GRUPOS DUALES DE HOMOTOPIA DE GRUPOS ABELIANOS

Luis Javier Hernández Paricio

Recibido: 3 junio 1981

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

In the abelian groups, we consider the homotopy theory induced by a ring R with a unity element. In this context, we define the homotopy dual groups and we prove that the sequence of homotopy dual groups associated to a homomorphism or to a cofibration is exact.

En los grupos abelianos, respecto a la teoría de homotopía inducida por un anillo con unidad R, definimos los grupos duales de homotopía y probamos la exactitud de las sucesiones asociadas a un homomorfismo y a una cofibración.

Introducción

En la categoría de los grupos abelianos $A\,b$, para un anillo con unidad R en [6] hemos introducido una teoría de homotopía, así como los grupos de homotopía. Como estamos en una categoría abeliana para dar la relación de homotopía nos basta con dar los homomorfismos nulohomótopos, esto lo hacemos a través de un functor cono, afortunadamente en este caso este functor tiene adjunto a derecha, el functor arcos y todos los resultados son dualizables.

En este trabajo dualizamos los grupos de homotopía, definiendo los grupos duales de homotopía de un grupo abeliano A, o bien de un homomorfismo, estudiamos la sucesión exacta de los grupos duales de homotopía asociados a un homomorfismo, ésta se obtiene aplicando el functor σ_0 a la sucesión de Puppe, así como la sucesión exacta de los grupos duales de homotopía asociados a una cofibración.

Aquí definimos $\sigma_0 (X) = Ker\ i_X$, siendo $i_X : X \longrightarrow C X$ la transformación natural que compara el functor identidad con el functor cono, observemos que en los espacios punteados i_X es inyectiva con lo cual los grupos duales de homotopía son todos nulos.

Todas las referencias en las que no se indica nada más corresponden a [6]. Denotaremos *A b (2)* la categoría de los pares.

A continuación recordamos algunos resultados de [6] en los que nos apoyamos para la realización de este trabajo:

Sea $A \xrightarrow{g} X \xrightarrow{p} C$ en $A\,b$, diremos que p es cofibra homotópica de g, si para cada grupo abeliano Z la siguiente sucesión es exacta:

$$[C, Z] \xrightarrow{p^*} [X, Z] \xrightarrow{g^*} [A, Z]$$

Vemos cómo todo homomorfismo tiene una cofibra homotópica asociada.

III-(2.8) Proposición.—Sea g: $A \longrightarrow X$ homomorfismo de grupos abelianos y consideremos el siguiente cuadrado cocartesiano:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle g_1} \\ A \otimes R & \xrightarrow{r} & C_g \end{array}$$

Entonces g_1 es cofibra homotópica de g. Diremos que es la cofibra homotópica canónica.

Por tanto a cada homomorfismo g le podemos asociar la siguiente sucesión de cofibras homotópicas consecutivas:

$$A \xrightarrow{g} X \xrightarrow{g_1} C_g \xrightarrow{g_2} C_{g_1} \longrightarrow \cdots$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que el conúcleo de una cofibración es del mismo tipo de homotopía que su cofibra homotópica, podemos construir la siguiente sucesión que llamaremos de Puppe.

$$A \xrightarrow{g} X \xrightarrow{g_1} C_g \xrightarrow{\rho_1} S\,A \xrightarrow{Sg} S\,X \xrightarrow{Sg_1} S\,C_g \longrightarrow \dots$$

Y probamos el siguiente teorema:

III-(2.16) TEOREMA.—Sea g: $A \longrightarrow X$ homomorfismo:

i) La sucesión canónica de cofibras homotópicas consecutivas asociada a g es h-equivalente a la sucesión de Puppe asociada a g.

ii) Si además g es una cofibración la sucesión de Puppe es h-equivalente a la siguiente sucesión:

$$A \xrightarrow{g} X \xrightarrow{\rho} C \xrightarrow{\nabla} S\,A \xrightarrow{Sg} S\,X \xrightarrow{S\rho} S\,C \longrightarrow \dots$$

