(iii) Si $\Phi \notin \Delta_2^\infty$ existe una sucesión α con

$$\lim \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 0 \quad \text{y} \quad \sum_1^\infty \alpha_n < \infty$$

tal que $l^\Phi(\alpha)$ contiene a l^∞.

(iv) Existen una función $\Phi \notin \Delta_2^\infty$ y una sucesión α tales que $l^\Phi(\alpha)$ no contiene a l^∞.

Las demostraciones son análogas a las anteriores con las modificaciones lógicas.

Bibliografía

[1] Hernández Rodríguez, F. L. (1981). Une certaine classe universelle d'espaces d'Orlicz des sequences avec poids. *Comp. Rend.* VI Congrès du Groupement des Mathematiciens d'Expression Latine. Luxembourg.
[2] Lindestrauss, J. y Tzafiri, L. (1977). Classical Banach spaces I. Springer-Verlag.
[3] Woo, J. Y. T. (1973). On modular sequence spaces. *Studia Math.*, t. XLVIII, págs. 271-289.

$\mathcal{H}$-REGULARIDAD PARA MEDIDAS VECTORIALES (*)

José L. de María González
Departamento de Teoría de Funciones, Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense

In this work, we study a type of inner regularity which we call $\mathcal{H}$-regularity, for vector measures on a field Σ valued in X l.c.s., some specific propierties of them, and we characterize the families of uniformly $\mathcal{H}$-regular measures.

El estudio de la regularidad interior surge a partir del auge de las medidas de Radón, y hemos pretendido definir una regularidad lo más general posible para aplicarla a las medidas vectoriales de

(*) Presentada en la sesión de 5 de mayo de 1982.

forma que tuviese propiedades análogas a las de aquéllas. Pueden encontrarse ejemplos de dichas medidas en [1], [4], [6]. Incluso en marcos tan abstractos como son las medidas definidas en semigrupos topológicos dicho concepto tiene gran importancia ([6] y [1]).

Hemos abandonado el caso topológico por el conjuntista de forma que la regularidad se entiende sobre una familia $\mathcal{H}$ cerrada frente a uniones finitas y $\phi \in \mathcal{H}$.

Denotaremos, como es usual, por $|m|_p$ y $\|m\|_p$ a la p-variación y p-semivariación para una seminorma continua p en X, respectivamente, donde X es el e. l. c. donde toman valores las medidas.

Daremos propiedades de la $\mathcal{H}$-regularidad y obtendremos caracterizaciones de las familias de medidas uniformemente $\mathcal{H}$-regulares.

Definición 1.—*Sea* Ω *un conjunto,* Σ *un álgebra de subconjuntos de* Ω, $\mathcal{H}$ *una familia en* Σ *cerrada frente a uniones finitas, tal que* $\phi \in \mathcal{H}$, *X e. l. c. Hausdorff sobre* $\mathbb{K}$, $\mathcal{P}$ *la familia de seminormas continuas en X y* m *una medida finitamente aditiva de* Σ *en X. Diremos que* m *es* $\mathcal{H}$*-regular si:*

(1.1) Para todo $A \in \Sigma$, $\varepsilon > 0$ y $p \in \mathcal{P}$, existe $H \in \mathcal{H}$ tal que si $B \in \Sigma$ y $H \subset B \subset A$, se tiene que $p(m(A - B)) \leqslant \varepsilon$.

Proposición 2.—*En las condiciones de la definición 1 se tiene que si* m *es* $\mathcal{H}$*-regular entonces para todo* p $\in \mathcal{P}$ *y para todo* $A \in \Sigma$

$$|m|_p(A) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} p(m(H_j)) : H_j \in \mathcal{H}, \text{ disjuntos y tal que } \bigcup_{j=1}^{n} H_j \subset A \right\}$$

La demostración se realiza con los cálculos habituales.

Definición 3.—*Una familia* $\mathcal{M}$ *de medidas definidas de* Σ *en X se dice uniformemente* $\mathcal{H}$*-regular si:*

(3.1) Para todo $A \in \Sigma$, para todo $\varepsilon > 0$ y para toda $p \in \mathcal{P}$ existe un $H \in \mathcal{H}$, tal que si $H' \in \Sigma$ y $H \subset H' \subset A$ se tiene que $p(m(A - H')) \leqslant \varepsilon$, para todo $m \in \mathcal{M}$.

Proposición 4.—*Una familia de medidas* $\mathcal{M}$ *es uniformemente* $\mathcal{H}$*-regular si y sólo si dados* $A \in \Sigma$, p $\in \mathcal{P}$ *y* $\varepsilon > 0$ *existe* $H \in \mathcal{H}$ *tal que para todo* $H' \in \Sigma$, $H \subset H' \subset A$

$$\|m\|_p(A - H') \leq \varepsilon, \quad \textit{para todo} \quad m \in \mathcal{M}.$$

DEMOSTRACIÓN.—$\Leftarrow$ | Es inmediato, ya que

$$p(m(A)) \leq \| m \|_p (A)$$

para todo $A \in \Sigma$.

