INTEGRACION DE FUNCIONES CON VALORES EN UN ESPACIO LOCALMENTE CONVEXO RESPECTO DE MEDIDAS INFINITAS. I

Baltasar Rodríguez-Salinas

Recibido: 5 mayo 1982

In this paper it's studied the integration of functions with values in a locally convex space, with respect to infinite measures. The case for finite measures has been studied in [5] by us, in relation with the Radon-Nikodym theorem and property. Others recent works in this way, about integration of vector functions, are due to Thomas [8], Chi [1] and Gilliam [3]. It must be remarked that as a (countably additive) vector measure it's not necessarily of bounded variation, then the generality of the integration requires the existence of integrable functions which aren't absolutely integrable. Moreover, the largeness of the class of integrable it's fundamental for the greater or smaller riches of the properties of the integral. So we will give here two versions, one strong and other weak, for the theory of integration, appearing the μ-integrable functions and the $\bar{\mu}$-integrable ones. When the measure space is strictly localizable, then the absolutely $\bar{\mu}$-integrable functions coincide with the Grothendieck integrable ones.

En este trabajo se estudia la integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo respecto de medidas infinitas. El caso de medidas finitas lo hemos estudiado en [5] en relación con el teorema y la propiedad de Radon-Nikodym. Otros trabajos recientes, en esta dirección, sobre integración de funciones vectoriales se deben a Thomas [8], Chi [1] y Gilliam [3]. Es de notar que como una medida vectorial (contablemente aditiva) no es necesariamente de variación acotada, la generalidad de la integración exige que deban existir funciones integrables no absolutamente integrables. Por otra parte, la amplitud de la clase de las funciones integrables es fundamental para la mayor o menor riqueza de las propiedades de la integral. Por ello nosotros daremos dos versiones, una fuerte y otra débil, para la teoría de la integración, dando lugar a las funciones μ-integrables y $\bar{\mu}$-integrables. Debemos destacar que las funciones absolutamente $\bar{\mu}$-integrables coinciden con las funciones integrables Grothendieck cuando el espacio de medida (Ω, Σ, μ) es estrictamente localizable.

El trabajo constará de cuatro partes. Aquí, en la primera, trataremos de las funciones μ-medibles y $\bar{\mu}$-medibles. En la segunda y en la tercera de las funciones integrables. Finalmente, en la cuarta parte, trataremos de las clases de μ-equivalencia y del rango esencial.

1. Funciones simples

1. Definición.—Sea Σ una σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω, y E un espacio vectorial topológico localmente convexo sobre el cuerpo **K** de los números reales o de los complejos, que supondremos siempre Hausdorff. Una función $f\colon \Omega \longrightarrow E$ se dice *simple de clase* 0: $f \in S_0 = S_0(\Sigma, E)$ si es una función Σ-medible con un número finito de valores, e. d. si

$$f = \sum_{1}^{n} y_i \chi_{A_i}$$

con $y_i \in E$, $A_i \in \Sigma$ para $i = 1, 2, ..., n$, donde χ_A es la función característica de A.

Una función $f\colon \Omega \longrightarrow E$ se dice *simple*: $f \in S = S(\Sigma, E)$ si es límite uniforme de una red $(f_i)_{i \in I}$ de funciones simples de clase 0. Es claro que $S = \bar{S}_0$ para la topología de la convergencia uniforme sobre el espacio $B(\Omega, E)$ de las funciones acotadas $f\colon \Omega \longrightarrow E$.

2. Proposición.

2.1. *S es un espacio vectorial.*

2.2. *Si $f \in S$ y φ es una función escalar acotada Σ-medible, $\varphi f \in S$.*

2.3. *Si $f \in S$ y p es una seminorma continua sobre E, $p \circ f$ es una función escalar acotada y Σ-medible.*

2.4. *Si $f \in S$ y $x' \in E'$ (dual de E), $\langle f, x' \rangle$ es una función escalar acotada y Σ-medible.*

2.5. *Si $f \in S(\Sigma, E)$, F es otro e. l. c. s. y $T\colon E \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua, entonces $T \circ f \in S(\Sigma, F)$.*

Demostración.—Inmediata.