Siendo ρ: $X \longrightarrow C$ el conúcleo de g y $\nabla = \rho_1 \bar{k}$, $\bar{k}$ es la inversa homotópica de k: $C_g \longrightarrow C$:

$$k\,\pi\,(x + \Sigma\, a_i \otimes r_i) = \rho\,(x)$$

y ρ_1: $C_g \longrightarrow S\,A$:

$$\rho_1\,\pi\,(x + \Sigma\, a_i \otimes r_i) = \Sigma\, a_i \otimes p\,(r_i)$$

Diremos que ésta es la sucesión de cofibras homotópicas asociada a una cofibración g.

III-(2.17) PROPOSICIÓN. — Consideremos el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A^0 \arrow[r, "g^0"] \arrow[d, "\alpha"] & X^0 \arrow[d, "\beta"] \\ A^1 \arrow[r, "g^1"] & X^1 \end{tikzcd}$$

Entonces:

i) α y β inducen de modo natural el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A^0 \arrow[r, "g^0"] \arrow[d, "\alpha"] & X^0 \arrow[r, "g^0_1"] \arrow[d, "\beta"] & C_{g^0} \arrow[r, "\rho^0_1"] \arrow[d, "l"] & S\,A^0 \arrow[r, "S\,g^0"] \arrow[d, "S\,\alpha"] & S\,X^0 \arrow[r, "S\,g^0_1"] \arrow[d, "S\,\beta"] & S\,C_{g^0} \arrow[r] \arrow[d, "S\,l"] & \dots \\
A^1 \arrow[r, "g^1"] & X^1 \arrow[r, "g^1_1"] & C_{g^1} \arrow[r, "\rho^1_1"] & S\,A^1 \arrow[r, "S\,g^1"] & S\,X^1 \arrow[r, "S\,g^1_1"] & S\,C_{g^1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Siendo

$$l = g^1_1\, \beta \vee r^1\, (i \otimes 1_R)\,.$$

ii) Si además g^0 y g^1 son cofibraciones, α y β inducen de modo natural un homomorfismo entre las sucesiones de cofibras homotópicas asociadas a g^0 y a g^1 (salvo homotopía).

III-(2.18) Teorema.—En el siguiente cuadrado cocartesiano, supongamos que i es una cofibración y g^0 un epimorfismo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g^0"] \arrow[d, "i"] & A' \arrow[d, "i'"] \\
X \arrow[r, "g^1"] & X'
\end{tikzcd}$$

Entonces C_{g^0} es un retracto por deformación fuerte de C_{g^1} a través de

$$l = g^1_1\, i' \vee r_1\, (i \otimes 1_R)\,.$$

Grupos duales de homotopía de grupos abelianos

Sea R un anillo con unidad, y consideremos los functores

$$- \otimes -\,, \quad - \otimes - \otimes R : Ab \times Ab \longrightarrow Ab\,.$$

así como la transformación natural

$$i : - \otimes - \longrightarrow - \otimes - \otimes R : i_{AB} : A \otimes B \longrightarrow A \otimes B \otimes R :$$
$$i_{AB}\,(x) = x \otimes 1\,,$$

apoyándonos en esta transformación natural definimos los grupos duales de homotopía.

1. DEFINICIÓN.—Sean A, B $\in$ | *A b* |, definimos

$$\sigma_0^A(B) = Ker\ i_{AB} \quad \text{y} \quad \sigma_n^A(B) = \sigma_0^A(B \otimes S^n)$$

siendo $S^n = \otimes^n S$, $\otimes^0 S = \mathbb{Z}$ (notemos que $B \otimes \mathbb{Z} \cong B$). Si $A = \mathbb{Z}$, denotaremos $\sigma_n^{\mathbb{Z}}(B) = \sigma_n(B)$ y diremos que es el n-ésimo grupo dual de homotopía.

