DESARROLLOS ASINTOTICOS EN UN SUBCONJUNTO NUMERABLE DENSO DE PUNTOS DE LA FRONTERA DEL DOMINIO

M. Fernández Castillo

Escuela Universitaria del Profesorado de E. G. B. Universidad de Alicante (*)

Recibido: 20 mayo 1981

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

En este artículo se consideran espacios de funciones holomorfas con desarrollo asintótico (Carleman, 1926) (Valdivia, 1965), y de funciones cuyas derivadas se extienden por continuidad, en un subconjunto numerable denso de puntos de la frontera del dominio; se estudian los núcleos localmente convexos de estos espacios, se comparan ambos, y, para familias particulares de compactos, se caracterizan los espacios duales de estos núcleos.

This paper is about a class of holomorphic functions spaces with asymptotic expansions and spaces of functions whose derivatives can be extended by continuity in a countable dense subset of the domain boundary. The locally convex kernels of these spaces are studied and compared, and the dual spaces of these kernels are characterized for particular families of compacts.

1. El espacio $F_\alpha = K\, I_n^{-1} (A_n^\alpha)$

Sea D un dominio convexo del plano complejo. Sea $\{z_n\}_{n \in N}$ un subconjunto denso de puntos de la frontera de D. Si

$$\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \ldots \subset \Delta_p \subset \ldots$$

(*) Este trabajo forma parte de la memoria «Algunos resultados sobre desarrollos asintóticos en una y varias variables complejas, presentada en la Universidad de Valencia para optar al Grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas, dirigida por D. Manuel Valdivia.

es una sucesión fundamental de compactos del interior de D, consideramos, para cada z_n, una sucesión de compactos $\{K^n_{\alpha p}\}_{p \in N}$ de $D \cup \{z_n\}$, que cumplen, $\forall\, p \in N$, las siguientes condiciones:

$$z_n \in K^n_{\alpha p}\,; \qquad \Delta_p \subset K^n_{\alpha p}\,; \qquad K^n_{\alpha p} - \{z_n\} \subset \overset{\circ}{K}{}^n_{\alpha, p+1}\,.$$

Asociados a estas familias de compactos, tenemos los espacios:

$A^\alpha_n \{f : D \longrightarrow C \mid f$ holomorfa en D, y f posee desarrollo asintótico en z_n, a través de los compactos $\{K^n_{\alpha p}\}_{p \in N}\}$.

En A^α_n, consideramos la topología T^α_n de la convergencia uniforme de las funciones y sus transformadas sobre los compactos $\{K^n_{\alpha p}\}_{p \in N}$. $A^\alpha_n (T^\alpha_n)$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo, Fréchet, Montel y Schwartz (Mira, I).

Definición 1.1.—*Llamamos*

$$B^\alpha_n \text{ a } B^\alpha_n = \prod_{i=1}^{n} A_i\,,$$

para todo n $\in N$.

En B^α_n tomamos la topología producto S^α_n. $B^\alpha_n (S^\alpha_n)$ es un espacio Fréchet-Montel y Schwartz.

Si $m \leqslant n$, se consideran las aplicaciones:

$$\Phi_{m,n} : B^\alpha_n \longrightarrow B^\alpha_m\,, \quad \Phi_{m,n}(f_1, \ldots, f_n) = (f_1, \ldots, f_m).$$

Proposición 1.1.—*El sistema* $(B^\alpha_n, \Phi_{m,n})$ *es un sistema proyectivo.*

Demostración.—Basta ver que si $m \leqslant n \leqslant p$, se tiene que

$$\Phi_{m,n} \circ \Phi_{n,p} = \Phi_{m,p}\,.$$

Consideramos el límite proyectivo

$$\varprojlim \Phi_{m,n}(B^\alpha_n) = \tilde{A}^\alpha\,.$$

Como las aplicaciones $\Phi_{m,n}$ son continuas, en $\tilde{A}^\alpha$ tenemos la topología $\tilde{T}^\alpha$, límite proyectivo de las topologías S^α_n.

PROPOSICIÓN 1.2.—*$\tilde{A}^{\alpha}$ $(\tilde{T}^{\alpha})$ es un espacio vectorial topológico Fréchet-Montel y Schawartz.*

DEMOSTRACIÓN.—Es Fréchet por ser límite proyectivo de espacios de Fréchet (Köthe, 1969,19.6.(8)). Es Schwartz por ser límite proyectivo de espacios de Schwartz (Horvath, 1966,3.15.8). Es Montel por ser Fréchet y Schwartz.