3. PROPOSICIÓN.—*Una función* $f: \Omega \longrightarrow E$ *es simple si y sólo si se verifican:*

3.1. $f(\Omega)$ *es un subconjunto precompacto de* E.

3.2. $p \circ (f - x)$ *es* Σ*-medible para toda seminorma continua* p *sobre* E *y todo* $x \in E$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea f simple. Entonces, según 2.1 y 2.3, se verifica 3.2. Sea $(f_i)_{i \in I}$ una red de funciones $f_i \in S_0$ uniformemente convergente a f. Entonces, para cada entorno U de 0 en E, existe una función f_i tal que $f(t) - f_i(t) \in U$ para todo $t \in \Omega$. Por tanto,

$$f(\Omega) \subset A + U,$$

donde A es el conjunto finito $f_i(\Omega)$, y resulta que $f(\Omega)$ es precompacto.

Recíprocamente, si se verifican 3.1 y 3.2, se deduce fácilmente que, para todo entorno absolutamente convexo y cerrado U de 0 en E, existe una función $f_U \in S_0$ tal que $f_U(t) - f(t) \in U$ para todo $t \in \Omega$ y resulta que f es simple.

2. Funciones μ-medibles

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y E un e. l. c. s., e. d., un espacio localmente convexo separado.

4. DEFINICIÓN.—Una función $f: \Omega \longrightarrow E$ se dice *μ-medible* si, para todo $A \in \Sigma$ de medida finita: $A \in \Sigma_0$, existe una red $(f_i)_{i \in I}$ de funciones simples que converge casi uniformemente a f en A.

Una función $f: \Omega \longrightarrow E$ se dice *totalmente μ-medible* si existe una red $(f_i)_{i \in I}$ de funciones simples que converge casi uniformemente a f sobre cada conjunto $A \in \Sigma_0$.

Denotaremos por $M = M(\Sigma, \mu, E)$ el conjunto de las funciones $f: \Omega \longrightarrow E$ μ-medibles y por $M_t = M_t(\Sigma, \mu, E)$ el conjunto de las funciones $f: \Omega \longrightarrow E$ totalmente μ-medibles.

Es claro que toda función simple es totalmente μ-medible y que toda función totalmente μ-medible es μ-medible. Por tanto, $S \subset M_t \subset M$. También es claro que si $f \in M$ (resp. $f \in M_t$) y $g = f$ en casi todo Ω, $g \in M$ (resp. $g \in M_t$).

Denotaremos por Σ_0 la clase de los conjuntos $A \in \Sigma$ de medida finita y por Σ_A la clase de los subconjuntos $X \in \Sigma$ de A.

5. PROPOSICIÓN.—*Son equivalentes:*

5.1. f *es* μ*-medible.*

5.2. *Para todo* $A \in \Sigma_0$ *y todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $K_\varepsilon \in \Sigma_A$ *tal que* $\mu(A - K_\varepsilon) < \varepsilon$ *y* $f \chi_{K_\varepsilon}$ *es simple.*

5.3. *Para todo* $A \in \Sigma_0$ *y todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $K_\varepsilon \in \Sigma_A$ *tal que* $\mu(A - K_\varepsilon) < \varepsilon$ *y* $f \chi_{K_\varepsilon}$ *es* μ*-medible.*

DEMOSTRACIÓN.—5.1 $\Longrightarrow$ 5.2. Sea $A \in \Sigma_0$. Si f es μ-medible, existe una red $(f_i)_{i \in I}$ de funciones simples que converge casi uniformemente a f en A. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe $K_\varepsilon \in \Sigma_A$ tal que $\mu(A - K_\varepsilon) < \varepsilon$ y $(f_i)_{i \in I}$ converge uniformemente a f en K_ε. Por tanto, $(f_i \chi_{K_\varepsilon})_{i \in I}$ converge uniformemente a $f \chi_{K_\varepsilon}$ y $f \chi_{K_\varepsilon} \in S$.

5.2 $\Longrightarrow$ 5.3. Basta tener en cuenta que $S \subset M$.