2. PROPOSICIÓN.—$\sigma_n^-(—)$ es un functor del tipo $Ab \times Ab \longrightarrow Ab$, $\sigma_n^A(—)$, $\sigma_n^-(B)$ son del tipo $Ab \longrightarrow Ab$, aditivos e invariantes por homotopía.

DEMOSTRACIÓN.—No tiene dificultad.

3. DEFINICIÓN.—Sea $(X \xrightarrow{g} Y) \in |Ab(2)|$ y C_g la cofibra homotópica canónica de g, definimos

$$\sigma_n^A(g) = \sigma_{n-1}^A(C_g)$$

para $n \geqslant 1$, como el n-ésimo grupo dual de homotopía asociado al homomorfismo g.

De que $C: Ab(2) \longrightarrow Ab$ sea functor se sigue que

$$\sigma_n^-(-) : Ab \times Ab(2) \longrightarrow Ab$$

es un functor. Como el functor C es aditivo y transforma contráctiles en contráctiles con la proposición anterior, deducimos que

$$\sigma_n^A(-) : Ab(2) \longrightarrow Ab \quad \text{y} \quad \sigma_n^-(g) : Ab \longrightarrow Ab$$

son aditivos e invariantes por homotopía.

4. OBSERVACIÓN.—Notemos que por definición para $n \geqslant 0$ y $n \geqslant k \geqslant 0$ se verifica que

$$\sigma_n^A(B) = \sigma_{n-k}(S^k B)$$

o bien para $n \geqslant 1$ y $n > k \geqslant 0$

$$\sigma_n^A(g) \cong \sigma_{n-k}^A(S^k g).$$

Recordemos que el functor suspensión S conserva cuadrados cocartesianos, y que salvo isomorfismo el producto tensorial es conmutativo.

5. TEOREMA.—Sea $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ en Ab, de modo que g es cofibra homotópica de f, entonces la siguiente sucesión es exacta:

$$\sigma_n^A(X) \xrightarrow{f_*} \sigma_n^A(Y) \xrightarrow{g_*} \sigma_n^A(Z)$$

DEMOSTRACIÓN.—Lo probaremos primero para la cofibra homotópica canónica de f, $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1} C_f$ (ver III-(2.8)). Veamos que la sucesión:

$$\sigma_n^A(X) \xrightarrow{f_*} \sigma_n^A(Y) \xrightarrow{(f_1)_*} \sigma_n^A(C_g) \quad \text{es exacta.}$$

Como $f_1 f \simeq 0$, por la proposición anterior,

$$0 = (f_1 f)_* = (f_1)_* (f)_*$$

por tanto

$$Im\ f_* \subset Ker\ (f_1)_*$$

Notemos que

$$\sigma_n^A(X) = \sigma_0^A(X \otimes S^n) = \sigma_0(A \otimes X \otimes S^n)$$

Entonces basta que en la sucesión:

$$\sigma_0(A \otimes X \otimes S^n) \xrightarrow{(1 \otimes f \otimes 1)_*} \sigma_0(A \otimes Y \otimes S^n) \xrightarrow{(1 \otimes f_1 \otimes 1)_*} \sigma_0(A \otimes C_f \otimes S^n)$$

veamos que

$$Ker\ (1 \otimes f_1 \otimes 1)_* \subset Im\ (1 \otimes f \otimes 1)_*,$$

recordemos que el functor $A \otimes - \otimes S^n$ transforma cuadrados cocartesianos en cocartesianos, se puede asegurar que en el siguiente diagrama conmutativo θ es isomorfismo (T permuta R y S^n):

