendría que

$$\sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left| < \frac{x_n}{2^n}, a_n > \right| : (a_n) \in M \right\} < \varepsilon_0$$

y como $(2^{-n} x_n) \in \Lambda$, eso indica que M no es $\sigma(\Lambda^x, \Lambda)$-relativamente compacto.

Inversamente para la suficiencia sea $M \in \mathcal{M}$ si no fuese $\sigma(\Lambda^x, \Lambda)$-relativamente compacto, existirían (a_{nk}) en M tal que

$$\sup_{n > k} | < y_n, a_{nk} > | > \varepsilon_0 \quad \text{para un} \quad (y_n) \in \Lambda \quad \text{y} \quad \varepsilon_0 \quad \text{positivo}$$

Tomando

$$b_{np} = \sum_{k=1}^{p} \frac{a_{nk}}{2^k},$$

es una sucesión en la restricción n a F y como $\mathcal{T}_n \subset \mu(E, F)$, admite un punto adherente b_n en F. Es evidente que $(b_n) \in \Lambda^x$ y que

$$\sup_{n > k} | < y_n, b_n > | \geqq \varepsilon_0$$

lo que indica que las secciones de (y_n) no convergen a él en $\mathcal{M}_0$, en contra de la hipótesis.

Como consecuencias del resultado anterior se obtiene:

Corolario 10.—$\mathcal{K} = \mathcal{B}^*$ si, y sólo si, $E[\mu(E, F)]$ es casi-tonelado y $(\Lambda_0 \mathcal{B}_0^*) = \Lambda_0$.

Demostración.—Basta tener en cuenta que $\mathcal{B}_0^*$ induce $\mathcal{T}_j = \beta^*(E, F)$ y la proposición 9.

Corolario 11.—$\mathcal{K} = \mathcal{B}$ si, y sólo si, $E[\mu(E, F)]$ es tonelado y $(\Lambda_0 \mathcal{B}_0) = \Lambda_0$.

Demostración.—Basta tener en cuenta que $\mathcal{B}_0$ induce $\mathcal{T}_j = \beta(E, F)$ y la proposición 9.

Finalmente vamos a hacer mención del dual del subespacio $(\Lambda_0\, \mathcal{M}_0)$ ya que igual que en el caso escalar la convergencia de las secciones es fundamental para su posible caracterización.

Proposición 12.—Si φ es una forma lineal continua sobre $(\Lambda_0\, \mathcal{M}_0)$ se puede encontrar un elemento (y_n) de $\Lambda^x{}_0$ de forma que si (x_n) es un elemento de $(\Lambda_0\, \mathcal{M}_0)$

$$\varphi\,((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} < x_n\,,\ y_n >$$

Demostración.—Idéntica a la de la proposición 9 de [1], con las variaciones convenientes para usar la forma bilineal en lugar del producto numérico y tomando como y_n el elemento de F tal que si x es un elemento de E y e_n es el vector unitario correspondiente en ω

$$< x\,,\, y_n > = \varphi\,((e_n\, x))\,.$$

El dual entonces es un espacio de sucesiones con valores en F, al ser un subespacio de $\Lambda^x{}_0$.

Sea $(a_n) \in \Lambda^x$, definimos

$$\Lambda_0\,(a_n) = \{\,(x_n) \in E^N \;:\; (< x_n\,,\ a_n >) \in c_0\,\}$$

A partir de la definición es inmediato que $\Lambda_0\,(a_n)^x$ es el conjunto de las sucesiones (u_n) con valores en F de forma que $u_n = \alpha_n \cdot a_n$ para todo n, siendo $(\alpha_n) \in l^1$.

También con una demostración análoga a la de la proposición 10 de [1] se tiene:

Proposición 13.

$$\bigcup\,\{\,\Lambda_0\,(a_n)^x \;:\; (a_n) \in \Lambda^x\,\} \subset (\Lambda_0\, \mathcal{M}_0)'$$

y a partir de los dos últimos resultados es obvio que:

Corolario 14.—Si

$$\Lambda^x{}_0 = \bigcup\,\{\,\Lambda_0\,(a_n)^x \;:\; (a_n) \in \Lambda^x\,\}$$

entonces

$$(\Lambda_0 \mathcal{M}_0)' = \Lambda^x{}_0$$

Si además $(\Lambda_0 \mathcal{M}_0) = \Lambda_0$, obtenemos la caracterización del dual de una amplia clase de nuestro tipo de espacios.

Bibliografía

[1] CRESPO, R. Sobre ciertas topologías en los espacios semi-escalonados escalares. *Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid.* (Pendiente de publicación.)

[2] CRESPO, R. Una clase de espacios semi-escalonados vectoriales. *Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid.* (Pendiente de publicación.)

[3] GREGORY, D. A. (1969). Some basic properties of vector sequence spaces. *J. reine angew. Math.*, Band 237, 26-38.

[4] GREGORY, D. A. (1970). Hereditary properties of vector sequence spaces. *J. reine angew. Math.*, Band 243, 66-69.

[5] GRIBANOV, J. I. (1965). Abstract spaces of sequences. *Izv. Vyss. Uceb. Zavd. Math.*, **45**, 56-68.

[6] GUPTA, M., KAMTHAN, P. K. y RAO, K. L. N. (1976). The generalized sequence spaces c, c_0, l^1, l^∞ and their Köthe duals. *Tamkang Math. J.*, **7**, 175-178.

[7] GUPTA, M., KAMTHAN, P. K. y RAO, K. L. N. (1977). Duality in certain generalized Köthe sequence spaces. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica,* vol. 5, no. 2, 285-298.

[8] GUPTA, M., KAMTHAN, P. K. y RAO, K. L. N. (1977). Generalized Köthe sequence spaces and descompositions. *Ann. Mat. Pura Appl. Dec. issue,* **113 (4)**, 287-301.

[9] KÖTHE, G. (1969). Topological Vector Spaces. Springer Verlag.

[10] PHUONG-CÁC, N. (1967). Sur les espaces de suites parfaits généralisés. *Math. Annalen,* **171**, 131-143.

[11] PHUONG-CÁC, N. (1967). On some spaces of vector valued sequences. *Math. Z.*, **95**, 242-250.

[12] VALDIVIA, M. (1980). Espacios de sucesiones. Ayudas Manuel Aguilar, Madrid.

Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad de Valencia
c/ Dr. Moliner, 4
Burjasot (Valencia)