5.3 $\Longrightarrow$ 5.2. Para todo $A \in \Sigma_0$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $K_\varepsilon \in \Sigma_A$ tal que $\mu(A - K_\varepsilon) < \varepsilon/2$ y $f \chi_{K_\varepsilon}$ es μ-medible. Entonces existe una red $(f_i)_{i \in I}$ de funciones simples que converge casi uniformemente a $f \chi_{K_\varepsilon}$ sobre $K_\varepsilon \in \Sigma_0$. Por tanto, existe $K'_\varepsilon \in \Sigma_{K_\varepsilon}$ tal que $\mu(K_\varepsilon - K'_\varepsilon) < \varepsilon/2$ y $(f_i)_{i \in I}$ converge uniformemente a $f \chi_{K_\varepsilon}$ en K'_ε. Luego $(f_i \chi_{K'_\varepsilon})_{i \in I}$ converge uniformemente a $f \chi_{K'_\varepsilon}$ y $f \chi_{K'_\varepsilon} \in S$. Además

$$\mu(A - K'_\varepsilon) \leq \mu(A - K_\varepsilon) + \mu(K_\varepsilon - K'_\varepsilon) < \varepsilon .$$

5.2 $\Longrightarrow$ 5.1. Procederemos por inducción. Sea $A \in \Sigma_0$. Para $\varepsilon = 1$ existe $K_1 \in \Sigma_A$ tal que $\mu(A - K_1) < 1$ y $f \chi_{K_1} \in S$. Supongamos construido $K_{n-1} \in \Sigma_A$ de modo que $\mu(A - K_{n-1}) < 1/(n-1)$ y $f \chi_{K_{n-1}} \in S$. Para $\varepsilon = 1/n$ existe $K'_n \in \Sigma_A$ tal que $\mu(A - K'_n) < 1/n$ y $f \chi_{K'_n} \in S$. Sea $K_n = K_{n-1} \cup K'_n$. Entonces

$$\mu(A - K_n) \leq \mu(A - K'_n) < 1/n \quad \text{y} \quad f \chi_{K_n} \in S .$$

Por tanto, si $f_n = f \chi_{K_n}$, $(f_n)_{n \in N}$ es una sucesión de funciones simples que converge casi uniformemente a f sobre A y f es μ-medible.

6. PROPOSICIÓN.

6.1. *El conjunto M de las funciones* μ*-medibles es un espacio vectorial.*

6.2. *Si* f *es* μ*-medible y* φ *es una función escalar* μ*-medible,* φ f *es* μ*-medible.*

6.3. *Si* f *es* μ*-medible y* p *es una seminorma continua sobre* E, *la función real* $p \circ f$ *es* μ*-medible.*

6.4. *Si* f *es* μ*-medible y* $x' \in E'$, *la función* $\langle f, x' \rangle$ *es* μ*-medible.*

6.5. *Si* f *es* μ*-medible,* F *es otro e. l. c. s. y* $T: E \longrightarrow F$ *es una aplicación lineal continua, entonces* $T \circ f$ *es* μ*-medible.*

Estas propiedades son también válidas para las funciones totalmente μ*-medibles.*

Demostración.—Resulta fácilmente de la proposición 2 y de la definición 4.

7. Proposición.—*Si* $(f_n)_1^\infty$ *es una sucesión de funciones* μ*-medibles que converge casi uniformemente a* f, *entonces* f *es* μ*-medible.*

Demostración.—Sea $A \in \Sigma_0$. Por converger $(f_n)_1^\infty$ casi uniformemente a f sobre A, para todo $\varepsilon > 0$ existe $K_0 \in \Sigma_A$ tal que $\mu(A - K_0) < \varepsilon/2$ y $(f_n)_1^\infty$ converge uniformemente a f sobre K_0. Por ser f_n μ-medible, existe un $K_n \in \Sigma_A$ tal que $\mu(A - K_n) < \varepsilon/2^{n+1}$ y $f_n \chi_{K_n} \in S$.

