UNA CARACTERIZACION DEL INVARIANTE (X, G, A)

Luis A. Sarabia

Recibido: 4 marzo 1981

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

Introducción

Sea G un grupo y X un conjunto cualquiera. En este trabajo una medida μ en X será una aplicación de $\mathscr{P}$ (X) en $[0, \infty]$ finitamente aditiva. Al actuar G sobre X como grupo de permutaciones diremos que μ es G-invariante si $\mu (g (B)) = \mu (B)$, para todo $B \subset X$ y todo g de G. Por un invariante (X, G, A) entenderemos una medida μ en $\mathscr{P}$ (X), G-invariante y tal que $\mu (A) = 1$, $A \subset X$ no vacío.

En el trabajo de J. M. Rosenblatt [3] se ha utilizado la propiedad S (A, ε) (def. 2.4) como condición suficiente para que si un grupo G es medible, exista un (X, G, A). Actualmente (proposición 2.6) demostramos que si la propiedad S (B, ε) es cierta para todo B mutuamente acotado con A (def. 2.5) entonces existe (X, G, A) y recíprocamente.

1. El invariante (X, G, A)

El problema de la existencia de un invariante puede establecerse (véase [3]) en los siguientes términos: Sea X cualquiera, G actúa sobre X y A un subconjunto no vacío de X. Diremos que $B \subset X$ es A-acotado si existen $g_1, g_2, \ldots, g_n$ de G y $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} g_i A$.

B_A (X) es el conjunto de las funciones reales acotadas, definidas en X, tales que su soporte es A-acotado. B_A (X) es espacio vectorial para la suma puntual de funciones y el producto por escalares reales. En esta situación G actúa como un grupo de transformaciones lineales en $B_A(X)$ haciendo $(g f)(x) = f(g^{-1}(x))$, $g \in G$, $f \in B_A(X)$ y $x \in X$.

Un funcional lineal Φ en $B_A(X)$ es G-invariante si $\Phi(gf) = \Phi(f)$ para todo g de G y f de $B_A(X)$.

El orden en $B_A(X)$ es el usual, es decir $f \geqslant 0$ si y solamente si $f(x) \geqslant 0$, para todo $x \in X$ y un funcional lineal Φ en $B_A(X)$ es positivo si cuando $f \geqslant 0$ entonces $\Phi(f) \geqslant 0$.

1.1. Proposición.—Existe una medida μ en X, G-invariante tal que $\mu(A) = 1$. $A \subset X$ y $A \neq \emptyset$ si y solamente si existe un funcional lineal Φ, positivo, G-invariante definido en $B_A(X)$ y tal que $\Phi(I_A) = 1$.

2. La caracterización

Sean L y L′ dos retículos en $\mathcal{P}(X)$, es decir dos clases de subconjuntos de X cerrados para la unión e intersección finitas tales que $L \subset L'$. Diremos que el par (L, L′) tiene la «propiedad de la extensión interior» si para toda medida acotada μ definida en L, la restricción de μ_* a L′ es una medida acotada en L′. Es necesario precisar que para las dos proposiciones siguientes la aditividad lo es en el sentido fuerte:

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \forall\, A, B \in L.$$

Si la clase en que está definida μ es cerrada por complementación, la aditividad fuerte es equivalente a la definición usual dada en la introducción.

Diremos que el par (L, L′) tiene la propiedad «intertwining» si para cualesquiera B, C_i $(i = 1, 2)$ de L y L′ respectivamente, cumpliendo $B \subset C_1 \cup C_2$ existen B_i $(i = 1, 2)$ de L de modo que $B_i \subset C_i$ y $B = B_1 \cup B_2$.

2.1. Proposición.—Un par de retículos (L, L′) que contengan al vacío tienen la propiedad de la «extensión interior» si y solamente si tiene la propiedad «intertwining».