$\Rightarrow$ | Se demuestra fácilmente que por ser m $\mathcal{H}$-regular

$$\sup \{p(m(B)) : B \in \Sigma, \quad B \subset A\} = \sup \{p(m(H)) : H \in \mathcal{H}, \quad H \subset A\}$$

Como $\mathcal{M}$ es uniformemente $\mathcal{H}$-regular, existe $H \in \mathcal{H}$ tal que $p(m(A - H')) \leqslant \varepsilon/8$ para todo $H' \in \Sigma$ con $H \subset H' \subset A$ y para todo m de $\mathcal{M}$.

Si $H^* \in \Sigma$, $H^* \subset A - H'$ se tiene que $p(m(H^*)) \leqslant \varepsilon/4$ y como

$$\| m \|_p (A - H') \leqq 4 \sup \{p(m(M)) : M \subset A - H', \quad M \in \Sigma\}$$

se obtiene la condición deseada, c. q. d.

PROPOSICIÓN 5.—*Una medida* m *de variación acotada es* $\mathcal{H}$*-regular si y sólo si* $| m |_p$ *es* $\mathcal{H}$*-regular para toda* p *de* $\mathcal{P}$.

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que $| m |_p$ es $\mathcal{H}$-regular para toda $p \in \mathcal{P}$ y sea $A \in \Sigma$. Si $\varepsilon > 0$ existe $H \in \mathcal{H}$ tal que $H \subset A$ y $| m |_p (A - H') \leqslant \varepsilon$ para todo $H' \in \Sigma$ con $H \subset H' \subset A$ entonces

$$p(m(A - H')) \leqq | m |_p (A - H') \leqq \varepsilon.$$

El recíproco lo resolvemos por contradicción. Supongamos que existe p de $\mathcal{P}$ tal que para todo $H \in \mathcal{H}$, $H \subset A$ se cumple $| m |_p (A - H) > \varepsilon$, y por tanto

$$| m |_p (A) > | m |_p (H) + \varepsilon.$$

Lo que es contradictorio con la $\mathcal{H}$-regularidad de m, c. q. d.

PROPOSICIÓN 6.—*Sea* m *una medida contablemente aditiva de variación acotada,* Σ *una* σ*-álgebra, entonces* m *es* $\mathcal{H}$*-regular si y sólo si:*

(6.1) Para todo $A \in \Sigma$ y para todo $p \in \mathcal{P}$ existe una sucesión disjunta H_n en $\mathcal{H}$ y Z un conjunto disjunto con los H_n tales que

$$A = \bigcup_n H_n \cup Z,$$

donde Z es un conjunto m-nulo, e. d., si $B \subset Z$ y $B \in \Sigma$ se tiene $p(m(B)) = 0$.

(6.2) $m|_H$ es $\mathcal{H}$-regular para todo $H \in \mathcal{H}$.

DEMOSTRACIÓN.—$\Leftarrow$ | Sea $A \in \Sigma$ y $p \in \mathcal{P}$, entonces existe H_n, $n \in \mathbb{N}$ y Z tales que $A = \bigcup_n H_n \cup Z$ con $p(m(B)) = 0$ si $B \in \Sigma$ y $B \subset Z$. Como $|m|_p$ es contablemente aditiva

$$|m|_p(A) = \sum_{n=1}^{\infty} |m|_p(H_n) + |m|_p(Z).$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n \geqslant n_0$ se tiene

$$|m|_p(A) - |m|_p\left(\bigcup_{n=1}^{n_0} H_n\right) \leq \varepsilon/3$$

Fijados H_j, $j = 1, \ldots, n_0$, por (6.2) existen $H'_1, \ldots, H'_{n_0}$ tales que si $H'_j \subset H_j$, $H'_j \in \mathcal{H}$ y si $B \in \Sigma$ con $H'_j \subset B \subset H_j$,

$$|m|_p(H_j - B) \leq \varepsilon/3\, n_0$$

Si $H^* = \bigcup_{j=1}^{n_0} H'_j$ y $H^* \subset B \subset A$, entonces $|m|_p(A - B) \leqslant \varepsilon$.

El recíproco se demuestra utilizando la proposición 5 y por inducción, c. q. d.

PROPOSICIÓN 7.—*Sea $\mathcal{M}$ una familia uniformemente acotada, uniformemente contablemente aditiva, de medidas de la σ-álgebra Σ valoradas en X. Son equivalentes:*

(7.1) Para cada $p \in \mathcal{P}$ existe una medida μ_p positiva, c. a. y $\mathcal{H}$-regular tal que

$$\lim_{\mu_p(E) \to 0} p(m(E)) = 0$$

uniformemente en $m \in \mathcal{M}$

(7.2) $\mathcal{M}$ es uniformemente $\mathcal{H}$-regular.

DEMOSTRACIÓN.—$\Rightarrow$ | Se demuestra a partir de la $\mathcal{H}$-regularidad de μ_p.

