SOBRE CIERTAS CLASES DE ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS

Pedro Pérez Carreras
E. S. I. I. de Valencia

Recibido: 4 febrero 1981

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

A natural extensión to topological vector spaces of the class of suprabarreled spaces [6] is given and their hereditary properties are studied.

Este trabajo trata de la extensión al caso no localmente convexo de los espacios supratonelados [6] definidos por M. Valdivia. Así aparecen los espacios $_*$-supratonelados que, incluso en el caso localmente convexo son una clase nueva. El espacio l_0^∞ de las sucesiones de escalares que toman a lo sumo un número finito de valores distintos, como subespacio de l^∞, es un espacio supratonelado, ver [7], pero no es un espacio $_*$-supratonelado localmente convexo como la misma prueba de Grothendieck del hecho de que l_0^∞ no es un espacio de Baire y la definición de espacio$_*$-supratonelado indica.

Por exigencias técnicas introducimos una extensión de los espacios Baire-like [4], aunque los métodos básicos de estudio de esta clase se pueden encontrar en [8]. En [5] se anuncia un estudio de los espacios $_*$-no-ordenados-Baire-like. Técnicas utilizadas en [6] extendidas al caso no localmente convexo permiten separar esta clase de los espacios $_*$-supratonelados. Los espacios $_*$-no-ordenados-Baire-like, de ser estables frente al paso a subespacios de codimensión finita, estará separada de la clase de los espacios de Baire debido a un ejemplo contenido en [2]. El clásico ejemplo de l^p con $0 < p < 1$, con la topología inducida por l^1, puede considerarse como un espacio no-ordenado-Baire-like que no es $_*$-no-ordenado-Baire-like.

En lo que sigue, utilizaremos espacios vectoriales definidos sobre el cuerpo de los números reales o complejos. La palabra espacio denotará a un espacio vectorial topológico separado E. Sea E un espacio y sea $\mathcal{U} = (U_n)$ una sucesión de subconjuntos de E. Se dice que

$\mathcal{U}$ es una sucesión básica en E (s. b.) si cada U_n es absorbente, equilibrado y satisface la propiedad sumativa $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$. Una s. b. (U_n) es cerrada si cada U_n es un conjunto cerrado en E. Sea A un subconjunto de E. Decimos que A es admisible si es equilibrado y si existe una s. b. $\mathcal{A} = (A_n)$ en la envoltura lineal de A con $A_1 = A$. Si existe en E una sucesión $(U^m)_m$ de conjuntos admisibles tales que $\bigcup_m U^m$ es absorbente en E y si $\mathcal{U}^m = (U^m{}_n)$ son las s. b. asociadas verificando $U_n{}^m \subset U_n{}^{m+1}$ para cada n y m, la sucesión doble $(U_n{}^m)$ recibe el nombre de cuadro generado por $(U^m)_m$. Si cada U^m es cerrado podemos suponer el cuadro engendrado como constituido todo él de conjuntos cerrados.

Un espacio E es ultratonelado si toda s. b. cerrada en E es topológica, es decir, si toda ella está constituida por entornos del origen. Es obvio que toda s. b. cerrada genera un cuadro cerrado $(U_n{}^m)$ con $U_n{}^m = m\, U_n$.

Sea E un espacio y sea U un subconjunto de E. Decimos que U es pseudoconvexo si existe un real $t > 0$ tal que $U + U \subset t\, U$. En el contexto de los espacios semiconvexos se introducen en [9] los espacios hipertonelados como aquellos espacios semiconvexos en donde todo equilibrado pseudoconvexo cerrado y absorbente es entorno del origen en el espacio, definición que se puede tratar en espacios vectoriales topológicos generales. Todo espacio ultratonelado es hipertonelado y no es difícil dar ejemplos de hipertonelados que no son ultratonelados. El siguiente nos parece de interés: en [3] se prueba que si U es un equilibrado absorbente tal que $U + U \subset 2^{1/p}\, U$, entonces la envoltura p-convexa de U está incluida en $2^{1/p}\, U$. Sea E la suma directa $\oplus\, (E_i : i \in I)$ con $E_i = K$, $I = \bigcup I_n$ con I_n no numerable. Sea (p_n) una sucesión de números estrictamente decreciente con $0 < p_n < 1$ y convergente a cero. Denotamos mediante

$$U_m = \left\{ x = (x_i) \ \text{ de } \ E : \sum_n \sum_i |x_i|^{p_n} \leq 1/2^m;\ n = 1, 2, \ldots \ \text{ y } \ i \in I_n \right\}.$$

Se trata de una s. b. cerrada para la topología producto. Probemos que U_1 no puede contener a ningún equilibrado absorbente pseudoconvexo. Bastará con demostrar que no puede contener ningún absolutamente p-convexo absorbente. Supongamos que no fuera así: sea B un absolutamente p-convexo absorbente contenido en

U_1. Dado el vector unitario e_i existirá un $b_i > 0$ tal que $b_i\, e_i \in$ B. Tomemos $p_n < p$. Existirá un $\varepsilon > 0$ tal que

$$C = \{ i \in I_n : b_i \geq \varepsilon \}$$

sea infinito. Tomemos $i_1, i_2, \ldots, i_q$ en C; $b_{i_j}\, e_{i_j}$ están en B para $j = 1, 2, \ldots, q$. Como

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{b_{i_j}}{q^{1/p}}\, e_{i_j} \in B \subset U_1$$

se sigue que

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{|\, b_{i_j} \,|^{p_n}}{q^{p_n/p}} \leq 1$$

luego

$$\text{para cada } q \qquad q^{1-p_n/p} \cdot \varepsilon \leqq 1$$

lo que es una contradicción. Tomando en E la topología generada por todos los equilibrados absorbentes y pseudoconvexos, digamos T, la sucesión básica construida es T-cerrada y no es topológica.

DEFINICIÓN 1.—E es $*$-Baire-like ($*$-BL) si siempre que E sea unión creciente de una sucesión (U^m) de conjuntos admisibles cerrados que generen un cuadro, existe un natural n tal que U^n es entorno del origen en E.

E es $*$-supratonelado ($*$-ST) si siempre que exista una sucesión (U^m) de conjuntos admisibles cerrados en su envoltura lineal tal que $\bigcup_m U^m$ sea absorbente en E y tal que $(L\,(U^m))_m$ sea creciente, existe un natural n tal que la clausura en E de U_n es un entorno del origen en E.

Es obvio que todo espacio $*$-supratonelado ($*$-ST) es $*$-BL y que todo espacio $*$-BL es ultratonelado.

La siguiente proposición es de carácter sencillo.

PROPOSICIÓN 1.—(a) Sea F un subespacio denso de un espacio E y sea F un $*$-BL. Entonces, E es $*$-BL.

(b) Sea F un subespacio cerrado de un espacio $*$-BL E. Entonces, E/F es $*$-BL.

PROPOSICIÓN 2.—Sea $(E_i : i \in I)$ una familia no vacía de espacios $*$-BL. Entonces, $E = \Pi (E_i : i \in I)$ es un espacio $*$-BL.

DEMOSTRACIÓN.—Sea (U^n_m) un cuadro cerrado en E; probaremos que existe un natural m tal que U_1^m es entorno del origen. Primeramente, veamos que existe una parte finita J de I y un natural m' tal que $\bigoplus_{I \setminus J} E_i$ está contenida en $U_2^{m'}$ y, por lo tanto, en U_2^p con $p \geqslant m'$. En efecto, si no fuera cierto, existiría un natural m_1 tal que $\bigoplus_{I} E_i \not\subset U_2^{m_1}$ y determinaríamos un punto $x^1 \in \bigoplus_{I} E_i$ con $x^1 \notin U^1_2$. Sea $J_1 = \{i \in I : x^1_i \neq 0\}$. Entonces, existirá un punto $x^2 \in \bigoplus_{I \setminus J_1} E_i$ con $x^2 \notin 2\, U^2_2$, y procediendo así, determinaremos el conjunto $(x^1, x^2, ...)$ y la sucesión de partes finitas $J_1, J_2, ... \subset I$ disjuntas, con

$$x^q \in \bigoplus_{I \setminus \{J_1 \cup ... \cup J_{q-1}\}} E_i, \quad x^q \notin q\, U^q_2$$