La demostración puede verse en [2]. Unas sencillas modificaciones permiten enunciar:

2.2. PROPOSICIÓN.—Un par de retículos (L, L′) que contengan al total X, tienen la propiedad de la «extensión exterior» si y solamente si cumplen: Para cualesquiera B de L, C_i ($i = 1, 2$) de L′ tales que $B \supset C_1 \cap C_2$, existen B_i ($i = 1, 2$) de L cumpliendo $B_i \supset C_i$ ($i = 1, 2$) y $B = B_1 \cap B_2$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea μ fuertemente aditiva en L y μ^* la restricción de la medida exterior a L′, μ^* es acotada y monótona. Veamos que en L′:

(1)

$$\mu^* (C_1 \cup C_2) + \mu^* (C_1 \cap C_2) \geq \mu^* (C_1) + \mu^* (C_2)$$

para ello sean M y N de L tales que $M \supset C_1 \cup C_2$ y $N \supset C_1 \cap C_2$, bastará probar que:

(1′)

$$\mu (M) + \mu (N) \geq \mu^* (C_1) + \mu^* (C_2)$$

Ahora bien, $N \supset C_1 \cap C_2$ y por hipótesis existen N_1 y N_2 en L tales que $N = N_1 \cap N_2$ y $N_i \supset C_i$ ($i = 1, 2$); consideremos

$$N'_i = N_i \cap M \quad (i = 1, 2),$$

es claro que los N'_i son de L y además:

$$N'_1 \cup N'_2 \subset M : N'_1 \cap N'_2 \subset N_1 \cap N_2 = N ; \quad N'_i \cap C_i \quad (i = 1, 2),$$

de estas contenciones y la aditividad fuerte de μ en L se sigue (1′).

La desigualdad en sentido contrario a la de (1) es evidente y con ello la aditividad fuerte de μ^* en L′ está demostrada.

Para el recíproco razonaremos por reducción al absurdo, por tanto:

(2) Existen B_0 de L, C_1, C_2 de L′ cumpliendo $B_0 \supset C_1 \cap C_2$ mientras que para todo B_1, B_2 de L que contengan a C_1, C_2 respectivamente $B_0 \neq B_1 \cap B_2$.

Trivialmente ni C_1 ni C_2 pueden ser el vacío.

Definimos las clases

$$\mathcal{U}_i = \{ B \in L / B \supset C_i \} \quad (i = 1, 2) \quad \mathcal{U}_0 = \{ B_1 \cap B_2 / B_i \in \mathcal{U}_i \}.$$

(3) $\mathcal{U}_0$ es no vacía porque el total X está en $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$. Además es cerrada por intersección finita.

(4) El vacío no pertenece a $\mathcal{U}_0$ en otro caso existirán en L $B_1 \supset C_1$ y $B_2 \supset C_2$ disjuntos, entonces los conjuntos

$$B'_i = B_i \cup B_0 \quad (i = 1, 2)$$

siendo B_0 el de (2) cumplen

$$B'_i \supset C_i \quad (i = 1, 2) \quad B'_i \in L \quad \text{y} \quad B'_1 \cap B'_2 = B_0$$

en contra de (2).

(5) Un razonamiento similar muestra que para todo $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{U}_0$,

$$B^c_0 \cap (B_1 \cap B_2) \neq \varnothing$$

Después de (3), (4) y (5) sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en $\mathcal{P}$ (X) que contenga a $\mathcal{U}_0$ y a B^c_0 y sea μ la medida asociada. Consideremos la restricción de μ a L, la correspondiente μ^* en L′ cumplirá:

$$\mu^*(C_1 \cup C_2) + \mu^*(C_1 \cap C_2) = 1 + 0 = 1$$

distinto de $\mu^*(C_1) + \mu^*(C_2) = 2$, es decir el par (L, L′) no tiene la propiedad de la «extensión exterior».