Sea

$$K = \bigcap_0^\infty K_n \in \Sigma_A,$$

entonces

$$\mu(A - K) \leq \sum_0^\infty \mu(A - K_n) < \varepsilon$$

y $(f_n \chi_K)_1^\infty$ es una sucesión de funciones simples que converge uniformemente a $f \chi_K$, que por la definición 1 es simple. Luego, por la proposición 5, f es μ-medible.

8. Proposición.—*Si* (Ω, Σ, μ) *es un espacio de medida estrictamente localizable y* f *es una función* μ*-medible, entonces* f *es totalmente* μ*-medible.*

Demostración. — Por ser Ω estrictamente localizable existe una familia $(\Omega_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de conjuntos disjuntos medibles tales que $\Omega = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$, $\Omega_\lambda \in \Sigma_0$ para cada $\lambda \in \Lambda$, y para todo subconjunto A de medida finita de Ω existe un subconjunto contable M de A tal que $\mu\,(A - \bigcup_{\lambda \in M} \Omega_\lambda) = 0$.

Por ser $\Omega_\lambda \in \Sigma_0$ para todo $\lambda \in \Lambda$ y ser f μ-medible existe una red $(f_{i_\lambda})_{i_\lambda \in I}$ de funciones simples que converge casi uniformemente a f sobre Ω_λ.

Sea $P_f(\Lambda)$ el conjunto de las partes finitas de Λ y definamos en $I = P_f(\Lambda) \times \prod_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$,

$$(M, (i_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) \leqq (M', (i'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$$

si y sólo si $M \subset M'$ e $i_\lambda \leqslant i_{\lambda'}$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Entonces $(I, \leqslant)$ es un conjunto dirigido. Formemos ahora la red $(f_i)_{i \in I}$ de funciones simples poniendo

$$f_i(x) = \begin{cases} f_{i_\lambda}(x) & \text{si} \quad x \in \Omega_\lambda \quad \text{para} \quad \lambda \in M \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \bigcup_{\lambda \in M} \Omega_\lambda \end{cases}$$

cuando $i = (M, (i_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$.

Vamos a probar que $(f_i)_{i \in I}$ converge a f casi uniformemente sobre cada conjunto A de medida finita. Entonces $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ para $A_\lambda = A \cap \Omega_\lambda$. Para cada $\varepsilon_0 > 0$ existe $M_0 \in P_f(\Lambda)$ tal que

$$\mu\left(A - \bigcup_{\lambda \in M_0} A_\lambda\right) < \varepsilon_0 / 2 .$$

Dado $\lambda \in M_0$ existe $K_\lambda \in \Sigma_{\Omega_\lambda}$ para el que se verifica

$$\mu\,(\Omega_\lambda - K_\lambda) < \varepsilon_0 / 2\, n_0 ,$$

donde n_0 es el cardinal de M_0, y $(f_{i_\lambda})_{i_\lambda \in I_\lambda}$ converge uniformemente a f sobre K_λ. Por tanto, si $K'_\lambda = A \cap K_\lambda$, se verifica

$$\mu\,(A_\lambda - K'_\lambda) \leqq \mu\,(\Omega_\lambda - K_\lambda) < \varepsilon_0 / 2\, n_0 .$$

Sea $K = \bigcup_{\lambda \in M_0} K'_\lambda \in \Sigma_A$, entonces de

$$A - K \subset \left(A - \bigcup_{\lambda \in M_0} A_\lambda\right) \cup \left(\bigcup_{\lambda \in M_0} A_\lambda \quad \bigcup_{\lambda \in M_0} K'_\lambda\right)$$

resulta $\mu\,(A - K) < \varepsilon_0$.

Veamos que $(f_i)_{i \in I}$ converge uniformemente a f sobre K. Como $(f_{i_\lambda})_{i_\lambda \in I_\lambda}$ converge uniformemente a f sobre K'_λ ($\lambda \in M_0$), para todo $\varepsilon > 0$ y toda seminorma continua p sobre E, existe $i^0{}_\lambda \in I_\lambda$ tal que

$$p(f_{i_\lambda}(x) - f(x)) < \varepsilon$$

para todo $x \in K'_\lambda$ y todo $i_\lambda \geqslant i^0{}_\lambda$.