Es obvio que existe un conjunto B en E, absolutamente convexo y compacto, tal que contiene a $(x^1, x^2, ...)$. B es un conjunto estrictamente acotado, [8], luego aplicando [8], proposición 3, existe un natural m' tal que B es absorbido por $U_2^{m'}$, luego para algún $t > 0$, B está contenido en $t\, U_2^{m'}$. Si $q > \max(t, m')$ se sigue que B está contenido en $q\, U^q_2$, lo que es una contradicción. Como cada U^p_2 es cerrado, es claro que $\prod_{I \setminus J} E_i$ está contenido en U^p_2 con $p \geqslant m'$. Sea $J = \{j_1, j_2, ..., j_s\}$. Para cada $l \in \{1, 2, ..., s\}$, $(U_n^m \cap E_{j_l})$ es un cuadro cerrado en E_{j_l}, luego existe un natural m_1 tal que $U^{m1}_{2+2^s} \cap E_{j_l}$ es un entorno del origen en E_{j_l} (pues la definición de espacio $*$-BL implica la existencia de un entorno del origen en cada «fila» (U_n^m), con n fijo, del cuadro). Si

$$m = \max(m_1, m_2, \dots, m_s, m')$$

entonces $U^m_{2+2^s} \cap E_{j_l}$ es entorno del origen para cada $l \in \{1, 2, ..., s\}$. Veamos, finalmente, que el entorno del origen en E,

$$V = \left(\prod_{I \setminus J} E_i\right) \times (U^m_{2+2^s} \cap F_{j_1}) x \dots x (U^m_{2+2^s} \cap E_{j_l})$$

está contenido en U_1^m: Sea $x \in V$ que lo escribimos como $x' + y'$ con $x' \in \prod_{I \setminus J} E_i$, $y' = y_1 + \ldots + y_s$ con

$$y_p \in U^m_{2+2^s} \cap E_{j_p}, \quad p = 1, 2 \ldots, s.$$

Claramente, $x', y' \in U_2^m$, luego x pertenece a U_1^m, c. q. d.

Utilizando el método de prueba de [4], Th. 2.18, damos la siguiente:

PROPOSICIÓN 3.—Sea E un espacio $*$-BL. Sea p un real con $0 < p < 1$ y sea F el límite inductivo de una sucesión (F_n) de espacios p-normados completos. Si g: $E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal con gráfica cerrada, entonces g es continua.

DEMOSTRACIÓN.—$E = \bigcup_n g^{-1}(F_n)$, luego aplicando [8], Th. 2, E se puede considerar como el límite inductivo de la sucesión $(g^{-1}(F_n))$, luego basta con probar que la restricción de g a cada $g^{-1}(F_n)$ es continua en F_n, dotado de la topología de la p-norma o, más sencillamente, que es casicontinua, pues F_n es un F-espacio. Supongamos que no fuera cierto: existiría un natural n' tal que, para cada $n \geqslant n'$ g: $g^{-1}(F_n) \longrightarrow F_n$ no es casicontinua. Así, existe un $a_1 > 0$ tal que

$$\overline{g^{-1}(U_1)} \cap g^{-1}(F_{n'})$$

no es entorno del origen $g^{-1}(F_{n'})$, siendo

$$U_1 = \{x \in F_{n'} : |||x||| < a_1\}.$$

U_1 es un conjunto acotado, absolutamente-p-convexo y verificando $U_1 + U_1 \subset 2^{1/p} U_1$, por lo que genera una s. b. $\left(\frac{1}{2^{n/p}} U_1\right)$ en $F_{n'}$. Como U_1 también es acotado en $F_{n'+1}$ existe un $a_2 > 0$ tal que

$$U_2 = \{x \in F_{n'+1} : |||x||| < a_2\}$$

contiene a U_1 y tal que

$$\overline{g^{-1}(U_2)} \cap g^{-1}(F_{n'+1})$$

no es entorno del origen en $g^{-1}(F_{n'+1})$.

Procediendo de esta forma determinamos una sucesión (U_s) creciente con

$$\overline{g^{-1}(U_s)} \cap g^{-1}(F_{n'+s})$$

no entorno del origen en $g^{-1}(F_{n'+s})$. Definimos $(U^r{}_q)$ con

$$U_0{}^r = U_r, U^r{}_q = \frac{1}{2^{q/p}} U_r \quad r = 1, 2, \ldots; q = 1, 2, \ldots$$

y consideremos en E el cuadro cerrado

$$\overline{(g^{-1}(U^r{}_q))} \quad r = 1, 2, \ldots; q = 0, 1, \ldots$$

Como E es un $*$-BL espacio, existe un natural m tal que $\overline{g^{-1}(U_0{}^m)}$ es un entorno del origen en E, luego

$$\overline{g^{-1}(U_0{}^m)} \cap g^{-1}(F_{n'+m})$$

es entorno del origen en $g^{-1}(F_{n'+m})$ lo que es una contradicción, c. e. d.

De [8], Cor. 2, se deduce sin más la siguiente:

Proposición 4.—Todo espacio ultratonelado E cuya completación sea un espacio de Baire es un espacio $*$-BL.

Proposición 5.—Un espacio E es $*$-ST si y sólo si siempre que E sea unión creciente de subespacios (E_n), existe un natural n' tal que $E_{n'}$ es denso en E y ultratonelado.

Demostración.—Sea E unión creciente de una sucesión de subespacios (E_n). Como E es $*$-ST es $*$-BL, luego existe un natural n' tal que $E_{n'}$ es denso en E. Supongamos que ningún E_n fuera ultratonelado. Determinamos una s. b. cerrada $(U^n{}_p)$ en E_n tal que ningún $U^n{}_p$ sea entorno del origen en E_n. Como $\bigcup_n U^n{}_1$ es absorbente en E, existirá un natural n_0 tal que $\overline{U_1{}^{n_0}}$ es entorno del origen en E, lo que es una contradicción. Recíprocamente, sea (U_n) una sucesión de conjuntos admisibles y cerrados en su envoltura lineal $L(U_n)$ con $L(U_n) \subset L(U_{n+1})$ y tal que $\bigcup_n U_n$ es absorbente en

E. Sea $E_n = L(U_n)$. Obviamente, E es la unión creciente de la sucesión (E_n). Entonces, existe un natural n' tal que $E_{n'}$ es denso en E y ultratonelado, por lo que $\bar{U}_{n'}$ es un entorno del origen en $E_{n'}$ y así $\bar{U}_{n'}$ será entorno del origen en E, q. e. d.

PROPOSICIÓN 6.—(a) Sea F un subespacio denso de un espacio E y sea F un espacio $*$-ST. Entonces, E es $*$-ST.

(b) Sea H un subespacio cerrado de un espacio $*$-ST E. Entonces, E/H es $*$-ST.

DEMOSTRACIÓN.—(a) Si $E = \bigcup_n E_n$, entonces $F = \bigcup_n (E_n \cap F)$, luego existe un natural n' tal que $E_{n'} \cap F$ es denso en F y ultratonelado, luego $E_{n'}$ es denso en E. Como $E_{n'} \cap F$ es denso en $E_{n'}$, entonces $E_{n'}$ es ultratonelado. (b) Sea $E/H = \bigcup_n F_n$ y sea h: $E \longrightarrow E/H$ la sobreyección canónica. Como $E = \bigcup_n h^{-1}(F_n)$, existe un natural n' tal que $h^{-1}(F_{n'})$ es denso en E y ultratonelado. Así, F_n es denso en E/H. Sea (U_n) una s. b. cerrada en F_n. Entonces, $(h^{-1}(U_n))$ es una s. b. cerrada en $h^{-1}(F_{n'})$, luego es topológica y así $\overline{h^{-1}(U_n)}$ son entornos del origen en E. Entonces $\bar{U}_n$ es un entorno del origen en E/H, luego U_n es un entorno del origen en $F_{n'}$, c. e. d.

PROPOSICIÓN 7.—Sea F un subespacio de codimensión numerable de un espacio $*$-ST E. Entonces, F es $*$-ST.