Antes de continuar nos parece preciso advertir que la condición de que sea acotada y la de que el vacío (en su caso el total) pertenezca a los retículos no son esenciales. La razón de ambas es evitar complicaciones en la definición de la medida interior (exterior). De hecho podríamos sustituirlas por la expresión «siempre que μ, L, L′ sean tales que μ_* (respectivamente μ^*) restringida a L′ esté bien definida a partir de los valores de μ en L...».

2.3. Proposición [1].—Sea E un espacio vectorial ordenado, con el cono asociado $K = \{f \in E / f \geqslant 0\}$ y G un grupo de transformaciones de E. Definimos el cono

$$W = \{ \omega \in E / \omega = f_0 + (f_1 - g_1 f_1) + \cdots + (f_k - g_k f_k) : \\ f_0 \in K, f_h \in E, \ g_h \in G, \ h = 1, \ldots, k \}$$

que contiene a K.

Sea F un subespacio de E, Π un funcional sublineal en E y Φ un funcional lineal en F. Con estas hipótesis son equivalentes:

a) Existe una extensión lineal $\tilde{\Phi}$ de Φ a todo E tal que $\tilde{\Phi}$ es positiva, invariante y $\tilde{\Phi}(f) \leqslant \Pi(f)$.

b) $\Phi(f) \leqslant \Pi(f + \omega)$ para todo f de F y todo ω de W.

2.4. DEFINICIÓN [3].—Dado $B \subset X$, no vacío, y ε real positivo, diremos que se cumple la propiedad S (B, ε) si para cualquier subconjunto finito de G, $\{g_1 \ldots g_n\}$ existe un subconjunto finito de X (que anotaremos por S (B, ε)) tal que

$$\frac{\operatorname{card} S(B, \varepsilon) \cap g_i B}{\operatorname{card} S(B, \varepsilon) \cap B} \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \qquad i = 1, 2 \ldots, n.$$

2.5. DEFINICIÓN.—Dado $B \subset X$ diremos que es mutuamente acotado con A si B es A-acotado y A es B-acotado, es decir si existen $g_1, \ldots, g_n, g'_1, \ldots, g'_m$ de G de modo que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} g_i B \quad \text{y} \quad B \subset \bigcup_{j=1}^{m} g'_j A.$$

2.6. PROPOSICIÓN.—Existe un invariante (X, G, A) si y solamente si para todo $\varepsilon > 0$, ε real y todo B de X mutuamente acotado con A, se cumple la propiedad S (B, ε).

LEMA.—Sea Φ el invariante (X, G, A) caracterizado en la proposición 1.1 y B mutuamente acotado con A. Entonces:

(1) $0 < \Phi(I_B) < \infty$.

(2) Si $g_1, \ldots, g_r$ de G son tales que $\bigcup_{i=1}^{r} g_i B \subset B$ entonces $\bigcap_{i=1}^{r} g_i B$ es no vacío, más todavía

$$\Phi(I_B) = \Phi(I_{\bigcap_{i=1}^{r} g_i B}).$$

DEMOSTRACIÓN.—Desde luego I_B es de $B_A(X)$, por tanto tiene sentido $\Phi(I_B)$ y también $\Phi(I_{\bigcap_{i=1}^{r} g_i B})$ así como $\Phi(I_{\bigcup_{i=1}^{r} g_i B})$.

Según hemos definido la mutua acotación (2.5)

$$1 = \Phi\,(I_A) \leqq \Phi\,\Big(\sum_{i=1}^{n} I_{g_i\,B}\Big) = n\,\Phi\,(I_B),$$

luego $\Phi\,(I_B) \geqslant \dfrac{1}{n} > 0$. Y también

$$\Phi\,(I_B) \leqq m\,\Phi\,(I_A) = m < \infty$$

Es claro que la segunda parte de (2) incluye a la primera afirmación, después que $\Phi\,(I_B)$ es estrictamente positivo.