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes X\otimes S^n \arrow[rrr, "1\otimes f\otimes 1"] \arrow[dr, "1\otimes i_X\otimes 1"] \arrow[dd, "i_{A\otimes X\otimes S^n}"'] & & & A\otimes Y\otimes S^n \arrow[dr, "1\otimes f_1\otimes 1"] \arrow[dd] & \\
& A\otimes X\otimes R\otimes S^n \arrow[rrr, "\substack{(1\otimes f\otimes 1)_1 \\ 1\otimes r\otimes 1}"] \arrow[dl, "T"'] & & & A\otimes C_f\otimes S^n \arrow[dl, "\theta"'] \\
A\otimes X\otimes S^n\otimes R \arrow[rrr, "r"] & & & C_{1\otimes f\otimes 1} &
\end{tikzcd}
$$

En consecuencia

$$Ker\ (1\otimes f_1\otimes 1)_* = Ker\ ((1\otimes f\otimes 1)_1)_* .$$

Por tanto bastará que probemos para el functor σ_0, que en la sucesión:

$$\sigma_0\,(X) \xrightarrow{f_*} \sigma_0\,(Y) \xrightarrow{(f_1)_*} \sigma_0\,(C_f), \quad Ker\ (f_1)_* \subset Im\ f_*$$

Consideremos el siguiente cuadrado cartesiano:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_X"] \arrow[dr, phantom, "="] & Y \arrow[d, "f_1"] \\
X\otimes R \arrow[r, "r"] & C_f
\end{tikzcd}
$$

Sea $y \in Ker\,(f_1)_*$ $(f_1)_*\,(y) = f_1\,y = 0$, por la construcción del cuadrado anterior, $f_1\,y = p\,j_1\,(y) = p\,(y + 0)$, siendo j_1 la inclusión canónica de Y en $Y \oplus (X \otimes R)$ y p la proyección canónica. Si $p\,(y + 0) = 0$ entonces existe $x \in X$ tal que $f\,x = y$ y $i_X\,(x) = 0$, por tanto

$$x \in Ker\ i_X = \sigma_0\,(X) \quad \text{y} \quad f_*\,(x) = f\,x = y,$$

entonces $Ker\ (f_1)_* \subset Im\,f_*$. Hemos probado el teorema para las cofibras homotópicas canónicas, sea $Y \xrightarrow{g} Z$ otra cofibra homotópica de f, entonces existen los siguientes triángulos conmutativos salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dd, "\bar{f}_1"] \\ Y \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "f_1"'] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \\ & C_f \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z \arrow[dd, "\bar{g}"] \\ Y \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "f_1"'] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \\ & C_f \end{tikzcd}$$

y en la sucesión

$$\sigma_n^A(X) \xrightarrow{f_*} \sigma_n^A(Y) \xrightarrow{g_*} \sigma_n^A(Z) \qquad Ker\, g_* = Ker\,(f_1)_* = Im\, f_*$$

6. Teorema.—Sea $X \xrightarrow{f} Y$ un homomorfismo entonces la siguiente sucesión es exacta, para $n \geqslant 0$

$$\cdots \longrightarrow \sigma_n^A(X) \xrightarrow{f_*} \sigma_n^A(Y) \xrightarrow{(f_1)_*} \sigma_{n+1}^A(f) \xrightarrow{(\rho_1)_*} \sigma_{n+1}^A(X) \longrightarrow \cdots$$

definidos del modo siguiente:

$$f_*(a \otimes x \otimes s) = a \otimes fx \otimes s, \quad (f_1)_*(a \otimes y \otimes s) = a \otimes f_1 y \otimes s,$$
$$(\rho_1)_*\, a \otimes \pi(y + \Sigma x_i \otimes r_i) \otimes s = a \otimes (\Sigma x_i \otimes p(r_i)) \otimes s.$$

A esta sucesión la llamaremos sucesión exacta larga de los grupos duales de homotopía asociada a un homomorfismo f.