DEFINICIÓN.—*Llamamos*

$$F_{\alpha} \text{ a } F_{\alpha} = \bigcap_{1}^{\infty} A^{\alpha}_{n} .$$

Considerando las identidades $I_n : F_{\alpha} \longrightarrow A^{\alpha}_{n}$, F_{α} es el núcleo localmente convexo $\underset{n}{K}\, I^{-1}_{n} (A^{\alpha}_{n})$.

PROPOSICIÓN 1.3.—*F_{α} se puede identificar con un subespacio cerrado de $\tilde{A}^{\alpha}$.*

DEMOSTRACIÓN.—Establecemos la aplicación:

$$\Psi : F_{\alpha} \longrightarrow \tilde{A}^{\alpha} \mid \Psi (f) = [(f), (f, f), (f, f, f), \ldots]$$

ψ es una aplicación inyectiva y lineal.

En F_{α} tomamos la topología T_{α} para la cual los entornos de cero son de la forma $V = V_1 \cap \ldots \cap V_n$, donde V_i es entorno de cero en A^{α}_{i}.

ψ es continua. En efecto, para todo W entorno de cero en

$$\tilde{A}^{\alpha} (\tilde{T}^{\alpha}), \quad W = [W_1 \times \ldots \times W_n \times B_{n+1} \times \ldots] \cap \tilde{A}^{\alpha} .$$
$$\Psi^{-1} (W) = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n ,$$

donde

$$U_1 = U^{1}_{1} \cap U^{2}_{1} \cap \ldots \cap U^{n}_{1}; \quad U_2 = U^{2}_{2} \cap \ldots \cap U^{n}_{2}; \ldots; \quad U_n = U^{n}_{n},$$

siendo U^{j}_{i} un T^{α}_{i}-entorno de cero en A^{α}_{i}.

ψ es abierta, pues si $V = U_1 \cap \ldots \cap U_n$ es un T_{α}-entorno de cero en F_{α},

$$\Psi (V) = [U_1 \times (U_1 \times U_2) \times \ldots \times (U_1 \times \ldots \times U_n) \times A_{n+1} \times \ldots] \cap \Psi(F_{\alpha}),$$

que es abierto en $\tilde{A}^\alpha$. Luego F_α se puede identificar con $\tilde{F}_\alpha = \psi(F_\alpha)$, ya que son isomorfos topológicamente.

Basta ver que $\tilde{F}^\alpha$ es un subespacio cerrado de $\tilde{A}^\alpha$.

Sea una sucesión convergente de elementos de $\tilde{F}^\alpha$. Será de la forma

$$[(f_n),\ (f_n, f_n), \dots]_{n \in N}.$$

El límite de esta sucesión en $\tilde{A}^\alpha$ será

$$[(f_1),\ (f_1, f_2),\ (f_1, f_2, f_3), \dots]$$

donde

$$f_1 = T_1^\alpha - \lim_{n \to \infty} f_n;\ f_2 = T_2^\alpha - \lim_{n \to \infty} f_n, \dots$$

Si $i \neq j$, las funciones f_i, f_j coinciden en Δ_0,

$$\Delta_0 \subset K_{\alpha 0}^i \cap K_{\alpha 0}^j,$$

y por tanto, en todo D, ya que estas topologías implican la convergencia puntual. Es decir, $f_i = f_j$. Además, $f_i \in A_i^\alpha$ para todo $i \in N$ por ser $A_i^\alpha\ (T_i^\alpha)$ completo. Llamando f a todas estas funciones, $f \in A_i^\alpha$ para todo $i \in N$, y el límite de la sucesión es de la forma

$$\tilde{f} = [(f),\ (f, f), \dots],\ f \in F_\alpha,$$

es decir, $\tilde{f} \in \tilde{F}^\alpha$ y por tanto $\tilde{F}^\alpha$ es cerrado en $\tilde{A}^\alpha$.

COROLARIO.—*$F_\alpha\ (T_\alpha)$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo Fréchet, Schwartz, y por tanto, Montel.*

NOTA. El que $f \in F_\alpha$, no implica que f posea desarrollo asintótico en los demás puntos de la frontera de D para alguna familia conveniente de compactos. En efecto, sea $y \in \partial D$ tal que $y \notin \{z_p\}_{p \in N}$. Sea

$$f(z) = \frac{1}{z - y}.$$

f tiene desarrollo asintótico en todo punto de la frontera de D, excepto en y, pues f no está acotada en ningún entorno de y.