Procedemos a establecer (2) por inducción. Para $r = 2$

$$\Phi\,(I_B) \geqq \Phi\,(I_{g_1 B \cup g_2 B}) = 2\,\Phi\,(I_B) - \Phi\,(I_{g_1 B \cap g_2 B}),$$

luego

$$\Phi\,(I_B) \leqq \Phi\,(I_{g_1 B \cap g_2 B}).$$

La otra desigualdad se sigue de la positividad de Φ.

Supongamos que es cierta para $r - 1$. De que

$$I_{\bigcap_{i=1}^{r-1} g_i B} + I_{g_r B} - I_{\bigcap_{i=r}^{r} g_i B} = I_{\left(\bigcap_{i=1}^{r-1} g_i B\right) \cup g_r B} \leqq I_B$$

se sigue

$$2\,\Phi\,(I_B) - \Phi\,(I_{\bigcap_{i=1}^{r} g_i B}) \leqq \Phi\,(I_B),$$

luego

$$\Phi\,(I_B) \leqq \Phi\,(I_{\bigcap_{i=1}^{r} g_i B}).$$

De nuevo la otra desigualdad es trivial.

Demostración de la proposición.—Sea B mutuamente acotado con A y Φ el invariante (X, G, A). Sea $g_1, \ldots, g_n$ un conjunto finito cualquiera de G. Por convenio de notación pondremos g_0 B = B. Después de (2) del lema podemos suponer que los g_i B no verifican relaciones de contención ya que la elección de puntos para formar el S (B, ε) la podemos hacer indistintamente en g_i B o en la intersección de los g_j B contenidos en él.

Distingamos dos casos: a) Alguno de los g_i B (I = 0, 1, ..., n) está recubierto casi seguro (*) por varios, eventualmente todos, los restantes.

b) No es éste el caso.

Cuando b) existe en cada g_i B un punto x_i que no está en los restantes, de modo que tomando S (B, ε) = $\{x_0, x_i, \ldots, x_n\}$ está resuelta la cuestión porque

$$\text{card}\,[S\,(B,\varepsilon) \cap B] = \text{card}\,[S\,(B,\varepsilon) \cap g_i\,B] = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Cuando se dé a) en cada g_i B (i = 0, 1, ..., n) consideramos la partición más fina $\mathcal{P}_i$ generada por el corte con él de los demás g_j B, trasladamos estas particiones mediante las aplicaciones g_i^{-1} a B = g_0 B con lo que obtendremos una partición $\mathcal{P}$ finita, más fina que todas, en B. Obviamente los conjuntos de $\mathcal{P}$ no pueden ser todos casi seguro nulos.

(1) Sean C_1, C_h $(0 < h)$ los elementos de $\mathcal{P}$, tales que $\Phi(I_{C_i}) > 0$.

Unas sencillas consecuencias de la invarianza de Φ por G, su linealidad y la positividad estricta sobre los I_{C_i} (i = 1, ..., h) son:

(2) card $\{g_i C_1, \ldots, g_i C_h\}$ = card $\{C_1, \ldots, C_h\}$ $i = 0, 1, \ldots, n$.

(3) Los $g_i C_1, \ldots, g_i C_h$ son disjuntos y recubren casi seguro a g_i B, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Con estas indicaciones, construimos S (B, ε) de la siguiente forma:

Sea $S_0 = \{x_1, \ldots, x_h\}$ obtenido seleccionando un punto en cada

$$C_i;\ i = 1, \ldots, h;\quad S_0 \subset g_0\,B = B\,.$$

Consideremos g_1 B, si no corta casi seguro a B tomamos un punto $x^1{}_j$ en cada uno de los $g_1 C_j$, $j = 1, \ldots, h$. En caso contrario como B ∩ g_1 B es unión de varios C_j supongamos que sean

$$C_1, \ldots, C_{r_1} \quad (r_1 \leq h)$$

(*) Entendemos que C es casi seguro nulo si $\Phi(I_C) = 0$.

quienes cumplen

$$\sum_{j=1}^{r_1} g_1\, C_j = B \cap g_1\, B ;$$

tomamos un punto $x^1{}_j$ en cada uno de los restantes

$$g_1\, C_j, \quad j = r_1 + 1, \ldots, h,$$

que recubren casi seguro a g_1 B — B. De este modo disponemos en g_1 B de h puntos: los $x^1{}_{r_1+1}, \ldots, x^1{}_h$ anteriores y

$$x^1{}_1 = x_1, \ldots, x^1{}_{r_1} = x_{r_1}$$

comunes con B. El conjunto

$$S_1 = \} x_1, \ldots, x_h, x^1{}_{r_1+1}, \ldots, x^1{}_h \{$$

cumple:

$$\text{card}\,[S_1 \cap B] = \text{card}\,[S_1 \cap g_1\, B] = h.$$

Consideremos g_2 B. Si es casi seguro disjunto de g_1 B $\cup$ B tomamos un punto $x_j{}^2$ en cada uno de los $g_2\, C_j$ ($j = 1, \ldots, h$). En caso contrario de entre los C_j eliminamos aquellos que cumplan

$$\sum_{j=1}^{r_2} g_2\, C_j = (g_1\, B \cup B) \cap g_2\, B,$$

los restantes

$$g_2\,(C_{r_2+1}), \ldots, g_2\,(C_h)$$

recubren casi seguro a g_2 B — (g_1 B $\cup$ B), tomamos un punto en cada uno de ellos $x^2{}_{r_2+1}, \ldots, x^2{}_h$, finalmente en S_1 habrá r_2 puntos correspondientes a g_2 B $\cap$ B y a (g_2 B — B) $\cap$ g_1 B. Con esto tenemos un conjunto

$$S_2 = \} x_1, \ldots, x_h, \quad x^1{}_{r_1+1}, \ldots, x^1{}_h, \quad x^2{}_{r_2+1}, \ldots, x^2{}_h \{$$

que cumple

$$\text{card}\,[S_2 \cap B] = \text{card}\,[S_2 \cap g_i\, B] = h \quad (i = 1, 2)\,.$$

Repitiendo el proceso con g_3 B, ..., g_n B construimos un S (B, ε) tal que

$$\text{card}\,[S\,(B\,,\,\varepsilon) \cap B] = \text{card}\,[S\,(B\,,\,\varepsilon) \cap g_i\, B] = h \quad (i = 1\,, \ldots, n)$$

como queríamos.

Recíprocamente, sea E el espacio vectorial real generado por I_B y sus transformados por G, siendo los B subconjuntos no vacíos de X mutuamente acotados con A. Sea F el subespacio generado por I_A y sus transformados por G. Definimos en F el funcional lineal Φ, G-invariante por

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, g_i\, I_A\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

que es positivo, ya que si

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, g_i\, I_A \geqq 0$$

la propiedad S (A, ε) para $\{g_1, \ldots, g_n\}$ garantiza

$$0 \leqq \sum_{x \in S(A,\,\varepsilon)} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, g_i\, I_A\,(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \text{card}\,[g_i\, A \cap S\,(A, \varepsilon)] \leqq$$

$$\leqq (1 + \varepsilon)\;\; \text{card}\,[A \cap S\,(A\,, \varepsilon)]\,\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, g_i\, I_A\right) \geqq 0$$

además $\Phi\,(I_A) = 1$.

Finalmente definimos en E el funcional sublineal Π, mediante:

$$\Pi\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}\, g_{ij}\, I_{B_i}\right)\right) = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}\right)\right|.$$

Veamos que se cumple b) de la proposición 2.3 y para ello sean:

$$w = \sum_{i=1}^{m_0}\left(\sum_{j=1}^{n_i} b^0_{ij}\, g^0_{ij}\, I_{B^0_i}\right) + \sum_{h=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{m_h}\left(\sum_{j=1}^{n_i} b^h_{ij}\, g^h_{ij}\, I_{B^h_i}\right) -\right.$$

$$\left. - g_h\left(\sum_{i=1}^{m_h}\left(\sum_{j=1}^{n_i} b^h_{ij}\, g^h_{ij}\, I_{B^h_i}\right)\right)\right) \text{ de W y } f = \sum_{i=1}^{n} a_i\, g_i\, I_A \text{ de F.}$$

Una sencilla comprobación proporciona.

$$\Phi(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{y} \quad \Pi(f+w) = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}\left(\sum_{j=1}^{n_i} b^0_{ij}\right)\right|$$

y a fin de que $\Phi(f) \leqslant \Pi(f + w)$ demostremos que

$$\sum_{i=1}^{m_0}\left(\sum_{j=1}^{n_i} b^0_{ij}\right) \geqq 0$$

Por construcción de W (proposición 2.3)

$$f_0 = \sum_{i=1}^{m_0}\left(\sum_{j=1}^{n_i} b^0_{ij}\, g^0_{ij}\, I_{B^0_j}\right)$$

es positiva, como

$$B = B^0_1 \cup \ldots \cup B^0_{m_0}$$

es mutuamente acotado con A para

$$\{ g^0_{ij} \,/\, j = 1, \ldots, n_i : i = 1, \ldots, m_0 \}$$

y cualquier ε real positivo existe S (B, ε) por hipótesis tal que

$$\text{card}\,[\mathrm{S}\,(\mathrm{B},\varepsilon)\cap g_{ij}^{0}\,\mathrm{B}] \leq \text{card}\,[\mathrm{S}\,(\mathrm{B},\varepsilon)\cap \mathrm{B}]\,(1+\varepsilon)$$

y con ello

$$0 \leq \sum_{x\in \mathrm{S}(\mathrm{B}\ \varepsilon)} f_{\bullet}(x) \leq \sum_{i=1}^{m_0}\left(\sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}^{0}\ \text{card}\,[\mathrm{S}\,(\mathrm{B},\varepsilon)\cap g_{ij}^{0}\,\mathrm{B}^{0}{}_{i}]\right) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m_0}\left(\sum_{j=1}^{n_i} (b_{ij}^{0}\ \text{card}\,[\mathrm{S}\,(\mathrm{B},\varepsilon)\cap g_{ij}^{0}\,\mathrm{B}]\right) \leq$$

$$\leq (1+\varepsilon)\ \text{card}\,[\mathrm{S}\,(\mathrm{B},\varepsilon)\cap \mathrm{B}]\left(\sum_{i=1}^{m_0}\ \sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}^{0}\right)\cdot$$

En consecuencia existe un funcional lineal $\tilde{\Phi}$ positivo, invariante por G, definido en E y que extiende a Φ.

En general si $\mathrm{I}_{\mathrm{B}_1}$ e $\mathrm{I}_{\mathrm{B}_2}$ son de E $\mathrm{I}_{\mathrm{B}_1\cap\mathrm{B}_2}$ es de E porque trivialmente lo es

$$\mathrm{I}_{\mathrm{B}_1} + \mathrm{I}_{\mathrm{B}_2} - \mathrm{I}_{\mathrm{B}_1\cup\mathrm{B}_2}$$

aun cuando $\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2$ no tenga que ser mutuamente acotado con A, esto nos permite considerar la clase L de las intersecciones finitas de conjuntos mutuamente acotados con A.

(4) $\mathrm{L} = \{\mathrm{B} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{B}_i$ / A y B_i son mutuamente acotados, $i = 1, \ldots, n\}$ y la medida μ inducida sobre ella por $\tilde{\Phi}$, que es fuertemente aditiva, finita para cada B de L y μ (A) = 1. Además L es retículo y tanto L como μ son invariantes por G.