Además si el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

para $n \geqslant 0$ el siguiente diagrama también lo es

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & \sigma_n^A(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & \sigma_n^A(Y) \arrow[r, "(f_1)_*"] \arrow[d, "\beta_*"] & \sigma_{n+1}^A(f) \arrow[r, "(\rho_1)_*"] \arrow[d, "(\alpha,\beta)_*"] & \sigma_{n+1}^A(X) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & \dots \\ \dots \arrow[r] & \sigma_n^A(X') \arrow[r, "f'_*"] & \sigma_n^A(Y') \arrow[r, "(f'_1)_*"] & \sigma_{n+1}^A(f') \arrow[r, "(\rho'_1)_*"] & \sigma_{n+1}^A(X') \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Es decir, la sucesión exacta de los grupos duales de homotopía es natural respecto morfismos $(\alpha, \beta): f \longrightarrow f'$.

DEMOSTRACIÓN.—Recordemos que en III-(2.15), hemos probado que la sucesión de Puppe asociada a f es de cofibras homotópicas consecutivas

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1} C_f \xrightarrow{\rho_1} X \otimes S \xrightarrow{f \otimes 1} Y \otimes S \longrightarrow \dots$$

Si le aplicamos el functor σ_0^A, tenemos en cuenta el teorema anterior y las definiciones 1 y 3, obtenemos la sucesión y exactitud deseadas. Para la naturalidad, observemos que la proposición III-(2.17) nos asegura el comportamiento natural de la sucesión de Puppe respecto morfismos $(\alpha, \beta): f \longrightarrow f'$.

En el siguiente teorema vemos cómo en la sucesión exacta de los grupos duales de homotopía, asociada a una cofibración f, podemos sustituir el n-ésimo grupo dual de homotopía de f por el $(n-1)$-ésimo grupo dual de su conúcleo.

7. TEOREMA.—Sea $X \xrightarrow{f} Y$ una cofibración e $Y \xrightarrow{\rho} Z$ su conúcleo entonces para $n \geqslant 0$ la siguiente sucesión es exacta:

$$\dots \longrightarrow \sigma_n^A(X) \xrightarrow{f_*} \sigma_n^A(Y) \xrightarrow{\rho_*} \sigma_n^A(Z) \xrightarrow{\nabla_*} \sigma_{n+1}^A(X) \longrightarrow \dots$$

donde f_* y g_* están definidas de modo natural, ∇ es el morfismo de conexión que aparece en la sucesión de cofibras homotópicas asociadas a una cofibración (ver III-(1.16)).

Además para el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

donde f y f' son cofibraciones con conúcleos $Y \xrightarrow{\rho} Z$ e $Y' \xrightarrow{\rho'} Z'$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \sigma_n^A(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & \sigma_n^A(Y) \arrow[r, "\rho_*"] \arrow[d, "\beta_*"] & \sigma_n^A(Z) \arrow[r, "\nabla_*"] \arrow[d, "\bar\beta_*"] & \sigma_{n+1}^A(X) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \sigma_n^A(X') \arrow[r, "f'_*"] & \sigma_n^A(Y') \arrow[r, "\rho'_*"] & \sigma_n^A(Z') \arrow[r, "\nabla'_*"] & \sigma_{n+1}^A(X') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$\bar\beta$ es la inducida de modo natural por α y β en los conúcleos.

DEMOSTRACIÓN.—El teorema III-(2.15) nos asegura que la sucesión de cofibras homotópicas asociadas a una cofibración f es una sucesión de cofibras homotópicas consecutivas.

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\rho} Z \xrightarrow{\nabla} X \otimes S \xrightarrow{f \otimes 1} Y \otimes S \longrightarrow \cdots$$

Si le aplicamos el functor $\sigma_0{}^A$, tenemos en cuenta el teorema 5 y la definición 1, obtenemos el resultado deseado. La naturalidad es consecuencia de la proposición III-(2.17).