2. El espacio $G_\alpha = \underset{n}{K} I_n^{-1} (E_n^\alpha)$

Si los compactos $\{K^n_{\alpha p}\}_{p \in N}$ dados en 1, se toman estrellados en z_n, se pueden considerar los espacios: $E^\alpha_n = \{f : D \longrightarrow C \mid f$ holomorfa en D, y $f, f', f'', \ldots$ tienen límite en z_n, a través de los compactos $\{K^n_{\alpha p}\}_{p \in N}\}$.

Los espacios $E^\alpha_n \subset A^\alpha_n$ y para algunos casos particulares coinciden (Herrero).

Cada E^α_n, con la topología T'^α_n de la convergencia uniforme de las funciones y sus derivadas sobre los compactos $\{K^n_{\alpha p}\}_{p \in N}$, es un espacio vectorial topológico localmente convexo, Fréchet-Montel (Herrero).

Definición 2.1.—*Llamamos*

$$D^\alpha_n, \quad n \in N \quad a \quad D^\alpha_n = E^\alpha_1 \times \ldots \times E^\alpha_n .$$

En D^α_n tomamos la topología producto S'^α_n. $D^\alpha_n (S'^\alpha_n)$ es un espacio Fréchet-Montel. Si $m \leqslant n$, se consideran las aplicaciones

$$\Psi_{m,n} : D^\alpha_n \longrightarrow D^\alpha_m ,$$

donde $\psi_{m,n}$ son las proyecciones

$$\Psi_{m,n} (f_1, \ldots, f_m, \ldots, f_n) = (f_1, \ldots, f_m) .$$

De modo análogo a la proposición 1.1, se tiene:

Proposición 2.1.—*El sistema* $(D^\alpha_n, \psi_{m,n})_{m,n \in N}$ *es un sistema proyectivo.*

Consideramos el límite proyectivo

$$\underset{\leftarrow}{\lim}\ \Psi_{m,n} (D^\alpha_m) = \tilde{E}^\alpha ,$$

y le dotamos de la topología límite proyectivo $\tilde{T}'^\alpha$.

PROPOSICIÓN 2.2.—*$\tilde{E}^\alpha$ $(\tilde{T}'^\alpha)$ es un espacio vectorial topológico Fréchet-Montel y Schwartz.*

La demostración es análoga a la de la proposición 1.2.

$\tilde{E}^\alpha$ es un subespacio del producto $\prod_1^\infty E^\alpha_n$, cuyos elementos verifican la condición: Si

$$\tilde{x} \in \tilde{E}^\alpha, \quad \tilde{x} = (x_n)_{n \in N}$$

tal que si

$$m \leq n, \quad x_m = \Psi_{m,n}(x_n),$$

es decir,

$$\tilde{x} = [(f_1), (f_1, f_2), \ldots],$$

donde $f_i \in E^\alpha_i$.

DEFINICIÓN 2.2.—*Llamamos*

$$G_\alpha \text{ a } G_\alpha = \bigcap_1^\infty E^\alpha_n .$$

Considerando las identidades $I_n : G_\alpha \longrightarrow E^\alpha_n$, G_α es el núcleo localmente convexo $K_n I_n^{-1}(E^\alpha_n)$.

PROPOSICIÓN 2.3.—*G_α se puede identificar con un subespacio cerrado de $\tilde{E}^\alpha$.*

DEMOSTRACIÓN.—Establecemos la aplicación $\tau : G_\alpha \longrightarrow \tilde{E}^\alpha$ tal que $\tau(f) = [(f), (f, f), \ldots]$. τ es claramente una aplicación lineal e inyectiva. Dotando a G_α de la topología T'_α para la cual una base de entornos de cero está dada por las intersecciones finitas de entornos de cero en los espacios E^α_n, τ es un homomorfismo topológico. Por tanto, G_α se puede identificar con $\tau(G_\alpha) = \tilde{G}^\alpha$. De manera análoga a como se hace en la proposición 1.3, se prueba que $\tau(G_\alpha)$ es un subespacio cerrado de $\tilde{E}^\alpha$.