(5) Sea $\mathrm{L}' = \{\mathrm{C} \subset \mathrm{X}$ / existe B de L y $\mathrm{B} \supset \mathrm{C}\}$.

(6) L′ es un retículo que contiene a L.

En efecto, si $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_n$ son de L′ existen

$$\mathrm{B}_i \supset \mathrm{C}_i \quad i = 1, \ldots, n \quad \mathrm{B}_i \in \mathrm{L}$$

entonces

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i \quad \text{y} \quad \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

están contenidas en

$$\bigcap_{i=1}^{n} B_i \quad \text{y} \quad \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

que pertenecen a L porque es retículo. Trivialmente $L' \supset L$.

Más todavía, (L, L′) cumple la condición de la proposición 2.2. Para probarlo supongamos que $B \in L$ y existen $C_1\, C_2$ de L′ de modo que $B \supset C_1 \cap C_2$; sea $B_1 = C_1 \cup B$ que contiene a C_1. En general, $B = \bigcap_{j=1}^{k} B_j$ con los B_j mutuamente acotados con A de modo que

$$B_1 = \bigcap_{j=1}^{k} (C_1 \cup B_j)\,.$$

Evidentemente como A es B_j-acotado entonces A es $C_1 \cup B_j$-acotado, $j = 1, ..., k$, además ya que $C_1 \in L'$ está contenido en un conjunto de L y por lo tanto es A-acotado, como B_j es también A-acotado es claro que $C_1 \cup B_j$ es A-acotado, $j = 1, ..., k$ y en consecuencia B_1 es de L.

De forma análoga $B_2 = C_2 \cup B$ también es de L y contiene a C_2. Finalmente

$$B_1 \cap B_2 = (C_1 \cap C_2) \cup B = B$$

después de la relación que hay por hipótesis entre B y $C_1 \cap C_2$.

Así pues aplicando 2.2 al par (L, L′) tenemos que μ^* en L′ es fuertemente aditiva. La invariancia de L′ por G y la definición de μ^* garantizan que μ^* es invariante por G. Aun cuando μ^* está restringida a L′ seguiremos anotando por μ^* a esta medida.

Hay que observar que ni L ni L′ han de contener necesariamente al total, pero μ es finita para cada conjunto de L (son A-acotados), por tanto μ^* para un elemento cualquiera de L′ está bien definida ya que existen conjuntos de medida finita que lo contienen.

El par (L′, $\mathscr{P}$ (X)) son retículos que cumplen la propiedad «intertwining» ya que si $B \in L'$, C_1, C_2 son de $\mathscr{P}$ (X) cumpliendo $B \subset C_1 \cup C_2$ basta con tomar $B_i = C_i \cap B$, $i = 1, 2$, entonces $B_i \subset C_i$, $i = 1, 2$; por otro lado, $B_i \subset B$, $i = 1, 2$ y B es de L′, lo que implica que existe D de L y $B_i \subset B \subset D$, con lo que forzosamente $B_i \in L$ $(i = 1, 2)$; además

$$B_1 \cup B_2 = B \cap (C_1 \cup C_2) = B$$

por la relación que por hipótesis hay entre B y $C_1 \cup C_2$.

Además, ambas contienen al vacío; en consecuencia, la proposición 2.1 garantiza que $(\mu^*)_*$ es fuertemente aditiva en $\mathscr{P}$ (X) y por tanto aditiva. La invariancia por G se sigue de la de los retículos L′ y $\mathscr{P}$ (X), de la definición de medida interior y la invariancia de μ^*.

Bibliografía

[1] Cotlar, M. y Cignoli, R. Nociones de espacios normados. E. U. D. E. B. A. (ediciones previas).

[2] Dubins, L. E. (1975). On Lebesgue-like extension of finitely additive measures (preprint)

[3] Rosemblatt, J. M. (1974). Invariant measures and growth conditions. Transactions of A. M. S. Vol. 193, 33-53.

Universidad de Valladolid
Colegio Universitario de Burgos