UNA CARACTERIZACION DE LOS ESPACIOS TOPOLOGICOS DE MOORE

M. López Pellicer y E. Tarazona Ferrandis

Recibido: 4 marzo 1981

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

Damos una caracterización de los espacios topológicos de Moore en términos de bases de entornos de sus puntos.

We give a characterization of Moore topological spaces by the neighbourhood bases of their points.

Un desarrollo en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es una sucesión $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de cubrimientos abiertos tales que U_{n+1} es un refinamiento de U_n, $n = 1, 2, \ldots$, y $\mathrm{St}(x, U_n)$ $n = 1, 2, \ldots$ es una base de entornos del punto x, $\forall x \in X$, donde

$$St(x, U_n) = \bigcup \{M \in U_n : x \in M\}.$$

Un espacio de Moore es un espacio topológico regular que admite un desarrollo ([1]—23,6).

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico que verifica el primer axioma de numerabilidad y $\{V_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ una base de entornos de x tal que

$$V_1(x) = X, \quad \forall x \in X.$$

Llamaremos d $(\bar{d})$ a la aplicación de $X \times X$ en $[0, 1]$ tal que

$$d(x, y) = \inf \left\{ \frac{1}{n} : y \in V_n(x) \right\} \left(\bar{d}(x, y) = \inf \left\{ \frac{1}{n} : y \in \overline{V_n(x)} \right\} \right),$$

y δ ($\bar{\delta}$) a la aplicación de $\mathcal{P}$ (X)* (= partes no vacías de X) en [0, 1] definidas por

$$\delta(A) = \sup \{d(x, y) : x \in A, y \in A\} \ (\bar{\delta}(A) = \sup \{\bar{d}(x, y) : x \in A, y \in A\}).$$

LEMA 1.—Supongamos que $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un desarrollo del espacio topológico (X, $\mathcal{T}$), que $X \in U_1$ y que

$$V_n(x) = St(x, U_n), n = 1, 2, \ldots \quad \forall x \in X.$$

Entonces

$$\lim_{n \to \infty} \delta(St(x, U_n)) = 0.$$

Si (X, $\mathcal{T}$) es regular se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} \delta((\overline{St(x, U_n)}) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN.—Dado n_0 sea $U \in U_n$ tal que $x \in U$, y sea m_0 tal que si $m > m_0$ entonces $St(x, U_m) \subset U$. Se tiene que

$$\delta(St(x, U_m)) \leq \delta(U) \leq \frac{1}{n_0}.$$

Por tanto,

$$\lim_{n \to \infty} \delta(St(x, U_n) = 0.$$

También

$$\bar{\delta}(\overline{St(x, U_m)}) \leq \bar{\delta}(\overline{U}) \leq \frac{1}{n_0},$$

de donde se deduce, si (X, $\mathcal{T}$) es regular, que

$$\lim_{n \to \infty} \bar{\delta}(\overline{St(x, U_n)}) = 0.$$

LEMA 2.—Sea $\{V_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ una base de entornos de x en el espacio topológico (X, $\mathcal{T}$) tal que

$$V_1(x) = X \ y \lim_{n \to \infty} \delta(V_n(x)) = 0, \quad \forall x \in X.$$

Sea

$$U_n = \left\{ V_m(z) : \delta(V_m(z)) < \frac{1}{n}, \quad m = 1, 2, \ldots z \in X \right\}.$$

Se tiene que $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un desarrollo para X.

DEMOSTRACIÓN.—U_n es un cubrimiento abierto de X, U_{n+1} es un refinamiento de U_n, $x = 1, 2, \ldots$, y si $\{V_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ es una base de entornos cerrados de X es obvio que $d = \bar{d}$.

$\{St(x, U_n), n = 1, 2, \ldots\}$ es una base de entornos de x, $\forall x \in X$, debido a que

$$St(x, U_n) \subset V_n(x),$$

pues si $y \in St(x, U_n)$ existe $z \in X$ tal que $\{x, y\} \subset V_m(z)$, siendo

$$\delta(V_m(z)) < \frac{1}{n},$$

por lo que

$$d(x, y) < \frac{1}{n},$$

de lo que se deduce que

$$y \in V_n(x) \cdot$$

$\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un desarrollo para X.

De estos dos lemas se deduce inmediatamente:

TEOREMA 1.—Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es de Moore si, y sólo si, cada punto x admite una base numerable decreciente $\{W_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ de entornos cerrados tal que

$$\lim_{n \to \infty} \delta(W_n(x)) = 0,$$

siendo $W_1(x) = X$.

DEMOSTRACIÓN.—Si $(X, \mathcal{T})$ es de Moore es regular y, por el lema 1, si

$$W_n(x) = \overline{St(x, U_n)}$$

se tiene que

$$0 = \lim_{n \to \infty} \overline{\delta} \, (\overline{S\,t\,(x, U_n)}) = \lim_{n \to \infty} \delta \, (W_n \, (x)),$$

donde δ es la aplicación correspondiente a

$$\{W_n \, (x), \quad n = 1, 2, \ldots\} \qquad x \in X.$$

El recíproco es consecuencia directa del lema 2.
Análogamente se establece:

TEOREMA 2.—Un espacio topológico regular $(X, \mathcal{T})$ es de Moore si, y sólo si, cada punto x admite una base numerable decreciente $\{V_n \, (x), \, n = 1, 2, \ldots\}$ de entornos tal que

$$\lim_{n \to \infty} \delta \, (V_n \, (x)) = 0,$$

siendo $V_1 \, (x) = X$.

NOTA.—Si $(X, \mathcal{T})$ verifica el primer axioma de numerabilidad y $V_n \, (x)$, $n = 1, 2, \ldots$ es una base de entornos decrecientes de x, $\forall \, x \in X$, se verifica que

$$\lim_{n \to \infty} \delta \, (V_n \, (x)) = 0$$

si, y sólo si, la aplicación d es continua en todos los puntos de la diagonal de $X \times X$. Esta consideración, de prueba inmediata, nos permite dar otras formulaciones de los teoremas 1 y 2 que no explicitamos por brevedad, dada su sencillez.

Bibliografía

[1] WILLARD, S. (1970). General Topology. London, Amsterdam, Don Mills, Ontario, Sydney: Addison-Wesley Publishing Company.

Cátedra de Matemáticas (E. T. S. I. A.)
Universidad Politécnica
Camino de Vera
Valencia-22 (Spain)