COROLARIO.—*G_α (T'_α) es un espacio vectorial topológico localmente convexo, Fréchet, Schwartz y, por tanto, Montel.*

3. Comparación entre los espacios $F_\alpha(T_\alpha)$ y $G_\alpha(T'_\alpha)$

PROPOSICIÓN 3.1.—*G_α es un subconjunto de F_α, y, sobre G_α, la topología T'_α es más fina que la inducida por F_α (T_α).*

DEMOSTRACIÓN.—En efecto,

$$G_\alpha = \bigcap_n E_n^\alpha \subset \bigcap_n A_n^\alpha = F_\alpha .$$

Por otra parte, sea

$$(V_1 \cap \cdots \cap V_n) \cap G_\alpha$$

un T_α-entorno de cero en G_α, siendo V_i un T_i^α-entorno de cero en

$$A_i^\alpha, \quad i = 1, \ldots, n. \quad V_i \cap E_i^\alpha$$

es un T_i^α-entorno de cero en E_i^α, y sobre E_i^α la topología $T_i'^\alpha$ es más fina que la inducida por T_i^α. Por tanto, existe un U_i, que es un $T_i'^\alpha$-entorno de cero en E_i^α, tal que

$$U_i \subset V_i \cap E_i^\alpha . \quad (U_1 \cap \cdots \cap U_n) \cap G_\alpha$$

es un T'_α-entorno de cero en G_α, y evidentemente,

$$(U_1 \cap \cdots \cap U_n) \cap G_\alpha$$

está contenido en

$$(V_1 \cap \cdots \cap V_n) \cap G_\alpha .$$

Luego $T_\alpha \subset T'_\alpha$ sobre G_α.

Hay casos particulares de compactos $\{K_{\alpha p}^n\}_{p \in N}$, para los que E_n^α y A_n^α coinciden. Esto ocurre, por ejemplo, para los compactos de tipo angular, y para los «cf-compactos» (compactos cuya curva borde presenta un contacto de orden finito con la curva borde de D, en z_n) (Herrero). Por tanto, se verifica que $G_\alpha = F_\alpha$. En general, el contenido $G_\alpha \subset F_\alpha$ es estricto, como se prueba en la siguiente:

PROPOSICIÓN 3.2.—*Existen valores de α, para los cuales G_α y F_α son distintos.*

DEMOSTRACIÓN.—En (Herrero), se prueba que, dado un punto z_n de la frontera de D, se puede encontrar una función f, que posee desarrollo asintótico en z_n, pero cuyas derivadas no se pueden extender en z_n, a través de D. Esto significa que $f \in A^\alpha_n$, para todo α, pero que existe una familia de compactos $\{K^n_{\alpha_1, p}\}_{p \in N}$ tal que $f \notin E^n_{\alpha_1}$. La función f tiene desarrollo asintótico en z_q, para todo $q \neq n$, $q \in N$; por tanto, $f \in F_\alpha$ para todo α. Sin embargo, existe un α_0 tal que $f \notin G_{\alpha_0}$.

4. El dual de ciertos F_α

Considerando, para cada z_n, el espacio $\hat{A}_n$ (lo que significa que la familia de compactos $\{K^n_{\alpha p}\}$ son de tipo angular en z_n), o bien espacio A^{cf}_n (en cuyo caso los $K^n_{\alpha p}$ son cf-compactos en z_n), vamos a caracterizar el dual de F_α.

Si llamamos a la topología T^α_n de $\hat{A}_n$, $\hat{T}_n$, y a la de A^{cf}_n, la designamos T^{cf}_n, se verifica que $(\hat{A}_n(\hat{T}_n))' = \hat{H}_n$ siendo $\hat{H}_n = \{\hat{f} \mid$ existe K compacto angular en z_n,

$$M > 0 \quad y \quad p \in N \mid \tilde{f}: \quad \Omega - K \longrightarrow C,$$

$\tilde{f}$ holomorfa y

$$| \tilde{f}(\lambda) | \leq M \sup \left\{ \frac{1}{d(\lambda, K)}, \ldots, \frac{1}{|\lambda|^p d(\lambda, K)} \right\}$$

(Mira II).

Por otra parte

$$(A^{cf}_n (T^{cf}_n))' = H^{cf}_n,$$

siendo $H_n^{cf} = \{\tilde{f} \mid$ existe K, cf-compacto en z_n,

$$M > 0, \quad p \in N \mid \tilde{f} : \Omega - K \longrightarrow C,$$

$\tilde{f}$ holomorfa y

$$|\tilde{f}(\lambda)| \leq M \sup \left\{ \frac{1}{d(\lambda, K)}, \ldots, \frac{1}{|\lambda|^p d(\lambda, K)} \right\}$$

(Herrero).

En general, el dual de F_α será

$$(F_\alpha)' = \sum_n I'_n [(A_n^\alpha)'] = \sum_n (A_n^\alpha)'.$$

Si $A_n^\alpha = \hat{A}_n$, entonces $(A_n^\alpha)' = \hat{H}_n$, por lo que

$$(\hat{F})' = \sum_n \hat{H}_n .$$

Análogamente,

$$(F^{cf})' = \sum_n H_n^{cf} .$$

Sea

$$\tilde{f} \in (\hat{F})' \Leftrightarrow \tilde{f} \in \sum_n \hat{H}_n \Leftrightarrow \tilde{f} = \gamma_{n_1} \tilde{f}_{n_1} + \cdots + \gamma_{n_r} \tilde{f}_{n_r},$$

donde

$$\tilde{f}_{n_i} \in \hat{H}_{n_i} \quad y \quad \gamma_{n_i} \in C.$$

Cada $\tilde{f}_{n_i}$ es holomorfa fuera de un compacto K_{n_i} angular en z_n y existe $M_{n_i} > 0$, $p_{n_i} \in N$ tales que se verifica la acotación:

$$|\tilde{f}_{n_i}(\lambda)| \leq M_{n_i} \sup \left\{ \frac{1}{d(\lambda, K_{n_i})}, \ldots, \frac{1}{|\lambda|^{p_{n_i}} d(\lambda, K_{n_i})} \right\}$$

para todo $\lambda \in \Omega - K_{n_i}$.

Sea

$$K = \bigcup_{i=1}^{r} K_{n_i}, \quad M' = \sup_{i=1\ldots r} \{ |\gamma_{n_i}| M_{n_i} \}, \quad p = \max_{1\ldots r} \{ p_{n_i} \}.$$

Si $\lambda \in \Omega - K$, se verifica que

$$|\tilde{f}(\lambda)| \leq M' r \sup \left\{ \frac{1}{d(\lambda, K)}, \ldots, \frac{1}{|\lambda|^p d(\lambda, K)} \right\}$$

Llamando $\hat{H} = \{\tilde{f}$ | existen compactos $K_{n_1}, \ldots, K_{n_r}$ angulares en $z_{n_1}, \ldots, z_{n_r}$, $\tilde{f}$ holomorfa fuera de $K = K_{n_1} \cup \ldots \cup K_{n_r}$, y una constante $M > 0$, $p \in N$ tales que

$$|\tilde{f}(\lambda)| \leq M \sup \left\{ \frac{1}{d(\lambda, K)}, \ldots, \frac{1}{|\lambda|^p d(\lambda, K)} \right\},$$

se tiene que $(\hat{F})' = \hat{H}$.

De modo análogo, si $A_n = A_n^{cf}$, se verifica que $(F^{cf})' = H^{cf}$, donde $H^{cf} = \{\tilde{f}$ | existen compactos $K_{n_1}, \ldots, K_{n_r}$, cf-compactos en $z_{n_1}, \ldots, z_{n_r}$, $\tilde{f}$ holomorfa fuera de $K = K_{n_1} \cup \ldots \cup K_{n_r}$, una constante $M > 0$, $p \in N$, tales que

$$|\tilde{f}(\lambda)| \leq M \sup \left\{ \frac{1}{d(\lambda, K)}, \ldots, \frac{1}{|\lambda|^p d(\lambda, K)} \right\},$$

para todo $\lambda \in \Omega - K\}$.

Bibliografía

[I] CARLEMAN, T. (1926). Les fonctions quasi-analytiques. Gautier-Villars. Paris.

[II] HERRERO, C. Espacios de funciones holomorfas cuyas derivadas se extienden a un punto de la frontera. *Revista de la R. A. C. E.* Tomo LXXV, cuaderno 3.º, Madrid.

[III] HORVATH, J. (1966). Topological Vector Spaces and Distributions. Volume I. Addison Wesley Pu. Co.

[IV] KÖTHE, G. (1969). Topological Vector Spaces I. Springer-Verlag.

[V] MIRA, J. A. Espacios de funciones holomorfas con desarrollo asintótico. *Revista de la R. A. C. E.* Tomo LXXV, cuaderno 3, Madrid.

[VI] MIRA, J. A. Desarrollos asintóticos a través de compactos angulares. *Revista de la R. A. C. E.* (pendiente de publicación).

[VII] VALDIVIA, M. (1965). Desarrollos asintóticos y familias compactas de funciones holomorfas. *Revista de la R. A. C. E.* Tomo LIX, cuaderno 3, Madrid.