8. COROLARIO.—Sea $X \xrightarrow{\pi} X'$ un epimorfismo y f: $X \longrightarrow Y$ una cofibración, entonces el siguiente cuadrado es cocartesiano:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & X' \arrow[d, "\bar f"] \\
Y \arrow[r, "\bar\pi"] & Y / f\,(Ker\,\pi)
\end{tikzcd}$$

donde $\bar\pi$ es la proyección natural y $\bar f$ es única tal que $\bar f \pi = \bar\pi f$ ya que $\bar\pi f$ se anula sobre $Ker\,\pi$. Además el morfismo $(f, \bar f)$: $\pi \longrightarrow \bar\pi$ induce isomorfismo en los grupos duales de homotopía $(f, \bar f)_*$: $\sigma_n{}^A(\pi) \longrightarrow \sigma_n{}^A(\bar\pi)$ para $n \geqslant 1$.

DEMOSTRACIÓN.—Veamos que el cuadrado anterior es cocartesiano, sean $X' \xrightarrow{r} Z$, $Y \xrightarrow{s} Z$ tal que $r\pi = sf$, sea i: $Ker\,\pi \longrightarrow X$

la inclusión canónica $s f i = r \pi i = 0$, entonces existe un único $\bar{s}$: $Y/f (Ker\, \pi) \longrightarrow Z$ tal que $\bar{s}\,\bar{\pi} = s$, además

$$\bar{s}\,\bar{f}\,\pi = \bar{s}\,\bar{\pi}\,f = s\,f = r\,\pi$$

y π epimorfismo $\bar{s}\,\bar{f} = r$. Si otro s': $Y/f (Ker\, \pi) \longrightarrow Z$ es tal que $s'\,\bar{\pi} = s$ y $s'\,\bar{f} = r$ entonces por la unicidad anterior $s' = \bar{s}$.

Ahora estamos en condiciones de aplicar el teorema III-(2.18) que nos asegura que C_π es un retracto por deformación fuerte de $C_{\bar{\pi}}$, entonces

$$\sigma^A_{n-1}(C_\pi) \cong \sigma^A_{n-1}(C_{\bar{\pi}})$$

o bien

$$\sigma_n^A(\pi) \xrightarrow{(f,\bar{f})_*} \sigma_n^A(\bar{\pi})$$

es un isomorfismo para $n \geqslant 1$.

9. Definición.—Sea $X \in |A\,b|$, $n \geqslant 0$ diremos que X es n-contráctil si $\sigma_k(X) = 0$ para $k \leqslant n$.

Por comodidad de notación vamos a introducir el functor σ_0^A: $A\,b\,(2) \longrightarrow A\,b$ que continúa por la izquierda de modo natural la sucesión exacta larga de los grupos duales de homotopía asociados a un homomorfismo f.

10. Definición. — Sea f: $X \longrightarrow Y$ homomorfismo, definimos $\sigma_0^A(f) = Ker\, f_*$, siendo f_*: $\sigma_0^A(X) \longrightarrow \sigma_0^A(Y)$ el homomorfismo que asocia σ_0^A: $A\,b \longrightarrow A\,b$ a f.

No es difícil comprobar que $\sigma_0^-(-)$: $A\,b \times A\,b\,(2) \longrightarrow A\,b$ es un functor, además

$$\sigma_n^A(-) : A\,b\,(2) \longrightarrow A\,b \quad \text{y} \quad \sigma_0^-(f) : A\,b \longrightarrow A\,b$$

son aditivos e invariantes por homotopía.

11. Definición.—Sea $f \in |A\,b\,(2)|$ diremos que f es n-contráctil si $\sigma_k(f) = 0$ para $0 \leqslant k \leqslant n$.

También vamos a definir el functor $-\otimes 1\colon Ab \longrightarrow Ab$. Para $X \in |Ab|$, conocemos la transformación natural $i_X\colon X \longrightarrow X \otimes R$, definimos $X \otimes 1 = Im\, i_X$, sobre los homomorfismos actúa de modo natural, notemos que $i\colon I \longrightarrow - \otimes R$, nos induce de modo natural una transformación natural y epimorfa j, del tipo $I \longrightarrow - \otimes 1$.

12. PROPOSICIÓN.—Sea $X \in |Ab|$ y consideremos $j_X\colon X \longrightarrow X \otimes 1$ entonces j_X es cofibración, $X \otimes 1$ es el mínimo cociente 0-contráctil de X y

$$\sigma_n^A(X) \xrightarrow{(j_X)_*} \sigma_n^A(X \otimes 1)$$

es isomorfismo para $n \geqslant 1$.

DEMOSTRACIÓN.—Como el siguiente triángulo es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "j_X"'] \arrow[dr, "i_X"] & \\ X \otimes 1 \arrow[rr] & & X \otimes R \end{tikzcd}$$

e i_X es cofibración también lo es j_X (ver II-(1.5)).

Veamos que $X \otimes 1$ es 0-contráctil, para ello consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \sigma_0(X) \arrow[r, "(j_X)_*"] \arrow[d, "r"] & \sigma_0(X \otimes 1) \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "j_X"] & X \otimes 1 \end{tikzcd}$$

donde r y s son las inclusiones canónicas.

$0 = j_X r = s(j_X)_*$ y s monomorfismo entonces $(j_X)_* = 0$.

Como j_X es cofibración y epimorfismo, podemos considerar la siguiente sucesión exacta:

$$\cdots \longrightarrow \sigma_n^A(X) \xrightarrow{(j_X)_*} \sigma_n^A(X \otimes 1) \longrightarrow \sigma_{n+1}^A(0) \longrightarrow \cdots$$

Para $A = \mathbb{Z}$ y $n = 0$, deducimos que $\sigma_0^A(X \otimes 1) = 0$ y para $n \geqslant 1$ vemos que $\sigma_n^A(X) \longrightarrow \sigma_n^A(X \otimes 1)$ es isomorfismo.

Sea $X \xrightarrow{\pi} C$ un cociente de X tal que $\sigma_0(C) = 0$ si le aplicamos a π el functor $- \otimes 1$, obtenemos

$$\begin{tikzcd}
\sigma_0(X) \arrow[r] \arrow[d] & \sigma_0(C) \arrow[d] \\
X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "j_X"] & C \arrow[d, "j_C"] \\
X \otimes 1 \arrow[r] & C \otimes 1
\end{tikzcd}$$

Por ser $\sigma_0(C) = 0$ j_C es un isomorfismo, como π es epimorfismo, C es un cociente de $X \otimes 1$.

13. PROPOSICIÓN.—Sea $A \in |Ab|$ entonces $\sigma_0(A) = 0$ si y sólo si cualquier cofibración del tipo $A \xrightarrow{i} X$ es monomorfismo.

DEMOSTRACIÓN.—Basta observar que $A \xrightarrow{i_A} A \otimes R$ es monomorfismo si y sólo si $\sigma_0(A) = 0$.

Bibliografía

[1] DIECK, T.TOM, KAMPS, K. H. y PUPPE, D. (1970). Homotopietheorie. Lecture Notes in Mathematics. No. 157. Springer-Verlag.

[2] ECKMANN, B. y HILTON, P. J. (1964). Unions and intersections in Homotopy Theory. *Comment. Math. Helv.*, **38**, 293-307.

[3] HELLER, A. (1968). Stable Homotopy Categories. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74**, 28-63.

[4] HELLER, A. (1970). Completions in Abstract Homotopy Theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **147**, 573-602.

[5] HELLER, A. (1972). Abstract homotopy in categories of fibrations and the spectral sequence of Eilenberg Moore. *Illinois J. Math.*, **16**, 454-474.

[6] HERNÁNDEZ, L. J. (1980). Un ejemplo de Teoría de Homotopía en los Grupos Abelianos. Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología (Universidad de Zaragoza).

[7] HILTON, P. J. (1965). Homotopy Theory and Duality. Gordon and Breach.

[8] HUBER, J. H. (1961). Homotopy Theory in General Categories. *Math. Annalen*, **144**, 361-385.

Departamento de Topología y Geometría
Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza