POLINOMIOS ORTOGONALES SOBRE LA CIRCUNFERENCIA UNIDAD. LOS CASOS C Y D (*)

M.ª Pilar Alfaro García

Recibido: 1 abril 1981

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

In this paper we study the so-called case C and case D by Akhiezer, from the point of view of the Hilbert spaces, obtaining some geometric characterizations of which there isn't any precedent in the classical theory. From them and in a very simple way, some others of functional character are deduced.

Sea $d\,\sigma(\theta)$ una medida finita y no negativa definida sobre la circunferencia unidad $U = \{z : z = e^{i\theta}\}$ a partir de una función $\sigma(\theta)$ no decreciente, continua por la izquierda y que toma infinitos valores distintos en cualquier intervalo de longitud 2π. El correspondiente L^2_σ contiene, puesto que U es compacto, todas las funciones continuas en U; en particular, si $\Pi(e^{i\theta})$ representa el conjunto de polinomios en $e^{i\theta}$ con coeficientes complejos $\Pi(e^{i\theta}) \subseteq L^2_\sigma$, luego también $\overline{\Pi(e^{i\theta})} \subseteq L^2_\sigma$, condición que da lugar a dos situaciones distintas

$$\overline{\Pi(e^{i\theta})} \subset L^2_\sigma$$

$$\overline{\Pi(e^{i\theta})} = L^2_\sigma$$

que Akhiezer designa como casos C y D respectivamente.

En este trabajo se aborda el estudio de ambas situaciones desde un punto de vista fundamentalmente hilbertiano; con ello se obtienen caracterizaciones de tipo geométrico de las que no hay antecedente en la teoría clásica. De ellas, y de modo muy simple, resultan otras de carácter funcional, que en la citada teoría se deducen con técnicas exclusivamente analítico-funcionales.

(*) Este artículo es parte de la Tesis doctoral de la autora, leída en Zaragoza en julio de 1978 y dirigida por el profesor Dr. D. Luis Vigil y Vázquez.

1. Introducción

El conjunto $\Pi(z)$ de los polinomios en z con coeficientes complejos, con la norma euclídea es un espacio prehilbertiano de funciones definidas en $\mathbb{C}$, en el cual la familia $\{\hat{P}_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ (v. [3]) es un sistema ortonormal. $\overline{\Pi(z)}$ definido formalmente por

$$\overline{\Pi(z)} = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \hat{P}_j(z) : \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j|^2 < +\infty \right\}$$

es el «mínimo» espacio de Hilbert que contiene a $\Pi(z)$. Convendremos en representar sus elementos por f, g, ... dando a la igualdad

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \hat{P}_j$$

únicamente su significado habitual en un espacio de Hilbert. Nada se puede decir, por ahora, del dominio de definición de los elementos $f \in \overline{\Pi(z)} \setminus \Pi(z)$.

El producto escalar $(\circ)$ definido en $\Pi(z)$ (v. [3]) se extiende de manera única a $\overline{\Pi(z)}$, en la forma siguiente:

Si $f, g \in \overline{\Pi(z)}$ siendo

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \hat{P}_j z; \quad g = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \hat{P}_j(z)$$

$$f \circ g = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \bar{\beta}_j$$

y por consiguiente,

$$\|f\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j|^2$$

El teorema de los momentos (v. demostración constructiva en [4]) asegura que al citado producto escalar corresponde en U una única medida de Borel, $d\mu(\theta)$, finita y positiva tal que para cada par de polinomios P (z), Q (z) verifica:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{P}(e^{i\theta})\,\overline{\mathrm{Q}(e^{i\theta})}\, d\mu(\theta) = \mathrm{P}(z) \circ \mathrm{Q}(z)$$

es decir

$$(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \mathrm{P}(z) \circ \mathrm{Q}(z) \qquad \forall\, \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \Pi(z)$$

por lo cual, para cualquier polinomio P (z) se tiene

$$\| \mathrm{P}(e^{i\theta}) \|_{\mu} = \| \mathrm{P}(z) \|$$

donde se utiliza, y lo mismo en lo sucesivo, la notación habitual $\| \ \|_{\mu}$ para la norma en L^2_{μ} y el símbolo $\| \ \|$ para la norma del espacio $\overline{\Pi(z)}$ definido por (1).

Proposición 1.—Sea $\overline{\Pi(e^{i\theta})}$ la L^2_{μ}-clausura del espacio $\Pi(e^{i\theta})$ Los espacios de Hilbert $\overline{\Pi(z)}$ y $\overline{\Pi(e^{i\theta})}$ son isomorfos.

Demostración.—Elijamos $f(z) \in \overline{\Pi(z)}$,

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \hat{\mathrm{P}}_j(z) \quad \text{con} \quad \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j|^2 < +\infty$$

La sucesión

$$\mathrm{F}_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \hat{\mathrm{P}}_j(z)$$

es de Cauchy en $\Pi(z)$ luego

$$\| \mathrm{F}_m(e^{i\theta}) - \mathrm{F}_n(e^{i\theta}) \|_{\mu} = \| \mathrm{F}_m(z) - \mathrm{F}_n(z) \| \longrightarrow 0$$

si $m, n \longrightarrow \infty$. Por tanto, la sucesión $\{\mathrm{F}_n(e^{i\theta})\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy en L^2_{μ} y converge en la norma de dicho espacio a una función $f(e^{i\theta}) \in$ $\in \overline{\Pi(e^{i\theta})}$, verificándose además

$$\|f\| = \|f(e^{i\theta})\|_{\mu}.$$

El mismo razonamiento permite, recíprocamente, asociar a cada función $f(e^{i\theta}) \in \overline{\Pi(e^{i\theta})}$ un elemento f de $\overline{\Pi(z)}$.

La correspondencia así definida,

$$\begin{aligned} \overline{\Pi(z)} &\longrightarrow \overline{\Pi(e^{i\theta})} \\ f &\longrightarrow f(e^{i\theta}) \end{aligned}$$

es isomorfismo entre espacios de Hilbert.

Sea $p \in \mathbb{N}$. La familia ortonormal $\{z^p \hat{P}_j(z)\}_{j=0}^{\infty}$ engendra el subespacio $z^p \Pi(z)$ de $\Pi(z)$. Los elementos de $\overline{z^p \Pi(z)}$ vienen caracterizados mediante:

PROPOSICIÓN 2.—Para cada $p \in \mathbb{N}$, se verifica:

$$f \in \overline{z^p \Pi(z)} \Leftrightarrow z^{-p} f \in \overline{\Pi(z)}$$

donde $z^{-p} f$ representa el elemento de $\overline{\Pi(z)}$ asociado a $e^{-ip\theta} f(e^{i\theta})$ en el isomorfismo ϕ de la proposición 1.

DEMOSTRACIÓN.—Basta tener en cuenta que si

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^p \hat{P}_j(z) \quad \text{con} \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < +\infty$$

$$\left\| f - \sum_{j=0}^{n} a_j z^p \hat{P}_j(z) \right\| = \left\| z^{-p} f - \sum_{j=0}^{n} a_j \hat{P}_j(z) \right\|$$

Por restricción de la aplicación ϕ: $\overline{\Pi(z)} \longleftrightarrow \overline{\Pi(e^{i\theta})}$ a los subespacios respectivos, se obtiene para cada $p \in \mathbb{N}$ un isomorfismo isométrico

$$\phi_p : \overline{z^p \Pi(z)} \longrightarrow \overline{e^{ip\theta} \Pi(e^{i\theta})}$$

es decir,

PROPOSICIÓN 3.—Sea $p \in \mathbb{N}$. Los subespacios de Hilbert.

$$\overline{z^p \Pi(z)}, \quad \overline{e^{ip\theta} \Pi(e^{i\theta})}$$

son isomorfos.

En virtud de los resultados anteriores, las cuestiones relativas a la clausura de los polinomios (o de los subespacios a que se refiere la proposición 3, podrán tratarse bien de manera hilbertiana, bien por procedimientos teórico-funcionales. Ello abre nuevas posibilidades en el estudio de dichas cuestiones, para el que la teoría clásica emplea exclusivamente las técnicas del Análisis Funcional.

2. Caracterización de los casos C y D

Es sabido que la sucesión de los excesos $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ (v. [3]) es monótona no creciente, de términos no negativos. Por tanto, existe $\lim_n e_n \geqslant 0$. Si $\lim_n e_n = e > 0$, diremos que estamos en el caso C, mientras que la situación $\lim_n e_n = 0$ la designaremos como caso D. El empleo de estas denominaciones quedará justificado posteriormente.

PROPOSICIÓN 4.—La sucesión de los n-núcleos de $\Pi(z)$

$$\{\hat{K}_n(z,0)\}_{n=0}^{\infty}$$

es convergente en el caso C y no converge en el caso D.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $m > n$

$$\| \hat{K}_m(z,0) - \hat{K}_n(z,0) \|^2 = (\sqrt{e_m} - \sqrt{e_n})^2 \sum_{i=0}^{n} |\hat{P}_i(0)|^2 + e_m \sum_{i=n+1}^{m} |\hat{P}_i(0)|^2 =$$

$$= 2\left(1 - \sqrt{\frac{e_m}{e_n}}\right) \geq 0$$

ya que

$$|\hat{P}_j(0)|^2 = \frac{1}{e_j} - \frac{1}{e_{j-1}} \quad \text{(v. [3])}.$$

i) Caso C: $\lim e_n = e > 0$.
Cuando $n \longrightarrow \infty$,

$$1 - \sqrt{\frac{e_m}{e_n}} \longrightarrow 0.$$

La sucesión $\{\hat{K}_n(z,0)\}$ es de Cauchy en $\Pi(z)$, luego converge a un elemento de $\overline{\Pi(z)}$ que representaremos por $\hat{K}(z,0)$.

ii) Caso D: $\lim e_n = 0$.

Puesto que la sucesión $\{e_n\}$ converge a cero decreciendo, $\forall\, \varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, existe un m_0 tal que si

$$m \geq m_0, \quad \frac{e_m}{e_n} < \varepsilon.$$

Por consiguiente, para cada n se tendrá

$$\| \hat{K}_m(z, 0) - \hat{K}_n(z, 0) \|^2 = 2\left(1 - \sqrt{\frac{e_m}{e_n}}\right) > 2(1 - \sqrt{\varepsilon}) \quad \text{si} \quad m \geq m_0$$

y la sucesión $\{\hat{K}_n(z, 0)\}_{n=0}^{\infty}$ no es de Cauchy en este caso.

En el caso C existe, pues, un elemento de $\overline{\Pi(z)}$ definido como sigue:

$$\hat{K}(z, 0) = \lim_n \hat{K}_n(z, 0) \tag{2}$$

Los productos escalares en que aparece $\hat{K}(z, 0)$ podrán calcularse utilizando (2). En particular, se tienen los siguientes resultados de los que haremos uso en lo que sigue:

$$1) \qquad P(z) \circ \hat{K}(z, 0) = \sqrt{e}\, P(0) \qquad \forall\, P \in \Pi(z)$$

En particular, $z^p\, P(z) \circ \hat{K}(z, 0) = 0$

$$2) \qquad z^p f \circ \hat{K}(z, 0) = 0 \qquad \forall f \in \overline{\Pi(z)}.$$

$$3) \qquad z^m \hat{K}(z, 0) \circ z^n \hat{K}(z, 0) = \delta_{mn} \qquad n, m \in \mathbb{N} \tag{3}$$

$$4) \qquad z^{-m} \hat{K}(z, 0) \circ z^{-n} \hat{K}(z, 0) = \delta_{mn} \qquad m, n \in \mathbb{N}$$

Proposición 5.—Los casos C y D vienen caracterizados por las siguientes relaciones conjuntistas:

$$\lim_n e_n > 0 \Longleftrightarrow \overline{\Pi(z)} \setminus \overline{z\,\Pi(z)} \neq \emptyset$$

$$\lim_n e_n = 0 \Longleftrightarrow \overline{\Pi(z)} = \overline{z\,\Pi(z)}$$

DEMOSTRACIÓN.—Referido el espacio $\Pi_n(z)$ $(n \in \mathbb{N})$ a la base

$$B_1^{(n)} = (\{z\,\hat{P}_i(z)\}_{i=0}^{n-1},\ \hat{K}_n(z,0)) \quad (\text{v. [5]}),$$

para $1 \in \Pi_n(z)$ se obtiene la expresión

$$1 = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{\tau_{i+1}}\, z\,\hat{P}_i(z) + \sqrt{e_n}\,\hat{K}_n(z,0) \tag{4}$$

donde $\{\tau^h\}_{h=1}^{\infty}$ es la familia de parámetros definida en [3] por:

$$\tau_h = z\,\hat{P}_{h-1} \circ 1 \qquad h = 1, 2, \ldots$$

Puesto que $1 \in \Pi_m(z)$ $\forall\, m \geqslant n$, admitirá una expresión de tipo (4) en la correspondiente base $B_1^{(m)}$ de cada $\Pi_m(z)$ con $m \geqslant n$, por lo que es posible pasar al límite en (4) cuando $n \longrightarrow \infty$.

i) Caso C: $\lim e_n = e > 0$.

Siendo

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\tau_i|^2 \leq e_0 \quad (\text{v. [3]}),$$

la sucesión

$$S_{n-1}(z) = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{\tau_{i+1}}\, z\,\hat{P}_i(z)$$

es convergente en $z\,\Pi(z)$ y puesto que $\{\sqrt{e_n}\,\hat{K}_n(z,0)\}_{n=0}^{\infty}$ también converge en este caso, para $1 \in \overline{\Pi(z)}$ se tiene la expresión

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\tau_{i+1}}\, z\,\hat{P}_i(z) + \sqrt{e}\,\hat{K}(z,0)$$

Por ser $\hat{K}(z,0) \perp \overline{z\,\Pi(z)}$, como se sigue de (3), resulta que $1 \notin \overline{z\,\Pi(z)}$, así que $\overline{\Pi(z)} \setminus \overline{z\,\Pi(z)} \neq \varnothing$.

ii) Caso D: $\lim e_n = 0$.

Se deduce de (4) que

$$\left\| 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \overline{\tau_{i+1}}\, z\,\hat{P}_i(z) \right\|^2 = e_n$$

luego

$$\lim_n \left\| 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \overline{\tau_{i+1}}\, z\, \hat{P}_i(z) \right\|^2 = 0$$

y

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\tau_{i+1}}\, z\, \hat{P}_i(z) \in \overline{z\, \Pi(z)}$$

En estas condiciones, para cualquier $P(z) \in \Pi(z)$, escrito en la forma

$$P(z) = z\, Q(z) + P(0)$$

se tiene

$$P(z) \in z\, \Pi(z) + \overline{z\, \Pi(z)} \subset \overline{z\, \Pi(z)}$$

con lo cual, $\Pi(z) \subset \overline{z\, \Pi(z)}$ y también $\overline{\Pi(z)} \subset \overline{z\, \Pi(z)}$. Por tanto, en el caso D, $\overline{\Pi(z)} = \overline{z\, \Pi(z)}$.

Esta proposición se generaliza de modo natural como sigue:

PROPOSICIÓN 6.—Para cualquier $p \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\lim_n e_n = \quad > 0 \Longleftrightarrow \overline{z^p\, \Pi(z)} \setminus \overline{z^{p+1}\, \Pi(z)} \neq \emptyset$$

$$\lim_n e_n = 0 \Longleftrightarrow \overline{z^p\, \Pi(z)} = \overline{z^{p+1}\, \Pi(z)}.$$

DEMOSTRACIÓN.—Basta utilizar un razonamiento análogo al de la proposición 5, a partir de la expresión del elemento $z^p \in \Pi_n(z)$ $(0 < p < n)$ en la base $B_p^{(n)}$ (v. [5]) de dicho espacio.

COROLARIO 6.1.—Los casos C y D están caracterizados por las siguientes relaciones conjuntistas:

Caso C:

$$\overline{\Pi(z)} \supset \overline{z\, \Pi(z)} \supset \overline{z^2\, \Pi(z)} \supset \dots \supset \overline{z^p\, \Pi(z)} \supset \dots$$

(estrictamente).

Caso D:

$$\overline{\Pi(z)} = \overline{z\, \Pi(z)} = \overline{z^2\, \Pi(z)} = \dots = \overline{z^p\, \Pi(z)} = \dots$$

Con la proposición siguiente se justifica el empleo desde un principio de la denominación de Akhiezer «casos C y D» para designar las situaciones $\lim_n e_n > 0$, $\lim_n e_n = 0$.

PROPOSICIÓN 7.—Los casos C y D vienen caracterizados por las relaciones:

Caso C: $L^2_\mu \setminus \overline{\Pi(e^{i\theta})} \neq \emptyset$.

Caso D: $L^2_\mu = \overline{\Pi(e^{i\theta})}$.

DEMOSTRACIÓN.—Caso C: Puesto que $1 \in \overline{\Pi(z)} \setminus \overline{z\,\Pi(z)}$, 1 no es aproximable mediante elementos de $z\,\Pi(z)$. Ello se traduce en L^2_μ en que para cualquier sucesión $\{Q_n(e^{i\theta})\}_{n=0}^{\infty}$ de $\Pi(e^{i\theta})$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo n,

$$\| 1 - e^{i\theta} Q_n(e^{i\theta}) \|_\mu \geq \varepsilon$$

Pero siendo

$$\| 1 - e^{i\theta} Q_n(e^{i\theta}) \|_\mu = \| e^{-i\theta} - Q_n(e^{i\theta}) \|_\mu$$

resulta que $e^{-i\theta}$ no es aproximable en L^2_μ mediante elementos de $\Pi(e^{i\theta})$, así que

$$e^{-i\theta} \in L^2_\mu \setminus \overline{\Pi(e^{i\theta})}$$

lo que asegura

$$L^2_\mu \setminus \overline{\Pi(e^{i\theta})} \neq \emptyset.$$

Caso D: Puesto que $1 \in \overline{z^p\,\Pi(z)}\ \forall\, p \in \mathbb{N}$, para cada p existe una sucesión de polinomios $\{Q_n^{(p)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ tal que la correspondiente sucesión de L^2_μ satisface:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \| 1 - e^{ip\theta} Q_n^{(p)}(e^{i\theta}) \|_\mu = \| e^{-ip\theta} - Q_n^{(p)}(e^{i\theta}) \|_\mu < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geq n_p.$$

Por consiguiente, $e^{-ip\theta} \in \overline{\Pi(e^{i\theta})}$, $p = 1, 2, \ldots$ Dado el carácter lineal del espacio $\overline{\Pi(e^{i\theta})}$, a él pertenecerán todos los pseudopolinomios $\sum_{h=-m}^{n} a_h e^{ih\theta}$, y como consecuencia del teorema de Weierstrass, también todas las funciones continuas sobre U. Finalmente, puesto que tales funciones continuas constituyen un subconjunto denso de L^2_μ, se tendrá $L^2_\mu \subset \overline{\Pi(e^{i\theta})}$ y, por tanto, $L^2_\mu = \overline{\Pi(e^{i\theta})}$.

Resulta inmediatamente:

COROLARIO 7.1.—El sistema ortonormal $\{\hat{P}_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ es completo en L^2_μ si y sólo si $\lim_n e_n = 0$.

Finalmente, puesto que en cualquier caso es válida la descomposición

$$L^2_\mu = \overline{\Pi(e^{i\theta})} \oplus [\overline{\Pi(e^{i\theta})}]^\perp$$

(donde la notación $[\ ]^\perp$ indica complemento ortogonal respecto a L^2_μ), de la proposición anterior se deduce

PROPOSICIÓN 8.—Los casos C y D están caracterizados respectivamente por las condiciones:

$$[\overline{\Pi(e^{i\theta})}]^\perp \neq \{\overline{0}\}$$

$$[\overline{\Pi(e^{i\theta})}]^\perp = \{\overline{0}\}$$

Las distintas caracterizaciones obtenidas para los casos C y D, se recogen en el cuadro siguiente:

	Caso C		Caso D
(1)	$\lim_n e_n > 0$	(1)	$\lim_n e_n = 0$
(2)	$\exists \lim_n \hat{K}_n(z, 0)$	(2)	$\nexists \lim_n \hat{K}_n(z, 0)$
(3)	$\overline{\Pi(z)} \setminus \overline{z\,\Pi(z)} \neq \varnothing$	(3)	$\overline{\Pi(z)} = \overline{z\,\Pi(z)}$
(4)	$\overline{z^p\,\Pi(z)} \setminus \overline{z^{p+1}\,\Pi(z)} \neq \varnothing$ $(p \in \mathbb{N})$	(4)	$\overline{z^p\,\Pi(z)} = \overline{z^{p+1}\,\Pi(z)}$ $(p \in \mathbb{N})$
(5)	$L^2_\mu \setminus \overline{\Pi(e^{i\theta})} \neq \varnothing$	(5)	$L^2_\mu = \overline{\Pi(e^{i\theta})}$
(6)	$[\overline{\Pi(e^{i\theta})}]^\perp \neq \{\overline{0}\}$	(6)	$[\overline{\Pi(e^{i\theta})}]^\perp = \{\overline{0}\}$

3. Los casos C y D en términos de $\overline{\Pi (1/z)}$

Es claro que dada cualquier distribución $\sigma(\theta)$ en las condiciones exigidas al principio, $\Pi(1/z) \subset L^2_\sigma$, con lo cual disponemos en $\Pi(1/z)$ de un producto escalar restricción del definido en L^2_σ.

Por otra parte, establecido el producto escalar en $\Pi(z)$ mediante alguna de sus propiedades características (v. [3]), la relación

$$\frac{1}{z^n} \circ \frac{1}{z^m} = z^m \circ z^n \qquad n, m = 0, 1, \ldots$$

define un producto escalar en $\Pi(1/2)$, cuya matriz asociada es la traspuesta de la inicialmente dada. Recíprocamente, la definición de un producto escalar en $\Pi(1/z)$ mediante una matriz hermitiana, definida positiva de Toeplitz, m' (traspuesta de m), establece el producto escalar de $\Pi(z)$ con matriz m asociada.

Ahora bien, siendo $\mu(\theta)$ la distribución asociada a m (§ 1),

$$\frac{1}{z^n} \circ \frac{1}{z^m} = z^m \circ z^n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\theta}\, e^{-in\theta}\, d\mu(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\, \overline{e^{-im\theta}} = \left(\frac{1}{z^n}, \frac{1}{z^m}\right)$$

luego también el producto escalar definido en $\Pi(1/z)$ por m' coincide con la restricción del de L^2_μ a dicho espacio.

Como consecuencia, las situaciones

$$\overline{\Pi(e^{-i\theta})} \subset L^2_\mu$$

$$\overline{\Pi(e^{-i\theta})} = L^2_\mu$$

pueden ser objeto de un estudio análogo al realizado en los párrafos anteriores. Sin embargo, los resultados obtenidos para $\Pi(z)$ se trasladan de modo muy directo a $\Pi(1/z)$ si se tiene en cuenta:

PROPOSICIÓN 9.—i) Existe una biyección

$$B : \overline{\Pi(z)} \longrightarrow \overline{\Pi(1/z)}$$

en la que son elementos homólogos $f \in \overline{\Pi(z)}$ y $f_- \in \overline{\Pi(1/z)}$ caracterizados como sigue:

$$\text{si} \quad f = \lim_m F_m(z), \quad F_m(z) \in \Pi(z) \quad \forall\, m$$

$$f_- = \lim_m F_{-m}(z) \quad \text{siendo} \quad F_{-m}(z) = \overline{F}_m(1/z) \in \Pi(1/z) \quad \forall\, m.$$

ii) Se verifica $f_- \circ g_- = g \circ f$. Por tanto, B es isomorfismo entre espacios de Hilbert.

DEMOSTRACIÓN.—i) Basta notar que las sucesiones

$$\{F_m(z)\}_{m=1}^{\infty}, \quad \{F_{-m}(z)\}_{m=1}^{\infty}$$

son simultáneamente de Cauchy en los respectivos espacios $\Pi(z)$ y $\Pi(1/z)$ ya que

$$\| F_{-m}(z) - F_{-n}(z) \|^2 = \| F_{-m}(e^{i\theta}) - F_{-n}(e^{i\theta}) \|^2_{\mu} = \| F_m(z) - F_n(z) \|^2$$

ii) Si $g = \lim_m G_m(z)$ con $G_m(z) \in \Pi(z)$ $\forall\, m$,

$$f_- \circ g_- = \lim_m (F_{-m} \circ G_{-m}) = \lim_m \int_{-\pi}^{\pi} \overline{F_m(e^{i\theta})}\, G_m(e^{i\theta})\, d\mu(\theta) = g \circ f.$$

Las caracterizaciones que resultan se recogen en la tabla siguiente en que

$$\hat{K}_{-n}(z, \infty) = \sqrt{e_n} \sum_{j=0}^{n} \hat{P}_j(0)\, \hat{P}_{-j}(z),$$

siendo $\{\hat{P}_{-n}(z)\}$ el n-ésimo polinomio de la sucesión ortonormal asociada al producto escalar definido en dicho espacio (v. [5]).

Caso C		Caso D	
(1)	$\lim_n e_n > 0$	(1)	$\lim_n e_n = 0$
(2)	$\exists \lim_n \hat{K}_{-n}(z, \infty)$	(2)	$\nexists \lim_n \hat{K}_{-n}(z, \infty)$
(3)	$\overline{\Pi(1/z)} \setminus \overline{z^{-1}\Pi(1/z)} \neq \emptyset$	(3)	$\overline{\Pi(1/z)} = \overline{z^{-1}\Pi(1/z)}$
(4)	$\overline{z^{-p}\Pi(1/z)} \setminus \overline{z^{-(p+1)}\Pi(1/z)} \neq \emptyset$ $(p \in \mathbb{N})$	(4)	$\overline{z^{-p}\Pi(1/z)} = \overline{z^{-(p+1)}\Pi(1/z)}$ $(p \in \mathbb{N})$
(5)	$L^2_\mu \setminus \overline{\Pi(e^{-i\theta})} \neq \emptyset$	(5)	$L^2_\mu = \overline{\Pi(e^{-i\theta})}$
(6)	$[\overline{\Pi(e^{-i\theta})}]^\perp \neq \{\overline{0}\}$	(6)	$[\overline{\Pi(e^{-i\theta})}]^\perp = \{\overline{0}\}$

Bibliografía

[1] Akhiezer, N. I. (1965). The classical Moment Problem. Univ. Math. Mon.; Oliver & Boyd. Londres.

[2] Akhiezer, N. I. y Krein. (1968). Some problems of the theory of moments. *Am. Math. Soc. Trans. Math. Mon.* Vol. **2**.

[3] Alfaro, M. (1974). Teoría paramétrica de polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad. *Rev. Acad. Ci. Zaragoza*, (2) **29**, 5-79.

[4] Alfaro, M. A positive distribution on the unit circle associated to a Toeplitz hermitian positive definite matrix. Pendiente de publicación.

[5] Alfaro, M. P. Fórmulas de recurrencia y sumación de orden *p* para polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad. Pendiente de publicación.

[6] Berberian, S. K. (1970). Introducción al espacio de Hilbert. Teide.

[7] Freud, G. (1971). Orthogonal polynomials. Pergamon Press, Londres.

[8] Geronimus, Ya. L. (1961). Orthogonal polynomials. Consultants Bureau. Nueva York.

[9] Halmos, P. (1957). Introduction to Hilbert Space. Chelsea Publishing Company. Nueva York.

[10] Rudin, W. (1970). Real and Complex Analysis. Mc Graw-Hill, Londres.

[11] Vigil, L. (1969). Sobre propiedades de Polinomios Ortogonales. Sumatoria y Recurrencia. *Rev. Real Acad. Ci. Madrid*, T. LXIII, cuad. 1.°