REPRESENTACIONES DE LOS ESPACIOS $\mathcal{B}_0(\Omega, E)$ Y $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$

José Bonet y Manuel Maestre (*)

Recibido: 7 octubre 1981

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

In this paper we give representations of the spaces of infinitely differentiable functions with values in a separated locally convex topological vector space $\mathcal{B}_0(\Omega, E)$, $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$ and $\mathcal{D}(K, E)$, using spaces of sequences.

Si A es un subconjunto de un espacio topológico X, $\mathring{A}$, $\bar{A}$ y ∂A denotarán el interior, la clausura y la frontera de A respectivamente. Todos los espacios vectoriales que se usarán a lo largo del trabajo están definidos sobre el cuerpo C de los números complejos. Con la palabra espacio vamos a designar espacio vectorial topológico localmente convexo y separado. Si E y F son dos espacios isomorfos escribiremos $E \simeq F$. Diremos que un espacio es localmente completo si todo subconjunto acotado de él está incluido en un disco de Banach. Si E es un espacio E' denota su dual topológico. Denotaremos por N el conjunto de los enteros positivos.

Por R^n designaremos el espacio euclídeo de dimensión n. Si x pertenece a R^n escribiremos $|x|$ para la norma euclídea de x. En cuanto sigue usaremos las notaciones de L. Schwartz (véase [12] y [13]) y los espacios $\mathcal{E}(\Omega, E)$ y $\mathcal{D}(Q, E)$, donde Ω es un abierto de R^n, Q es un compacto de R^n y E es un espacio. Para espacios de sucesiones de Banach seguiremos las notaciones de [9]. Si E

(*) El presente trabajo ha sido realizado bajo la dirección del Prof. Dr. Manuel Valdivia en el Departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia.

es un espacio se usarán los espacios de sucesiones vectoriales bien conocidos c_0 (E), m (E), s (E), donde s es el espacio de Fréchet de las sucesiones de decrecimiento rápido.

Para las propiedades elementales de la integración de funciones con valores vectoriales referimos a [11], págs. 74-78. Si Q es un cubo compacto de R^n y E es un espacio denotamos por $\mathcal{E}$ (Q, E) el espacio vectorial de todas las funciones definidas en Q con valores en E infinitamente diferenciables en $\overset{\circ}{Q}$ tales que la función y todas sus derivadas parciales se pueden extender continuamente a todo Q. Se dota a dicho espacio de la topología definida por la siguiente familia de seminormas: Si α es un multi-índice y q es una seminorma continua en E, entonces

$$R(\alpha, q)(f) = \sup \{q(D^\alpha f(x))/x \in Q\}$$

para cada $f \in \mathcal{E}$ (Q, E).

En lo que sigue necesitaremos los siguientes resultados: (a) Sean E y F dos espacios. Si existe f: $E \longrightarrow F$ una aplicación lineal, inyectiva y continua, y existe g: $F \longrightarrow E$ una aplicación lineal y continua tal que $g \circ f$ es la identidad de E, entonces f (E) es un subespacio complementado de F, topológicamente isomorfo a E. [8], pág. 123. (b) Sea E un espacio localmente completo y Q un cubo compacto de R^n, entonces $\mathcal{E}(Q, E) \simeq \mathcal{D}(Q, E) \simeq s(E)$. [2]. (c) Sea E un espacio, sea P un cubo compacto de R^n y Ω un abierto de R^n tal que $\Omega \supset P$. Entonces existe W: $\mathcal{E}(P, E) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega, E)$ un operador lineal y continuo tal que si g es un elemento de $\mathcal{E}$ (P, E) entonces la restricción de W g a P coincide con g. [2]. (d) Sea E un espacio. Si G es isomorfo a un subespacio complementado de s (E) y contiene un subespacio complementado isomorfo a s (E), entonces $G \simeq s(E)$ [14].

Sea Ω un abierto de R^n. Consideraremos la partición de la unidad de Ω dada por Valdivia en [16]. Concretamente si $\Omega = R^n$ consideramos todos los cubos de la forma

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n / a_j \leq x_j \leq a_j + 1, a_j \text{ es entero}, \ j = 1, 2, \ldots, n\} \qquad (1)$$

ordenados en una sucesión (B_r) de elementos distintos. Si $\Omega \neq R^n$, sea $\mathcal{B}_1$ la familia de los cubos de la forma (1) incluidos en Ω tales que si $Q \in \mathcal{B}_1$ la distancia de Q a $R^n \sim \Omega$ es mayor o igual que $\sqrt{n}$. Procediendo por recurrencia, supongamos que hemos obtenido las familias de cubos $\mathcal{B}_h$, $h = 1, \ldots, k$. Representamos por $\mathcal{B}_{k+1}$ la colección de todos los cubos de la forma

$$\{(x_1, \ldots, x_n)/a_j/2^k \leq x_j \leq (a_j + 1)/2^k, a_j \text{ entero}, \ j = 1, \ldots, n\}$$

contenidos en Ω tales que si $Q \in \mathcal{B}_k$ su distancia a $R^n \sim \Omega$ es mayor o igual que $\sqrt{n}/2^k$ y Q no está contenido en ningún elemento de $\mathcal{B}_h$, $h = 1, \ldots, k$. Ordenamos los cubos de $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k$ en una sucesión (B_r) de elementos distintos.

En cualquiera de los casos considerados para Ω, sea

$$B_r = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n / \frac{a_j(r)}{2^{k(r)}} \leq x_j \leq \frac{a_j(r) + 1}{2^{k(r)}}, \quad j = 1, \ldots, n\right\},$$

donde $a_j(r)$ es un número entero y $k(r)$ es un entero no negativo, $j = 1, \ldots, n$. Sea (ρ_r) la sucesión de longitudes de las aristas de (B_r). Sea

$$I = [-1, 1]^n, \quad J = \left[-\frac{4}{15}, \frac{4}{15}\right]^n, \quad L = \left[-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right]^n.$$

Sea $\varphi_r \colon R^n \longrightarrow R^n$ la aplicación definida por

$$\varphi_r(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{2a_1(r) + 1}{2^{k(r)+1}} + \frac{5}{2^{k(r)+3}} x_1, \ldots, \frac{2a_n(r) + 1}{2^{k(r)+1}} + \frac{5}{2^{k(r)+3}} x_n\right).$$

Obviamente $\varphi_r(L) = B_r$. Denotamos $\varphi_r(I) = A_r$ y $\varphi_r(J) = C_r$. Se tiene que

$$\Omega = \bigcup_{r=1}^{\infty} B_r = \bigcup_{r=1}^{\infty} \mathring{A}_r.$$

Además a lo sumo $4^n + 1$ elementos de (A_r) tienen intersección no vacía, y cada C_r corta a un solo elemento de (A_r).

Sea φ una función real definida en R^n de clase $\mathcal{C}^\infty$ estrictamente positiva en $\mathring{I}$ y nula en $R^n \sim \mathring{I}$. Si definimos

$$\mu_r = \frac{(\varphi \circ \varphi_r^{-1})(x)}{\sum_{j=1}^{\infty} (\varphi \circ \varphi_j^{-1})(x)}, \quad x \in \Omega,$$

se tiene que (μ_r) es una partición de la unidad en Ω de clase $\mathcal{C}^\infty$. El siguiente resultado puede ser encontrado en [16]: (e) Sean p y m dos enteros positivos tales que 2^{-p} es la longitud de la arista de un término de (B_r). Si la arista de B_m tiene una longitud menor que 2^{-p} entonces la distancia de B_m a $R^n \sim \Omega$ es menor o igual que $\dfrac{\sqrt{n}}{2^{k(m)-2}}$.

Sea E un espacio. $\mathcal{B}(R^n, E)$ viene definido en [13] como el espacio vectorial de los elementos de $\mathcal{E}(R^n, E)$ tales que para cada multi-índice α y para cada seminorma continua q de E se cumple que

$$\sup \{ q(D^\alpha f(x)) / x \in R^n \}$$

es finito. Sea Ω un abierto de R^n. Definimos $\mathcal{B}_0(\Omega, E)$ como el espacio vectorial de todos los elementos de $\mathcal{E}(\Omega, E)$ tales que para cada $\varepsilon > 0$, α multi-índice y q seminorma continua en E existe $K \subset \Omega$ un compacto tal que si $x \notin K$ entonces $q(D^\alpha f(x)) < \varepsilon$. Se le dota de la topología definida por las seminormas

$$Q(q, \alpha)(f) = \sup \{ q(D^\alpha f(x)) / x \in \Omega \},$$

donde α es un multi-índice y q una seminorma continua en E. Definimos $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$ como el espacio vectorial de los elementos de $\mathcal{B}(R^n, E)$ nulos así como todas sus derivadas parciales en $R^n \sim \Omega$. Le dotamos de la topología definida por las seminormas

$$Q(q, \alpha)(f) = \sup_{x \in \Omega} q(D^\alpha f(x)).$$

Si $\Omega = R^n$ $\mathcal{B}_1(\Omega, E) = \mathcal{B}(R^n, E)$. El espacio $\mathcal{B}_1(\Omega)$ fue definido por Dierolf y estudiado por Dierolf y Voigt. (Véase [5] y [6].)

LEMA 1.—Sea $f \in \mathcal{B}_0(\Omega, E)$. Sea $\tilde{f}$ la función definida en R^n con valores en E que coincida con f en Ω anulándose en $R^n \sim \Omega$. Entonces $\tilde{f} \in \mathcal{B}_1(\Omega, E)$. Y en este sentido identificaremos $\mathcal{B}_0(\Omega, E)$ como un subespacio de $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$.

DEMOSTRACIÓN.—Basta probar que $\tilde{f} \in \mathcal{E}(R^n, E)$. Supondremos $\Omega \neq R^n$. Obviamente si para cada α extendemos $D^\alpha f$ a todo R^n dándole el valor 0 en $R^n \sim \Omega$, la nueva función $\widetilde{D^\alpha f}$ es continua. Elegimos $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea x_0 un punto de la frontera de Ω. El lema se sigue si demostramos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tilde{f}(x_0 + h e_i) - \tilde{f}(x_0)}{h} = 0.$$

Dado $x_0 + h e_i \in \Omega$ determinamos x_1 en $\partial\Omega$ tal que $|x_0 + h e_i - x_1|$ coincide con la distancia de $x_0 + h e_i$ a $R^n \sim \Omega$. Obviamente el segmento

$$[x_0 + h e_i, x_1[\subset \Omega \quad \text{y} \quad |x_0 + h e_i - x_1| \leq |h|.$$

Sea $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\varphi(t) = (1 - t) x_1 + t (x_0 + h e_i).$$

Denotando por φ_j sus funciones coordenadas se tiene que

$$u(f(x_0 + h e_i)) = (u \circ \tilde{f} \circ \varphi)(1) - (u \circ \tilde{f} \circ \varphi)(0) = \int_0^1 (u \circ \tilde{f} \circ \varphi)'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 u \left[\sum_{j=1}^{n} \widetilde{\widehat{D_j f}}(\varphi(t))\, \varphi'_j(t) \right] dt$$

para cada $u \in E'$, luego

$$f(x_0 + h e_i) = \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^{n} \widetilde{\widehat{D_j f}}(\varphi(t))\, \varphi'_j(t) \right] dt$$

y si q es una seminorma continua en E entonces

$$q(f(x_0 + h e_i)) \leq n\, |x_0 + h e_i - x_1| \sup_{j = 1 - n} \sup_{t \in [0, 1]} q(\widetilde{\widehat{D_j f}}(\varphi(t))),$$

por tanto

$$q\left(\frac{f(x_0 + h e_i)}{h}\right) \leq n \sup_{j = 1 - n} \sup_{t \in [0, 1]} q(\widetilde{\widehat{D_j f}}(\varphi(t))).$$

De donde se sigue lo pedido.

Sea (ρ_r) una sucesión de números reales positivos. (Por ejemplo las longitudes de las aristas de los cubos (B_r) del recubrimiento del abierto Ω construido previamente.) Si E es un espacio se define:

$$\lambda_0(E) = \{(x_r) \subset E \,/\, \lim_{r \to \infty} \rho_r^{-k} q(x_r) = 0$$

para cada $k \in N \cup \{0\}$ y cada seminorma continua q en E}.

$$\lambda_\infty(E) = \{(x_r) \subset E \,/\, \sup_r \rho_r^{-k} q(x_r) < +\infty$$

para cada $k \in N \cup \{0\}$ y cada seminorma continua q en E}.

Se dota a dichos espacios de la topología definida por las seminormas

$$Q(k, q)((x_r)) = \sup_r \rho_r^{-k} q(x_r).$$

En [3] son estudiados estos espacios en un contexto mucho más general.

La demostración del siguiente lema se obtiene directamente a partir de las definiciones y será omitida.

Lema 2.—Si E es un espacio entonces

$$\lambda_0(s(E)) \simeq s(\lambda_0(E)) \quad \text{y} \quad \lambda_\infty(s(E)) \simeq s(\lambda_\infty(E)).$$

1. Representación de los espacios $\mathcal{B}_0(\Omega, E)$ y $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$

Sea Ω un abierto de R^n y sea (ρ_r) la sucesión de longitudes de las aristas de los cubos (B_r) definidos anteriormente. Consideraremos los espacios λ_0 y λ_∞ asociados a esta sucesión.

Si $f \in \mathcal{B}_1(\Omega, E)$ definimos $f_r\colon I \longrightarrow E$ tal que $f_r(x) = f(\varphi_r(x))$ para cada $x \in I$. Obviamente $f_r \in \mathcal{E}(I, E)$.

Proposición 1.—Si $f \in \mathcal{B}_0(\Omega, E)$ entonces $(f_r) \in \lambda_0(\mathcal{E}(I, E))$ y si $f \in \mathcal{B}_1(\Omega, E)$ entonces $(f_r) \in \lambda_\infty(\mathcal{E}(I, E))$.

Demostración.—a) Si $\Omega = R^n$ el resultado se sigue fácilmente, pues en este caso

$$\lambda_0(\mathcal{E}(I, E)) = c_0(\mathcal{E}(I, E)) \quad \text{y} \quad \lambda_\infty(\mathcal{E}(I, E)) = m(\mathcal{E}(I, E)).$$

Consideremos $\Omega \neq R^n$. Sea α un multi-índice, k un entero no negativo, q una seminorma continua en E y $\varepsilon > 0$. Existe $K_1 \subset \Omega$ un compacto no vacío tal que

$$q(D^\beta D^\alpha f(z)) \leq \frac{1}{n^k}\left(\frac{1}{16\sqrt{n}}\right)^k \varepsilon$$

para cada multi-índice β tal que $|\beta| = k$ y para cada $z \in \Omega \sim K_1$. Sea δ la distancia de K_1 a $R^n \sim \Omega$. Existe $p \in N$ tal que 2^{-p} es la longitud de la arista de algún miembro de la sucesión (B_r) y $\sqrt{n}\, 2^{4-p} < \delta$. Sea $K_2 \subset \Omega$ un compacto tal que $K_2 \supset K_1$ y si $z \in \Omega \sim K_2$ entonces $2^{kp} q(D^\alpha f(z)) < \varepsilon$. Existe r_1 tal que si $r \geqslant r_1$ entonces $A_r \cap K_2 = \emptyset$. Sea $r \geqslant r_1$ y $z \in A_r$. Si la arista de B_r tiene longitud mayor o igual que 2^{-p} entonces

$$\rho_r^{-k} q(D^\alpha f_r(\varphi_r^{-1}(z))) = \left(\frac{5}{8}\right)^{|\alpha|} \rho_r^{-k+|\alpha|} q(D^\alpha f(z)) \leq \rho_r^{-k} q(D^\alpha f(z)) \leq$$
$$\leq 2^{kp} q(D^\alpha f(z)) < \varepsilon$$

Por tanto

$$\rho_r^{-k} \sup_{x \in I} q(D^\alpha f_r(x)) \leq \varepsilon.$$

Si ρ_r la longitud de la arista de B_r es menor que 2^{-p} entonces por el resultado (e) la distancia de B_r a $R^n \sim \Omega$ es menor o igual que $\sqrt{n}\, 2^{2-k(r)}$, siendo $\rho_r = 2^{-k(r)}$. Sea $x_0 \in R^n \sim \Omega$ tal que su distancia a B_r es menor que $\sqrt{n}\, 2^{3-k(r)}$. En este caso $|x_0 - z| < \delta$ y el segmento $[x_0, z]$ no corta a K_1. En virtud del lema 1 podemos considerar f extendida a todo R^n tomando el valor 0 fuera de Ω. Sea t la aplicación definida de $[0, 1]$ en R^n mediante $t(w) = x_0 + w(z - x_0)$. Sea $g = D^\alpha f \circ t$. Si $u \in E'$ por la fórmula de Taylor (ver [7], pág. 186) se tiene que

$$u \circ g(1) = (u \circ g)(0) + (u \circ g)'(0) + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}(u \circ g)^{k-1)}(0) +$$
$$+ \int_0^1 \frac{(1-w)^{k-1}}{(k-1)!}(u \circ g)^{(k)}(w)\, dw.$$

Ahora bien $(u \circ g)^{(r)}(0) = 0$ para $r = 1, 2, \ldots, k-1$, y entonces

$$D^\alpha f(z) = g(1) = \int_0^1 \frac{(1-w)^{k-1}}{(k-1)!} g^{(k)}(w)\, dw$$

De donde

$$q(D^\alpha f(z)) \leq n^k \mid z - x_0 \mid^k \sup_{\mid \beta \mid = k} \sup_{w \in [0,1]} q(D^\beta D^\alpha f(x_0 + w(z - x_0)))$$

Como $[x_0, z] \cap K_1 = \varnothing$

$$q(D^\alpha f(z)) \leq \mid z - x_0 \mid^k \left(\frac{1}{16\sqrt{n}}\right)^k \varepsilon$$

Pero por construcción

$$\mid z - x_0 \mid < \sqrt{n}\, 2^{4-k(r)},$$

y de aquí $q(D^\alpha f(z)) \leqslant \rho_r^k \varepsilon$. Luego si $r \geqslant r_1$

$$\rho_r^{-k} \sup_{x \in I} q(D^\alpha f(x)) < \varepsilon.$$

b) El caso en que $f \in \mathcal{B}_1(\Omega, E)$ se sigue del resultado (f): Si α es un multi-índice, q una seminorma continua en E y k un entero no negativo, entonces existe una constante positiva M_0 tal que

$$\rho_r^{-k} \sup_{x \in I} q(D^\alpha f_r(x)) \leq M_0 \sum_{\mid \beta \mid \leq \mid \alpha \mid + k} \sup_{x \in R^n} q(D^\beta f(x)),$$

si $f \in \mathcal{B}_1(\Omega, E)$. Resultado que se prueba de un modo análogo al apartado a) de esta demostración.

Proposición 2.—Si $f \in \mathcal{B}_0(\Omega, E)$ entonces

$$f \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}\right)^{-1} \in \mathcal{B}_0(\Omega, E).$$

Y si $f \in \mathcal{B}_1(\Omega, E)$ entonces la función que coincida con

$$f\left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}\right)^{-1}$$

en Ω valiendo 0 en $R^n \sim \Omega$ es un elemento de $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$.

Demostración.—La descompondremos en varios pasos.

2.1. Veamos en primer lugar que si $f \in \mathcal{B}_1(\Omega, E)$ entonces la función $h: R^n \longrightarrow E$ tal que

$$h(x) = f(x) D^\gamma \sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}(x)$$

para cada $x \in R^n$, donde γ es un multi-índice, es un elemento de $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$. Si $\Omega = R^n$ el resultado es sencillo aplicando la fórmula de Leibnitz. Sea $\Omega \neq R^n$. Comprobemos que si $g \in \mathcal{B}_1(\Omega, E)$, α es un multi-índice y x_0 es un punto de $\partial\Omega$ entonces

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \in \Omega}} g(x) D^\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}(x) = 0 \quad (+).$$

De donde se seguiría que $h \in \mathcal{E}(R^n, E)$ aplicando la fórmula de Leibnitz y un razonamiento similar al usado para probar el lema 1, tomando $g = D^\beta f$. Demostremos $(+)$: Dado $\varepsilon > 0$ y q una seminorma continua en E existe $\delta > 0$ tal que si $|x_0 - y| < \delta$ entonces

$$\sup_{|\beta| \leq |\alpha|} q(D^\beta g(y)) < \varepsilon.$$

Determinamos $p \in N$ tal que 2^{-p} sea la longitud de la arista de algún elemento de la sucesión (B_r) y además $2^{1-p} < \varepsilon$. Sea $x \in \Omega$ tal que $|x - x_0| < 2^{-4-p}$. Sea $r \in N$ tal que $x \in A_r$. Si ρ_r es la longitud de la arista del cubo B_r por construcción $\rho_r < 2^{-p}$. Luego repitiendo el razonamiento de la proposición 1 existe $z_1 \in R^n \sim \Omega$ tal que

$$\rho_r^{-|\alpha|} q(g(x)) \leq \rho_r^{-|\alpha|} n^{|\alpha|} |x - z_1| \sup_{|\beta| \leq |\alpha|} \sup_{w \in [0,1]} q(D^\beta g(z_1 + w(x - z_1))),$$

donde $|x - z_1| \leqslant \sqrt{n}\, 16 \rho_r$. Así pues si

$$K = 4^n \left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|} \sup_{z \in I} |D^\alpha \varphi(z)|$$

entonces

$$q\left(g(x) D^\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}(x)\right) \leq k \max\{\rho_r^{-|\alpha|} / x \in A_r\} q(g(x)) \leq$$

$$\leq M (n^{3/2})^{|\alpha|} 16^{|\alpha|} \sup_{|\beta| \leq |\alpha|} \sup_{w \in [0,1]} q(D^\beta g(z_1 + w(x - z)))$$

Teniendo en cuenta que

$$|z_1 - x_0| \leq |z_1 - x| + |x - x_0| < \sqrt{n}\, 2^{4-k(r)} + 2^{-4-p} < 2^{1-p} < \partial$$

se cumple que

$$q\left(g(x)\, D^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}(x)\right) < C\, \partial,$$

de donde se deduce lo pedido. Por otra parte, utilizando el resultado (f) obtenido en la proposición 1 se concluye con facilidad que

$$\sup_{x \in \Omega} q\left(\left(g\, D^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}\right)(x)\right) \leq$$

$$\leq M_0\, 4^n \left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|} \sup_{x \in I} |D^{\alpha} \varphi(x)| \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \sup_{x \in R^n} q(D^{\beta} g(x)).$$

y de aquí $h \in \mathcal{B}_1(\Omega, E)$.

2.2. Sea ahora $f \in \mathcal{B}_0(\Omega, E)$. Sea $h: \Omega \longrightarrow E$ tal que

$$h(x) = f(x)\, D^{\gamma} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}(x).$$

Se cumple que $h \in \mathcal{B}_0(\Omega, E)$. Basta demostrar que si α es un multiíndice, q una seminorma continua en E y $\varepsilon > 0$ existe $K \subset \Omega$ un compacto tal que si $x \in \Omega \sim K$ entonces

$$q\left(f(x)\, D^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}(x)\right) < \varepsilon.$$

Ahora bien, por la proposición 1 existe $r_0 \in N$ tal que si $r \geqslant r_0$ entonces

$$\left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|} 4^n \sup_{x \in I} |D^{\alpha} \varphi(x)|\, \rho_r^{-|\alpha|} \sup_{x \in I} q(g_r(x)) < \varepsilon.$$

Cualquier compacto K tal que $A_r \subset K$ si $r < r_0$ satisface la condición deseada.

2.3. Obviamente existe $b > 0$ tal que $\inf \{\varphi(x) / x \in L\} = b$. Así pues

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}\right)(x) \geq b$$

para cada $x \in \Omega$. Si β es un multi-índice en Ω la función

$$D^\beta \left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}}\right)$$

se expresa como un cociente cuyo numerador es una combinación lineal de elementos de la forma

$$D^\gamma \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}\right) \ldots D^\mu \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}\right)$$

y el denominador es una potencia entera positiva k de $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}$. Entonces si α es otro multi-índice la función

$$D^\alpha f D^\beta \left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}}\right)$$

puede extenderse a todo R^n tomando el valor 0 en $R^n \sim \Omega$ y es un elemento de $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$ ya que

$$D^\alpha f D^\gamma \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}\right) \ldots D^\mu \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}\right)$$

tiene extensión en $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$ en virtud de 2.1 y

$$\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}}\right)^k$$

es una función continua y acotada. De aquí se sigue que la función que coincida con

$$f \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}\right)^{-1}$$

en Ω anulándose en $R^n \sim \Omega$ es un elemento de $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$.

2.4. Para probar que si $f \in \mathcal{B}_0 (\Omega, E)$ entonces

$$\frac{f}{\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}}$$

es un elemento de $\mathcal{B}_0 (\Omega, E)$ se razona de manera análoga a 2.3 utilizando 2.2.

PROPOSICIÓN 3.—3.1. $\mathcal{B}_1 (\Omega, E)$ es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de $\lambda_\infty (\mathcal{D} (I, E))$.

3.2. $\mathcal{B}_0 (\Omega, E)$ es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de $\lambda_0 (\mathcal{D} (I, E))$.

DEMOSTRACIÓN.—3.1. Si $(f_r) \in \lambda_\infty (\mathcal{D} (I, E))$ consideramos la función $\sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1}$. Dicha función es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en Ω y si $x \in \Omega$ entonces

$$D^\alpha \left(\sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1} \right) (x) = \left(\frac{8}{5} \right)^{|\alpha|} \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-|\alpha|} D^\alpha f_r (\varphi_r^{-1} (x))$$

para cada multi-índice α. Un proceso análogo al utilizado en prueba de la proposición 2 demuestra que, en el caso $\Omega \neq R^n$, si x_0 es un punto $\partial \Omega$ entonces

$$D^\alpha \left(\sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1} \right) (x)$$

tiende a 0 cuando $x \in \Omega$ tiende a x_0. Por tanto

$$\sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1} \in \mathcal{E} (\mathbb{R}^n, E).$$

Además si α es un multi-índice y q una seminorma continua en E

$$\sup_{z \in \Omega} q \left(D^\alpha \left(\sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1} \right) (z) \right) \leq 4^n \left(\frac{8}{5} \right)^{|\alpha|} \sup_r \rho_r^{-|\alpha|} \sup_{x \in I} q (D^\alpha f_r (x))$$

y la función considerada pertenece a $\mathcal{B}_1 (\Omega, E)$. Por tanto el operador T: $\lambda_\infty (\mathcal{D} (I. E)) \longrightarrow \mathcal{B}_1 (\Omega, E)$ tal que

$$T((f_r)) = \sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1}$$

es lineal y continuo.

Sea ahora $f \in \mathcal{B}_1 (\Omega, E)$. Si $r \in N$ definimos $h_r = (f \mu_r) \circ \varphi_r$. Si denotamos por g a

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}\right)^{-1}$$

se cumple que $h_r = ((f g) \circ \varphi_r) \times \varphi$. Por la proposición 2 $f g \in \mathcal{B}_1 (\Omega, E)$ y entonces por la proposición 1 $(h_r) \in \lambda_\infty (\mathcal{D} (I, E))$. Definiendo S: $\mathcal{B}_1 (\Omega, E) \longrightarrow \lambda_\infty (\mathcal{D} (I, E))$ mediante $S(f) = (h_r)$ se tiene que S es un operador lineal, inyectivo y continuo en virtud del resultado (f). Además se comprueba fácilmente que $T \circ S$ coincide con la identidad sobre $\mathcal{B}_1 (\Omega, E)$. La prueba concluye aplicando el resultado (a).

3.2. Se procede análogamente tomando las restricciones de T y S a los espacios $\lambda_0 (\mathcal{D} (I, E))$ y $\mathcal{B}_0 (\Omega, E)$ respectivamente.

Proposición 4.—4.1. $\lambda_\infty (\mathcal{E} (J, E))$ es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{B}_1 (\Omega, E)$.

4.2. $\lambda_0 (\mathcal{E} (J, E))$ es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{B}_0 (\Omega, E)$.

Demostración.—4.1. En virtud del resultado (c) existe X: $\mathcal{E} (J, E) \longrightarrow \mathcal{D} (I, E)$ un operador lineal y continuo tal que si $f \in \mathcal{E} (J, E)$ entonces $X f$ coincide con f en J. Sea Y: $\lambda_\infty (\mathcal{E} (J, E)) \longrightarrow$ $\longrightarrow \lambda_\infty (\mathcal{D} (I, E))$ tal que $Y((f_r)) = (X(f_r))$ que es un isomorfismo sobre su imagen. Definimos el operador Z: $\mathcal{B}_1 (\Omega, E) \longrightarrow \lambda_\infty (\mathcal{E} (J, E))$ tal que si $f \in \mathcal{B}_1 (\Omega, E)$ entonces

$$Z(f) = ((Zf)_r)_{r=1}^{\infty},$$

donde $(Z f)_r (x) = f(\varphi_r (x))$ para cada $x \in J$. $Z(f) \in \lambda_\infty (\mathcal{E} (J, E))$ en virtud de la proposición 1 y Z es una aplicación lineal y continua en virtud del resultado (f). Además si T es el operador definido en la prueba de la proposición anterior entonces $Z \circ (T \circ Y)$ coincide con la identidad sobre $\lambda_\infty (\mathcal{E} (J, E))$. De donde $T \circ Y$ es un operador de $\lambda_\infty(\mathcal{E}(J, E))$ en $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$ lineal continuo e inyectivo, y la conclusión se sigue del resultado (a).

4.2. Se razona análogamente usando las restricciones de Y y Z a $\lambda_0(\mathcal{E}(J, E))$ y $\mathcal{B}_0(\Omega, E)$ respectivamente.

Teorema 1.—Si E es un espacio localmente completo entonces

$$\mathcal{B}_1(\Omega, E) \simeq \lambda_\infty(s(E)) \quad y \quad \mathcal{B}_0(\Omega, E) \simeq \lambda_0(s(E)).$$

Demostración.—Se sigue de las proposiciones 3 y 4, aplicando el lema 2 y los resultados (b) y (d).

En [4] se prueba que si E es un espacio con la propiedad de aproximación (ver [10], pág. 232 para las definiciones), entonces $s(E)$ tiene la propiedad de aproximación. Además en [3] se ha obtenido que si E es un espacio con la propiedad de aproximación entonces $\lambda_0(E)$ también la satisface. Entonces se cumple el siguiente

Teorema 2.—Si E es un espacio localmente completo con la propiedad de aproximación entonces $\mathcal{B}_0(\Omega, E)$ también la satisface.

2. Algunos casos particulares

Sea Ω un subconjunto abierto de R^n y sea (ρ_r) la sucesión de longitudes de las aristas de los cubos B_r determinados anteriormente. Sabemos $0 < \rho_r \leqslant 1$ y $\rho_r = 2^{-k(r)}$ con $k(r) \in N \cup \{0\}$. Sea E un espacio. Consideramos en adelante los espacios λ_∞ y λ_0 asociados a (ρ_r).

Los siguientes resultados han sido obtenidos por Valdivia para el caso escalar en [17].

Proposición 5.—5.1. $\lambda_\infty(s(E))$ es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de $m(s(E))$.

5.2. $\lambda_0(s(E))$ es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de $c_0(s(E))$.

Demostración.—Probemos 5.2. Dado $(X^r)_{r=1}^\infty \in c_0(s(E))$ definimos $Y^r = (y^r_n)_{n=1}^\infty$ tal que $y^r_n = x^r{}_{\rho_r^{-1}n}$. Obviamente $Y^r \in s(E)$ y si además $m \in N \cup \{0\}$ y q es una seminorma continua en E entonces

$$\sup_n n^m q(y_n{}^r) \leq \sup_p p^m q(x_p{}^r)$$

para cada $r \in N$. Veamos que $(Y^r)_{r=1}^{\infty} \in \lambda_0(s(E))$. Sea para ello $k, m \in N \cup \{0\}$, $\varepsilon > 0$ y q una seminorma continua en E. Existe $r_0 \in N$ tal que si $r \geqslant r_0$

$$\sup_p p^{m+k} q(x_p^r) < \varepsilon .$$

Ahora bien:

$$\rho_r^{-k} \sup_n n^m q(y_n^r) \leqq \sup_n (n \rho_r^{-1})^{(m+k)} q(x^r_{\rho_r^{-1} n}) \leqq \sup_p p^{m+k} q(x^r_p) < \varepsilon$$

De donde la aplicación $Z_1: c_0(s(E)) \longrightarrow \lambda_0(s(E))$ tal que $Z_1((X^r)) = (Y^r)$ es lineal y continua.

Dado ahora $(X^r)_{r=1}^{\infty} \in \lambda_0(s(E))$ definimos $(Y^r)_{r=1}^{\infty}$ tal que $Y^r = (y^r_n)_{r=1}^{\infty}$, donde $y^r_n = 0$ si n no es múltiplo de ρ_n^{-1} y $y^r_n = x^r_p$, si $n = \rho_r^{-1} p$. Aplicando la definición si $m \in N \cup \{0\}$ y q es una seminorma continua en E entonces se cumple que

$$\sup_n n^m q(y_n^r) \leq (\rho_r^{-1})^m \sup_p p^m q(x_p^r)$$

para cada $r \in N$ y por tanto $Y^r \in s(E)$ para cada $r \in N$. Además $(Y^r)_{r=1}^{\infty} \in c_0(s(E))$. En efecto: Sea $m \in N \cup \{0\}$, $\varepsilon > 0$ y q una seminorma continua en E. Existe $r_0 \in N$ tal que si $r \geqslant r_0$ entonces

$$(\rho_r^{-1})^m \sup p^m q(x_p^r) < \varepsilon .$$

Ahora bien, si $r \geqslant r_0$ se tiene que

$$\sup_n n^m q(y_n^r) < \varepsilon .$$

Definiendo $U_1: \lambda_0(s(E)) \longrightarrow c_0(s(E))$ mediante $U_1((X^r)) = (Y^r)$ se cumple que U_1 es lineal, inyectiva y continua. Como $Z_1 \circ U_1$ coincide con la identidad sobre $\lambda_0(s(E))$ se obtiene la conclusión en virtud del resultado (a).

Sea t la función definida en R^n tal que si $\Omega = R^n$ $t(x) = \infty$, para cada $x \in R^n$, y si

$$\Omega \neq R^n \quad t(x) = \min \{ | x - y | / y \in R^n \sim \Omega \}.$$

Se dice que un abierto es casi-acotado si para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{x \in R^n \,/\, t(x) \geqslant \varepsilon\}$ es compacto. Es fácil comprobar que Ω es casi-acotado si y sólo si $\lim_{r \to \infty} \rho_r = 0$. Entonces si Ω no es casi-acotado existe una subsucesión (ρ_{r_j}) tal que

$$\rho_{r_1} = \rho_{r_2} = \ldots = \rho_{r_j} = \ldots$$

Y de aquí $\lambda_0(s(E))$ y $\lambda_\infty(s(E))$ tienen un subespacio complementado topológicamente isomorfo a $c_0(s(E))$ y $m(s(E))$ respectivamente. Aplicando pues el resultado (d), el lema 2 y la proposición 5 obtenemos el siguiente

TEOREMA 3.—Si Ω es un abierto no casi-acotado y E es un espacio localmente completo entonces

$$\mathcal{B}_0(\Omega, E) \simeq c_0(s(E)) \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_1(\Omega, E) \simeq m(s(E)).$$

NOTA.—En particular si $\Omega = R^n$ se obtiene que

$$\mathcal{B}_0(R^n, E) \simeq c_0(s(E)) \quad \text{y} \quad \mathcal{B}(R^n, E) \simeq m(s(E)),$$

resultados incluidos en [1].

Valdivia ha probado en [16] que el espacio $\mathcal{B}_0(\Omega)$ es nuclear si y sólo si existe $t \in N$ tal que $\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^t < +\infty$. Diremos que un abierto Ω de R^n cumple la propiedad (N) si satisface esta condición.

Si Ω es un abierto con la propiedad (N) existen a lo sumo un número finito de términos repetidos en la sucesión (ρ_r). Así pues, mediante una reordenación podemos suponer que (ρ_r) es una sucesión decreciente. Por tanto $\lim_{r \to \infty} r \rho_r^t = 0$, ya que la serie $\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^t$ es convergente.

TEOREMA 4.—Si Ω es un abierto de R^n con la propiedad (N) y E es un espacio localmente completo, entonces $\mathcal{B}_0(\Omega, E) \simeq s(E)$.

DEMOSTRACIÓN.—En virtud de los comentarios anteriores podemos suponer que la sucesión (ρ_r) satisface la condición $\lim_{r \to} r \rho_r^t = 0$ para algún $t \in N$. Como la representación obtenida en el apartado anterior no depende de la ordenación de la sucesión (ρ_r) entonces $\mathcal{B}_0(\Omega, E) \simeq \lambda_0(s(E)$. Este espacio tiene obviamente un subespacio complementado topológicamente isomorfo a $s(E)$. Probemos que $\lambda_0(s(E))$ es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de $s(s(E))$. Denotemos para ello mediante J la inyección continua natural de $s(s(E))$ en $c_0(s(E))$. Si Z_1 es el operador definido en la prueba de la proposición 5, entonces

$$Z_2 = Z_1 \circ J : s(s(E)) \longrightarrow \lambda_0(s(E))$$

es un operador lineal y continuo. Sea ahora $(X^r)_{r=1}^{\infty} \in \lambda_0(s(E))$, definimos $Y^r = (y^r_n)_{n=1}^{\infty}$ del siguiente modo: $y^r_n = 0$ si n no es múltiplo de ρ_r^{-1} y $y^r_n = x^r_p$ si $p = \rho_r^{-1} n$. Se tiene que si $m \in N \cup \{0\}$ y q es una seminorma continua en E entonces

$$\sup_n n^m q(y_n^r) \leq (\rho_r^{-1})^m \sup_p p^m q(x_p^r).$$

Como $\lim\limits_{r \to \infty} r \rho_r^t = 0$ entonces existe $r_0 \in N$ tal que si $r \geqslant r_0$ entonces $r < \rho_r^{-t}$. Dados pues $k, m \in N \cup \{0\}$ y q una seminorma continua en E se cumple que si $r \geqslant r_0$ entonces

$$r^k \sup_n n^m q(y_n^r) = \rho_r^{-(tk+m)} \sup_p p^m q(x_p^r);$$

y si $r < r_0$, teniendo en cuenta que $r \leqslant \rho_{r_0}^{-t}$ se cumple que

$$r^k \sup_n n^m q(y_n^r) \leq \rho_{r_0}^{-t} \rho_r^{-(tk+m)} \sup_p p^m q(x_p^r).$$

De donde $(Y^r)_{r=1}^{\infty} \in s(s(E))$ y la aplicación $U_2 : \lambda_0(s(E)) \longrightarrow s(s(E))$ tal que $U_2((X^r)) = (Y^r)$ es lineal, continua e inyectiva, satisfaciendo además que $Z_2 \circ U_2$ coincide con la identidad sobre $\lambda_0(s(E))$. Como $s(s(E))$ es isomorfo a $s(E)$ la conclusión se sigue del resultado (a).

Si K es un subconjunto compacto de R^n con interior no vacío y E es un espacio, es fácil comprobar que $\mathcal{D}(K, E) = \mathcal{B}_0(\overset{\circ}{K}, E)$. Además $\overset{\circ}{K}$ es un abierto que satisface la propiedad (N). Luego:

Teorema 5.—Si E es un espacio localmente completo y K es un subconjunto compacto de R^n con interior no vacío entonces $\mathcal{D}(K, E) \simeq s(E)$.

Sea V una variedad diferenciable de clase $\mathcal{C}^\infty$ de dimensión n, con $n \in N$. Sea $\{(U_j, \varphi_j) / j \in J\}$ un atlas en V. Dado un espacio E consideramos $\mathcal{E}$ (V, E) el espacio de todas las aplicaciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ de V en E, dotado de la topología localmente convexa tal que una red $(f_\partial : \partial \in D)$ converge a 0 si y sólo si para cada carta (U_j, φ_j) se cumple que la red $(f_\partial \circ \varphi_j^{-1} : \partial \in D)$ converge a 0 en $\mathcal{E}(\varphi_j(U_j), E)$. Si K es un compacto en V con interior no vacío, $\mathcal{D}$ (K, E) es el subespacio vectorial de todos los elementos de $\mathcal{E}$ (V, E) cuyo soporte esté incluido en K, dotado con la topología inducida.

Ligeras modificaciones en los métodos utilizados en [15] permiten, utilizando el teorema 5, dar el siguiente

TEOREMA 6.—Sea K un compacto con interior no vacío incluido en una variedad diferenciable de clase $\mathcal{C}^\infty$ de dimensión n. Sea E un espacio localmente completo. Entonces $\mathcal{D}$ (K, E) $\simeq s$ (E).

Bibliografía

[1] BONET, J. (1980). Representaciones de espacios de funciones con valores vectoriales. Memoria presentada para optar al grado de Doctor. Valencia.

[2] BONET, J. Representaciones de los espacios O_M (E) y $\mathcal{D}_{L^p}$ (E). Pendiente de publicación.

[3] CRESPO, R. (1980). Espacios semi-escalonados con valores vectoriales. Memoria presentada para optar al grado de Doctor. Valencia.

[4] DE GRANDE DE KIMPE. (1971). Continuous linear mappings between generalized sequence spaces. *Pro. Kon. Ned. v Wet.* **A 74 (4)**, 301-309.

[5] DIEROLF, P. (1979). L'espace $\mathring{\mathcal{B}}(\Omega)$ et les distributions sommables. *C. R. Acad. Sci. Paris,* **288**, 197-199.

[6] DIEROLF, P. y VOIGT, J. Calculation of the bidual for some function spaces. Integrable distributions. Preprint.

[7] DIEUDONNÉ, J. (1966). Fundamentos de análisis moderno. Ed. Reverté.

[8] HORVATH, J. (1966). Topological vector spaces and distributions I. Addison-Wesley Publ. Comp. Reading Massachusetts.

[9] JAMESON, G. J. O. (1974). Topology and normed spaces. Chapman and Hall. London.

[10] KOTHE, G. (1980). Topological vector spaces II. Springer.

[11] RUDIN, W. (1973). Functional Analysis. Mc Grawn-Hill Book Comp. New York.

[12] SCHWARTZ, L. (1978). Théorie des distributions. Hermann, Paris.

[13] SCHWARTZ, L. (1954/55). Espaces de functions différentiables à valeurs vectorielles. *J. Analyse Math.*, **4**, 88-148.

[14] VALDIVIA, M. (1978). Representaciones de los espacios $\mathscr{D}(\Omega)$ y $\mathscr{D}'(\Omega)$. *Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*. Madrid, **72**, 385-414.

[15] VALDIVIA, M. (1980). A representation of the space $\mathscr{D}(K)$. *J. für die reine und angew. Math.*, **320** 97-98.

[16] VALDIVIA, M. Sobre el espacio $\mathscr{B}_0(\Omega)$. Pendiente de publicación en la *Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid.*

[17] VALDIVIA, M. Topics in locally convex spaces. Pendiente de publicación en la Editorial North Holland.