$\Leftarrow$ | Fijamos $p \in \mathcal{P}$ y consideremos el espacio de Banach

$(X/p^{-1}(0))^{\wedge}$ con la norma $\|\pi_p(x)\| = p(x)$, donde π_p es la aplicación canónica lineal de X en $(X/p^{-1}(0))^{\wedge}$.

La familia $\pi_p \circ \mathcal{M}$ de medidas con valores en $(X/p^{-1}(0))^{\wedge}$ es uniformemente acotada y uniformemente contablemente aditiva. Por el teorema 1.2.4 y el corolario 1.2.5 de [2] existe una medida μ_p, c. a., positiva tal que $\pi_p \circ \mathcal{M}$ es μ_p-absolutamente continua y que cumple, dado $E \in \Sigma$,

$$0 \leq \mu_p(E) \leq \sup_{m \in \mathcal{M}} \|\pi_p \circ m\|(E).$$

De la proposición 4 se deduce que μ_p es $\mathcal{H}$-regular, c. q. d.

Dado X e. l. c., X′ el dual continuo de X y fijada una seminorma continua $p \in \mathcal{P}$ denotamos por

$$B'_p = \{x' \in X' : |\langle x, x'\rangle| \leqslant p(x) \quad \text{para todo} \quad x \in X\}$$

Reunamos en un teorema los resultados anteriores. Su demostración se deduce de lo anterior y de la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 8.—*La familia de medidas $\mathcal{M}$ es uniformemente $\mathcal{H}$-regular si y sólo si* $|x' \circ m|$ *es uniformemente $\mathcal{H}$-regular si* $m \in \mathcal{M}$ *y* $x' \in B'_p$ *para cada* $p \in \mathcal{P}$. Observar que Σ no es necesariamente una σ-álgebra en este caso.

TEOREMA 9.—*Sea $\mathcal{M}$ una familia de medidas vectoriales de Σ con valores en X. Los siguientes enunciados son equivalentes*:

1. $\mathcal{M}$ es uniformemente $\mathcal{H}$-regular.
2. Para todo $A \in \Sigma$, $\varepsilon > 0$ y $p \in \mathcal{P}$ existe $H \in \mathcal{H}$ tal que $\|m\|_p(A - H') \leqslant \varepsilon$ para todo $m \in \mathcal{M}$ y todo $H' \in \Sigma$ con $H \subset H' \subset A$.
3. $|x' \circ m|$ es uniformemente $\mathcal{H}$-regular en B'_p y en $\mathcal{M}$, para toda $p \in \mathcal{P}$.
4. $x' \circ m$ es uniformemente $\mathcal{H}$-regular en B'_p y en $\mathcal{M}$, para toda $p \in \mathcal{P}$.

Si suponemos que $\mathcal{M}$ es uniformemente acotada, Σ es una σ-álgebra sobre la que $\mathcal{M}$ es uniformemente contablemente aditiva, los apartados anteriores son equivalentes a:

5. Existe para cada $p \in \mathcal{P}$ una medida μ_p positiva, c. a. y $\mathcal{H}$-regular tal que

$$\lim_{\mu_p(E) \to 0} p(m(E)) = 0 \quad \text{uniformemente en} \quad \mathcal{M}.$$

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al profesor Jiménez Guerra las orientaciones y sugerencias para la realización de este trabajo.

Bibliografía

[1] BELLEY, J. et MORALES, P. (1979). Régularité d'une fonction d'ensembles à valeurs dans un groupe topologique. *Ann. Sc.*, Québec.
[2] DIESTEL, J. and UHL, J. (1977). Vector measures. *Am. Math. Soc.*, Providence.
[3] DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J. (1965). Linear operators. Interscience publishers. Inc., New York.
[4] MORALES, P. (1979). Regularity and extensions of semigroup-valued measures. Lect. Notes in Math., 794.
[5] SCHAEFER, H. (1974). Espacios vectoriales topológicos. Ed. Teide, Barcelona.
[6] SION, M. (1973). A theory of semigroup valued measures. Lect. Notes, 355.

MICROCLIMA DE LA SALA DE POLICROMOS DE LA CUEVA DE ALTAMIRA (*)

E. Villar, A. Bonet, B. Díaz-Caneja, P. L. Fernández, I. Gutiérrez, L. S. Quindos, J. R. Solana y J. Soto

Departamento de Física Fundamental de la Universidad de Santander

Data provided during one year have allowed the description of the microclimate of the Polichromated Room from Altamira's Cave, without visitors. We have realized a study about the temperature field. Particularly, the temperatures of the ceiling respond quantitatively to the periodical oscillations caused by the thermal annual wave propagated from the external surface. Discrepances registered in the temperatures of the floor are quantitatively justified by the radiative interchange ceiling-floor. We have performed determinations of the ambient humidity. We analyze the annual periodic variation of the temperature differences between the

(*) Presentada en la sesión de 12 de mayo de 1982.