Tomemos $i_0 = (M_0, (i^0{}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$. Si $x \in K$, existe $\lambda \in M_0$ tal que $x \in K'_\lambda$. Sea $i = (M, (i_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) \geqslant i_0$. Entonces, $M \supset M_0$, $i_\lambda \geqslant i^0{}_\lambda$ y $f_i(x) = f_{i_\lambda}(x)$, de donde resulta

$$p(f_i(x) - f(x)) = p(f_{i_\lambda}(x) - f(x)) < \varepsilon$$

y, por tanto, que $(f_i)_{i \in I}$ converge uniformemente a f sobre K. Luego f es totalmente μ-medible.

3. Funciones $\bar{\mu}$-medibles

9. Definición.—Una función $f\colon \Omega \longrightarrow E$ se dice *$\bar{\mu}$-medible* si, para todo $A \in \Sigma_0$, existe una red de funciones μ-medibles que converge uniformemente a f sobre A.

Una función $f\colon \Omega \longrightarrow E$ se dice *totalmente $\bar{\mu}$-medible* si existe una red de funciones totalmente μ-medibles que converge uniformemente a f sobre cada conjunto de medida finita.

Denotaremos por $\overline{M}(\Sigma, \mu, E)$ el conjunto de las funciones $f\colon \Omega \longrightarrow E$ $\bar{\mu}$-medibles y por $\overline{M}_t(\Sigma, \mu, E)$ el conjunto de las funciones $f\colon \Omega \longrightarrow E$ totalmente $\bar{\mu}$-medibles.

La proposición 6 se puede extender para las funciones $\bar{\mu}$-medibles y totalmente $\bar{\mu}$-medibles.

Si E es metrizable de la proposición 7 se deduce que toda función $\bar{\mu}$-medible es μ-medible.

10. Proposición.—*Si* f *es límite casi uniforme sobre cada conjunto de medida finita de una red de funciones $\bar{\mu}$-medibles, dependiente del conjunto,* f *es $\bar{\mu}$-medible.*

Demostración.—Sea $A \in \Sigma_0$ y $(f_i)_{i \in I}$ una red de funciones $\bar{\mu}$-medibles que converge casi uniformemente a f sobre A. Para cada

$\varepsilon = 1/n$ existe $K'_n \in \Sigma_A$ tal que $\mu(A - K'_n) < 1/n$ y $(f_i)_{i \in I}$ converge uniformemente a f sobre K'_n. Sea $K_n = K'_n - \bigcup_1^{n-1} K'_i$, entonces $(K_n)_1^\infty$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos tales que $\mu(A - \bigcup_1^\infty K_n) = 0$ y $(f_i)_{i \in I}$ converge uniformemente a f sobre cada K_n.

Para todo $i \in I$, f_i es límite uniforme sobre K_n de una red de funciones μ-medibles. Entonces, para toda seminorma continua p sobre E, existe una función $f_{n,p}$ μ-medible tal que

$$p(f_{n,p} - f) < 1 \quad \text{sobre} \quad K_n .$$

Para todo $n \in \mathbf{N}$ y toda seminorma p ponemos

$$\begin{aligned} g_{n,p} &= f_{h,p} && \text{sobre} \quad K_h \quad \text{para} \quad 1 \leq h \leq n \\ g_{n,p} &= f && \text{sobre} \quad A - \bigcup_1^\infty K_h \\ g_{n,p} &= 0 && \text{sobre} \quad \bigcup_{n+1}^\infty K_h \cup A^c . \end{aligned}$$

Entonces $g_{n,p}$ es μ-medible ya que es igual a la función $\sum_{h=1}^{n} f_{h,p}\,\chi_K$ salvo en un conjunto de medida nula. La función g_p definida poniendo

$$\begin{aligned} g_p &= f_{n,p} && \text{sobre} \quad K_n \quad (n \in \mathbf{N}) \\ g_p &= f && \text{sobre} \quad A - \bigcup_1^\infty K_n \\ g_p &= 0 && \text{sobre} \quad A^c , \end{aligned}$$

es el límite casi uniforme de la sucesión $(g_{n,p})_{n \in \mathbf{N}}$ sobre A, de donde según la proposición 7 g_p es μ-medible para cada seminorma p.