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que F es denso en E y sea F la unión creciente de subespacios (F_m). Consideremos la sucesión doble (U_n^m) en F con $U_n^m = F_m$ para todo n. Como F es ultratonelado, [1], p. 91, aplicamos [8], Th. 1, para obtener que

$$\bigcup_m \bar{F}_m = \overline{\bigcup_m F_m} = E,$$

luego $E = \bar{F}_{m'}$ para algún natural m', por ser E $*$-ST, luego F_m es denso en F para $m \geqslant m'$. Sea G una cobase de F en E y sea $G_m = F_m + G$ con $m \geqslant m'$.

Como E es la unión creciente de (G_m), existe un natural p tal que G_p es denso en E y ultratonelado. Pero F_p será entonces ultratonelado. Sea, ahora, F un subespacio de codimensión numerable en E y sea $(x_1, x_2, \ldots)$ una cobase de F en E. Llamamos

$$F_m = F \oplus [x_1, \ldots, x_m]$$

Como E es la unión creciente de (F_m), existe un natural m' tal que $F_{m'}$ es denso en E y ultratonelado, por lo que, aplicando el razonamiento anterior, $F_{m'}$ es $*$-ST, luego basta razonar para el caso de codimensión uno, para el cual el resultado es obvio: si F es cerrado utilizamos la proposición anterior y si F es denso, el razonamiento anterior, q. e. d.

Proposición 8.—Sea $(E_i : i \in I)$ una familia no vacía de espacios $*$-ST. Entonces, $E = \Pi (E_i : i \in I)$ es $*$-ST.

Demostración.—Probaremos, en primer lugar, que el producto numerable $E = \Pi (E_n : n = 1, 2, \ldots)$ de espacios $*$-ST es $*$-ST. Sea E unión creciente de subespacios (F_m). Como E es $*$-BL, existe un natural m' tal que $F_{m'}$ es denso. Si ningún F_m, con $m > m'$, fuera ultratonelado existirían sucesiones básicas cerradas $\mathcal{U}^m = (U_n^m)$ en F_m no topológicas. Se puede suponer que ningún U_n^m es entorno del origen en F_m. Probaremos que existe un natural m_0 tal que la sucesión $(\overline{U_n^{m_0}})$ es una sucesión básica en E. Si no fuera así, existe un punto x^1 de E que no es absorbido por $\overline{U_{n_1}^{m'}}$ para algún natural n_1. Existirá un natural $m_2 > m'$ tal que la sucesión $(\overline{U_n^{m_2}})$ es básica en E_1. En efecto,

$$E_1 = \bigcup_{m > m'} (F_m \cap E_1)$$

y como es $*$-ST, existe un natural m_2 tal que $F_{m_2} \cap E_1$ es denso en E_1 y ultratonelado. Obviamente, $(U_n^{m_2} \cap E_1)$ es una sucesión básica cerrada en $F_{m_2} \cap E_1$, luego es topológica y así

$$\overline{U_n^{m_2} \cap E_1}^{E_1}$$

son entornos del origen en E_1, luego $(\overline{U_n^{m_2}})$ absorben los puntos de E_1. El producto $\prod\limits_{n \geq 2} E_n$ no puede ser absorbido por $(\overline{U_n^{m_2}})$, luego existe un punto $x^2 \in \prod_{n \geq 2} E_n$ que no será absorbido por algún $\overline{U^{m_2}_{n_2}}$. Con la técnica anterior se comprueba la existencia de un natural $m_3 > m_2$ tal que $(\overline{U_n^{m_3}})$ absorbe a E_1 y a E_2 pero no a $\prod_{n \geq 3} E_n$. Se determina $(x^1, x^2, \ldots)$ en E con $x^k \in \prod_{n \geq k} E_n$ y x^k no es absorbido por $\overline{U^{m_k}_{n_k}}$ con $m' = m_1 < m_2 < \ldots$ Tomamos un absolutamente convexo compacto B de E que contenga a $(x^1, x^2, \ldots)$. Como

$$E_B = \bigcup_{q=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \{ q\, \overline{U^{m_k}_{n_k - 1}} \cap E_B \},$$

existen naturales k' y q' tales que

$$q' \, \overline{U^{m_{k'}}_{n_{k'} - 1}} \cap E_B$$

tiene punto interior en E_B, luego

$$\overline{U^{m_{k'}}_{n_{k'}}} \cap E_B$$

es entorno del origen en E_B, por lo que absorberá B y llegamos a una contradicción.

Sea, ahora, $E = \Pi(E_i : i \in I)$ con I infinito no numerable y sea E_0 el subespacio denso de E de todos aquellos elementos de E con, a lo sumo, una cantidad numerable de coordenadas distintas de cero. Debido a la proposición 6, basta con probar que E_0 es $*$-ST. Sea E_0 unión creciente de subespacios (F_m). Como E_0 es $*$-BL, existe un natural m' tal que $F_{m'}$ es denso en E_0. Tomemos $m' = 1$. Si ningún F_m fuera ultratonelado, existirían s. b. cerradas (U_n^m) en F_m que no son topológicas. Veamos que para algún m, $(\overline{U_n^m})$ es una sucesión básica en E_0, lo que claramente implica el resultado. Si no fuera cierto, existirían puntos $(x^1, x^2, \ldots)$ de E_0 tal que x^p no sería absorbido por $\overline{U^p_{n_p}}$, $p = 1, 2, \ldots$ Sea $J_p = \{j \in I : x^p_j \neq 0\}$ y sea

$$L = \Pi\left(E_j : j \in \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i\right)$$

que es un espacio $*$-ST, por ser un producto numerable. Claramente,

$$L = \bigcup_m (F_m \cap L)$$

y existirá un natural m_0 tal que $F_{m_0} \cap L$ es denso en L y ultratonelado. Como $(U_n^{m_0} \cap L)$ es una sucesión básica cerrada en $F_{m_0} \cap L$, se sigue que es topológico, luego $\overline{U_n^{m_0} \cap L}$ es entorno del origen en L, luego $\overline{U_{n_{m_0}}^{m_0}}$ absorbe a x^{m_0}, lo que es una contradicción, q. e. d.

PROPOSICIÓN 9.—Sea E un espacio $*$-ST y sea F el límite inductivo de una sucesión (F_n) de infra-s-espacios (ver [1]). Sea g: $E \longrightarrow F$ una aplicación lineal con gráfica cerrada. Entonces, g es continua.

DEMOSTRACIÓN.—$E = \bigcup_n g^{-1}(F_n)$, luego existe un natural m' tal que $g^{-1}(F_{m'})$ es denso en E y ultratonelado. Sea h la restricción de g a $g^{-1}(F_{m'})$. Utilizando el teorema de la gráfica cerrada ([1], p. 45) h es continua. Pero $F_{m'}$ con la topología ultratonelada asociada es completo ([1], p. 56), luego podemos extender h a una aplicación continua f: $E \longrightarrow F_{m'}$. Por tener g gráfica cerrada, f coincide con g, q. e. d.

Referencias

[1] ADASCH, N. et al. (1978). Topological Vector Spaces. Lect. Notes in Math., Springer.

[2] ARIAS, J. Dense hyperplanes of first category. *Math Ann.* (to appear).

[3] KÖTHE, G. (1966). Topologische Lineare Räume I». Springer.

[4] SAXON, S. (1972). Nuclear and product spaces, Baire-like spaces and the strongest locally convex topology. *Math. Ann.*, **197**, 87-106.

[5] TODD, A. (1978). A Baire property in linear topological spaces. Notices AMS. Vol. 25, No. 1, ref. 752-46-12

[6] VALDIVIA, M. (1981). On suprabarreled spaces. Lect. Notes in Math. Ed.: S. Machado. Springer.

[7] VALDIVIA, M. (1979). On certain normed barreled spaces. *An. Inst. Fourier*, t. XXIX (3), 39-56.

[8] DE WILDE, M. et GERARD-HOUET, C. (1971). Sur les propriétés de tonnelage des espaces vectoriels topologiques. *Bull. Soc. Roy. Ec. Liège*, 40 année, **11-12**, 555-560.

[9] IYAHEN, S. O. (1971). Semiconvex spaces. *Glasgow Math. J.*, **9**, 111-118.