Finalmente, $(g_p)_p$ converge uniformemente a f sobre A ya que para toda seminorma p_0 se tiene

$$p_0(g_p - f) < 1 \quad \text{sobre} \quad A$$

para toda seminorma $p \geqslant p_0$. Entonces f es $\bar{\mu}$-medible.

11. DEFINICIÓN.—Una aplicación $f\colon \Omega \longrightarrow E$ se dice *esencialmente* ω*-precompacta* si, para todo conjunto A de medida finita y todo entorno V de 0 en E, existe un subconjunto Z de medida nula de A y un conjunto contable $M \subset E$ tales que $f(A - Z) \subset M + V$.

12. PROPOSICIÓN.—*Una función* f *es* $\bar{\mu}$*-medible si y sólo si se verifican:*

12.1. f *es esencialmente* ω*-precompacta.*

12.2. $p \circ (f - x)$ *es* μ*-medible para toda seminorma continua* p *de E y todo* $x \in E$ (*).

DEMOSTRACIÓN.—Sea f una función $\bar{\mu}$-medible. Entonces, para cada $A \in \Sigma_0$, existe una red $(f_i)_{i \in I}$ de funciones μ-medibles que converge uniformemente a f sobre A. Si V es un entorno absolutamente convexo de 0 en E existe un $i_0 \in I$ tal que

$$f(t) - f_i(t) \in V/2$$

para todo $i \geqslant i_0$ y todo $t \in A$.

Fijemos $i \geqslant i_0$, entonces por ser f_i μ-medible existe una sucesión $(K_n)_1^\infty$ de subconjuntos disjuntos y medibles de A tales que

$$\mu\Big(A - \bigcup_n K_n\Big) = 0$$

y

$$f_i = \sum_1^\infty f_i\,\chi_{K_n} + f_i\,\chi_Z$$

sobre A, donde $Z = A - \bigcup_n K_n$ y $f_i\,\chi_{K_n}$ es una función simple.

Como $f_i(K_n)$ es precompacto, dado el entorno V de 0 existe un conjunto finito F_n tal que

$$f_i(K_n) \subset F_n + V/2 .$$

(*) Este teorema para medidas finitas se debe a J. L. de María. Véase [4] y Sion, M. (1973), *A Theory of Semigroup Valued Measures*. «Lect. Notes in Math.», núm. 355, págs. 42-51. Springer-Berlin.

Luego

$$f_i\,(A - Z) \subset M + V/2$$

siendo $M = \bigcup_1^{\infty} F_n$ un conjunto contable. Entonces

$$f\,(A - Z) \subset f_i\,(A - Z) + V/2 \subset M + V/2 + V/2 = M + V\,.$$

De las propiedades 6.1 y 6.3 extendidas para las funciones $\bar{\mu}$-medibles resulta que $p \circ (f - x)$ es μ-medible para toda seminorma continua p de E.

Recíprocamente, sea $f\colon \Omega \longrightarrow E$ una aplicación que cumpla 12.1 y 12.2. Sean $A \in \Sigma_0$, V un entorno absolutamente convexo y cerrado de 0 en E y p su funcional de Minkowski. Entonces existe un conjunto Z de medida nula y un conjunto contable $M = (x_n)_1^{\infty}$ tal que

$$f\,(A - Z) \subset M + V\,.$$

Por tanto, existe una partición $(A_n)_1$ de $A - Z$ en Σ tal que $f(t) - x_n \in V$ para todo $t \in A_n$, y la función

$$f_p = \sum_1^{\infty} x_n\,\chi_{A_n} + f\,\chi_Z$$

es μ-medible y verifica

$$p\,(f_p - f) \leqq 1 \quad \text{sobre} \quad A\,.$$

Luego, para todo $A \in \Sigma_0$, existe una red $(f_p)_p$ de funciones μ-medibles que converge uniformemente a f sobre A, e. d., f es $\bar{\mu}$-medible.

13. Proposición.—*Una función* $f \in \overline{M}\,(\Sigma, \mu, E)$ *si y sólo si se verifica:*

13.1. *Para todo entorno absolutamente convexo U de* 0 *en E,*

$$\pi_U \circ f \in M\,(\Sigma, \mu, E_U)$$

siendo π_U *la aplicación canónica* $E \longrightarrow E_U$.

DEMOSTRACIÓN.—Es obvio que si $f \in \overline{M}(\Sigma, \mu, E)$ se tiene que cada

$$\pi_U \circ f \in \overline{M}(\Sigma, \mu, E_U)$$

y, por tanto, que $\pi_U \circ f \in M(\Sigma, \mu, E_U)$ por ser E_U un espacio normado.

Recíprocamente, supongamos que se verifica 13.1 y que $A \in \Sigma_0$. Entonces, por la proposición 12, para cada seminorma continua p sobre E, existe una familia $(A_i)_{i \in I}$ de conjuntos disjuntos

$$A_i \in \Sigma_A^+ = \{ X \in \Sigma_A : \mu(X) > 0 \}$$

y otra familia $(y_i)_{i \in I}$ de elementos $y_i \in E$ tales que I es contable,

$$Z = A - \bigcup_{i \in I} A_i$$

es de medida nula y

$$p(f(t) - y_i) \leq 1 \quad \text{para todo} \quad t \in A_i \quad (i \in I).$$

Entonces, si

$$f_p = \sum_{i \in I} y_i \chi_{A_i} + f \chi_Z,$$

$(f_p)_p$ es una sucesión de funciones μ-medibles que converge uniformemente a f sobre A. Luego f es $\bar{\mu}$-medible.

14. PROPOSICIÓN.—*Si* $(f_n)_1^\infty$ *es una sucesión de funciones* $\bar{\mu}$*-medibles* $f_n : \Omega \longrightarrow E$ *que converge a* f *en casi todo* Ω, f *es una función* $\bar{\mu}$*-medible.*

DEMOSTRACIÓN.—Nos basaremos en la proposición 12. Es claro que podemos suponer que

$$\lim_n f_n(t) = f(t)$$

para todo $t \in \Omega$. Por ser f_n $\bar{\mu}$-medible, para todo conjunto $A \in \Sigma_0$ y todo entorno absolutamente convexo V de 0 en E, existe un subconjunto Z_n de medida nula de A y un conjunto contable $M_n \subset E$ tales que

$$f_n(A - Z_n) \subset M_n + V/2 .$$

Por tanto, $Z = \bigcup_1^\infty Z_n$ es un subconjunto de medida nula de A y $M = \bigcup_1^\infty M_n \subset E$ es un conjunto contable para los que se verifica

$$f(A - Z) \subset \overline{\bigcup_1^\infty f_n(A - Z_n)} \subset (M + V/2)^-$$
$$\subset M + V/2 + V/2 = M + V .$$

Finalmente, es inmediato que $p \circ (f - x)$ es μ-medible para toda seminorma continua p sobre E y todo $x \in E$.

Bibliografía

[1] Chi, G. Y. H. (1976). On the Radon-Nikodym theorem in locally convex spaces. *Measure theory*, Lec. Notes in Math., n.º 541. Springer, Berlin.

[2] Diestel, J. and Uhl, J. Jr. (1977). Vector Measures. Math. Surveys, **15**. *Amer. Math. Soc.*, Providence, R. I.

[3] Gilliam, D. (1977). On integration and the Radon-Nikodym theorem in quasicomplete locally convex topological vector spaces. *J. Reine Angew. Math.*, **292**, 125-137.

[4] María González, J. L. de (1981). Extensiones al teorema de Egorov. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

[5] Rodríguez-Salinas, B. (1979). Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid*, **73**, 361-387.

[6] Rodríguez-Salinas, B. (1980). El teorema de Radon-Nikodym para las medidas con valores en un espacio localmente convexo. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid*, **74**, 41-64.

[7] Rodríguez-Salinas, B. (1980). La propiedad de Radon-Nikodym, σ-dentabilidad y martingalas en espacios localmente convexos. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid*, **74**, 65-89.

[8] Thomas, E. (1976). Totally summable functions with values in locally convex spaces. *Measure Theory*, Lect. Notes in Math., n.º 541. Springer, Berlin.

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid