SOBRE SUMABILIDAD CESARO EN EL ESPACIO CS (II)

Miguel Florencio Lora y Pedro Pérez Carreras

(*E. S. I. I de Sevilla*)

Recibido: 3 diciembre 1980

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

The authors continue the study initiated in [2]. The compact sets of the space CS are studied in order to give a characterization of when the space K (a), projective limit of a sequence of weighted spaces CS (a^n), is a Schwartz space.

1. Introducción

Dada una sucesión de escalares (x_n), escribimos

$$S_n(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

y

$$\sigma_n(x) = (S_1(x) + S_2(x) + \dots + S_n(x))/n$$

con $n = 1, 2, \dots$ La sucesión x se dice sumable en el sentido de Cesáro o c-sumable si converge la sucesión $(\sigma_n(x))$ y llamamos c-suma a su límite, que es denotado $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\,(c)$ o bien $\sigma(x)$. Esta definición tiene una extensión obvia a espacios de Banach.

Una sucesión (b_n) de elementos de un espacio de Banach B se dice que es una c-base para B (ver [5], p. 46) si para cada x en B, existe una única sucesión de escalares (x_n), tal que x se representa como límite, en el sentido de Cesáro, de la sucesión de sumas parciales $\left(\sum_{n=1}^{k} x_n b_n\right)_k$. En [2] los autores prueban que los vectores coordenados $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ constituyen una c-base para el espacio CS de todas aquellas sucesiones de escalares que son c-sumables y obtienen, como consecuencia, una caracterización del dual L de CS, como el espacio de aquellas sucesiones convergentes (u_n), tales que $\Sigma\, n \cdot |\, \Delta^2 u_n \,|$ es finito. Si u^* denota el límite de la sucesión (u_n), se prueba que L, dotado de la norma

$$\| (u_n) \| = | u^* | + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot | \Delta^2 u_n | ,$$

es el dual fuerte de CS.

Siguiendo las técnicas habituales de la teoría de bases de Schauder, se prueba el siguiente:

Resultado (a).—(i) Todo espacio de Banach $(B, \| \cdot \|)$ provisto de una c-base (b_n) tiene un espacio de Banach de sucesiones asociado $(B^*, ||| \cdot |||)$, con

$$||| (x_n) ||| = \sup \left\| \left(x_1 b_1 + (x_1 b_1 + x_2 b_2) + \ldots + \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \right) \Big/ n \right\| ,$$

siendo (x_n) la sucesión de escalares asociados a un x de B respecto de la c-base, que es isomorfo a $(B, \| \|)$.

(ii) Para cada compacto K de B y para cada $\varepsilon > 0$, existe un natural n' tal que $\| B_n (x) - x \| < \varepsilon$ para cada x en K y cada natural $n \geqslant n'$, siendo

$$B_n (x) = (x_1 b_1 + x_2 b_2 + \ldots + x_n b_n)/n .$$

Sea λ un espacio de sucesiones que contiene a φ. En [3], se define el c-dual λ^c de λ como aquel espacio de sucesiones $\{u = (u_n) :$ $(u_n x_n)$ es c-sumable, para todo $x = (x_n)$ en $\lambda\}$. Escribiremos

$$X_n = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$$

y

$$B_n (x) = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n,$$

siendo $x = (x_n)$ un elemento de λ.

El siguiente resultado puede encontrarse en [1]: «La condición necesaria y suficiente para que $(x_n u_n)$ sea c-sumable siempre que (x_n) sea c-sumable, es que se verifiquen (i) (u_n) es convergente y (ii) la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot |\Delta^2 u_n| < +\infty".$$

En [6], p. 128, se demuestra que si (u_n) verifica las condiciones (i) y (ii) del resultado anterior y si además $\lim u_n = 0$, entonces cualquiera que sea la sucesión (x_n) c-sumable, se verifica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n (c) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(x) \cdot n \cdot \Delta^2 u_n.$$

Observemos que si la sucesión (u_n) verifica (i) y (ii), pero su límite es no nulo, se podrá escribir $u_n = \lim u_n + v_n$, en donde $\lim v_n = 0$. Por tanto, podemos recoger el resultado anterior, para sucesiones cuyo límite no sea necesariamente nulo, en el siguiente:

Resultado (b).—Si (u_n) verifica las hipótesis (i) y (ii), para cada sucesión c-sumable se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n (c) = (\lim u_n) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n (c) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(x) \cdot n \cdot \Delta^2 u_n,$$

en donde la tercera serie converge absolutamente.

2. Caracterización de los conjuntos compactos de CS

Daremos un resultado de caracterización de los subconjuntos compactos del espacio CS en la línea del clásico resultado de Kolmogorov, sobre la caracterización de los compactos de l^1. Suponemos al espacio CS provisto de la norma $\| x \| = \sup | \sigma_n(x) |$.

Teorema 1.—Sea A un subconjunto acotado de CS. Entonces, A es relativamente compacto, si y sólo si,

$$\lim_n \sup_{x \in A} \| x - B_n(x) \| = 0.$$

DEMOSTRACIÓN.—($\Longrightarrow$) Como CS posee una c-base, podemos aplicar el resultado (a) para obtener que, para cada compacto K de CS y para cada $\varepsilon > 0$, existe un natural n_0 tal que si $n \geqslant n_0$, entonces

$$\| x - B_n(x) \| < \varepsilon, \quad \forall x \in K,$$

en particular, se verificará para el compacto $\bar{A}$, luego para cada $\varepsilon > 0$, existe un natural n_0 tal que si $n \geqslant n_0$, entonces:

$$\sup_{x \in A} \| x - B_n(x) \| \leq \sup_{x \in \bar{A}} \| x - B_n(x) \| < \varepsilon$$

es decir,

$$\lim_n \sup_{x \in A} \| x - B_n(x) \| = 0.$$

($\Longleftarrow$) Denominemos

$$d_n = \sup_{x \in A} \| x - B_n(x) \|$$

y supongamos que $\lim d_n = 0$. Sea

$$H = \{ x \in CS : \| x - B_n(x) \| \leq d_n, \quad n = 1, 2, \dots \} \supset A.$$

Por el teorema 4 de [3], basta demostrar que «cualquiera que sea la sucesión x^n en H convergente coordenada a coordenada hacia $x^0 \in \omega$, se tiene que $x^0 \in H$ y que x^n es $\| \cdot \|$-convergente hacia x^0».

Ahora bien, si x^k converge coordenada a coordenada hacia x^0, entonces $B_m(x^k)$ converge coordenada a coordenada hacia x^0, luego de la relación

$$\| x^k - B_n(x^k) \| \leq d_n, \quad k, n = 1, 2, \dots,$$

se sigue por un procedimiento de paso al límite que

$$\| x^0 - B_n(x^0) \| \leq d_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Como

$$\lim d_n = 0 \quad \text{y} \quad \| B_n(x^0) - B_m(x^0) \| \leq \| B_n(x^0) - x^0 \| + \| x^0 - B_m(x^0) \|,$$

se sigue que $(B_n(x^0))$ es una sucesión de Cauchy en el espacio completo CS, luego $B_m(x^0)$ converge hacia un punto de CS, punto que no puede ser otro que x^0, pues $B_n(x^0)$ converge coordenada a coordenada hacia x^0.

En consecuencia, $x^0 \in CS$ y $\| x^0 - B_n(x^0) \| \leqslant d_n$, $n = 1, 2, \ldots$, esto es $x^0 \in H$.

Para probar que x^k $\| \cdot \|$-converge hacia x^0, consideramos la siguiente desigualdad

$$\| x^k - x^0 \| \leq \| x^k - B_n(x^k) \| + \| B_n(x^k) - B_n(x^0) \| + \| B_n(x^0) - x^0 \| .$$

Dado $\varepsilon > 0$, teniendo en cuenta que $\lim d_n = 0$, podemos encontrar un índice n, tal que

$$\| x^k - B_n(x^k) \| + \| x^0 - B_n(x^0) \| \leq 2 \cdot d_n < \varepsilon/2.$$

Para dicho n, usando la convergencia coordenada a coordenada de x^k hacia x^0, se sigue que

$$\| B_n(x^k) - B_n(x^0) \| < \varepsilon/2, \quad \text{si} \quad k \geq k_0 .$$

El resultado deseado es consecuencia de las dos últimas acotaciones.

3. Los funcionales asociados a la c-base de CS

Como consecuencia del estudio realizado sobre la compacidad en el par dual (λ, λ^c) (ver [3]), vamos a caracterizar un subespacio de L, de interés para el estudio de cierto tipo de aplicaciones.

Consideremos la sucesión (e_m) de elementos de L y sea F el subespacio $[(e_n)]$, es decir, la clausura del subespacio engendrado por los vectores (e_n) en L.

En lo que sigue, probaremos que (e_m) es una c-base de F y daremos una caracterización de los elementos de F. Para ello, necesitaremos hacer algunas consideraciones previas.

El resultado (a) garantiza que si $x \in CS$, entonces

$$||| x ||| = \sup \| B_n(x) \|$$

es una norma en CS equivalente a la norma usual, por lo que verificará que $\| x \| \leqslant ||| x ||| \leqslant M \cdot \| x \|$. Este hecho nos permite probar la siguiente:

PROPOSICIÓN 1.—Dados $u \in L$ y $x \in CS$, sea $u \cdot x = (u_n x_n) \in CS$. Entonces $\| u \cdot x \| \leqslant M \cdot \| u \| \cdot \| x \|$.

DEMOSTRACIÓN.

$$\| u \cdot x \| = \sup | \sigma_n (u \cdot x) | = \sup | u_1 x_1 + [(n-1)/n] \cdot u_2 x_2 + \ldots + \\ + (1/n) \cdot u_n x_n | = \sup | \langle B_n(x), u \rangle | \leq \sup \| B_n(x) \| \cdot \| u \| = \\ = \| u \| \cdot \sup \| B_n(x) \| = \| u \| \cdot |\!|\!| x |\!|\!| \leq M \cdot \| u \| \cdot \| x \| .$$

COROLARIO.—Para cada $u \in L$, la alicación

$$f_u : x \in CS \longrightarrow u \cdot x \in CS$$

es continua.

Establecemos ahora un lema de carácter obvio.

LEMA 1.

(a) $$\sup_{\| x \| \leqq 1} \| u \cdot x \| = \sup_{\| x \| \angle 1} \| u \cdot x \| .$$

(b) $$\sup_{\| x \| \leqq 1} | \langle u, x \rangle | = \sup_{\| x \| \angle 1} | \langle u, x \rangle | ,$$

en consecuencia

$$\| u \| = \sup_{\| x \| \angle 1} | \langle u, x \rangle | .$$

Si (a_n) es una base de un espacio de Banach B y (f_n) son los funcionales asociados a dicha base, es conocido que (f_n) constituye una base del subespacio cerrado $[(f_n)]$ de B′, generado por (f_n).

Incluimos, a continuación, la extensión natural de este resultado a espacios de Banach con c-base; cuya demostración puede realizarse con técnicas similares al caso de bases ordinarias.

PROPOSICIÓN 2.—Sea (a_n) una c-base de un espacio de Banach B y sea (f_n) la sucesión de funcionales asociados a dicha base. Entonces, (f_n) es una c-base del subespacio $[(f_n)]$ de B′.

COROLARIO.—El subespacio $F = [(e_n)] \subset L$ posee una c-base. Precisamente, la constituida por los vectores (e_n).

DEMOSTRACIÓN.—Por la proposición anterior, basta tener en cuenta que CS posee una c-base, formada por los vectores (e_n) de CS (ver [2]) y que los funcionales asociados a dicha c-base son los vectores (e_m) de L.

Estamos en condiciones de caracterizar a los elementos del subespacio F. Por el corolario de la proposición 1, conocemos que para cada elemento u de L, la aplicación

$$f_u : x \in \mathrm{CS} \longrightarrow u \cdot x = (u_n x_n) \in \mathrm{CS}$$

es continua. Probaremos que los elementos $u \in \mathrm{F} \subset \mathrm{L}$ son aquellos para los que f_u no sólo es continua sino que también es compacta.

TEOREMA 2.—Sea $u \in \mathrm{L}$ y sea

$$f_u : x \in \mathrm{CS} \longrightarrow u \quad x \in \mathrm{CS}.$$

Entonces, $u \in \mathrm{F}$, si y sólo si, f_u es compacta.

DEMOSTRACIÓN.—($\Longrightarrow$) Tendremos que probar que si B es la bola unidad de CS, entonces f_u (B) es relativamente compacto. Para lo cual, por el teorema 1, es suficiente demostrar que:

$$\lim_n \sup_{y \in f_u(\mathrm{B})} \| y - \mathrm{B}_n(y) \| = 0.$$

o equivalentemente que:

$$\lim_n \sup_{\| x \| \leq 1} \| u \cdot x - \mathrm{B}_n(u \cdot x) \| = 0$$

Ahora bien, aplicando la proposición 1, resulta que

$$\| u \cdot x - \mathrm{B}_n(u \cdot x) \| = \| (u - \mathrm{B}_n(u)) \cdot x \| \leq \mathrm{M} \cdot \| u - \mathrm{B}_n(u) \| \cdot \| x \| .$$

luego

$$\lim_n \sup_{\| x \| \leq 1} \| u \cdot x - \mathrm{B}_n(u \cdot x) \| \leq \mathrm{M} \cdot \lim_n \| u - \mathrm{B}_n(u) \| .$$

Al ser $u \in \mathrm{F}$ y ser (e_n) una c-base de F, tenemos que

$$\lim \| u - \mathrm{B}_n(u) \| = 0,$$

luego f_u es compacta.

($\Longleftarrow$) Observemos en primer lugar que es suficiente con demostrar que se verifica la relación:

$$\sup_{\| x \| \leq 1} \| u \cdot x \| \geq \| u \| , \tag{1}$$

para cada u en L, pues supuesto que (1) es cierto, se tiene que si f_u es compacta y por tanto que

$$\lim_n \sup_{\| x \| \leq 1} \| u \cdot x - B_n (u \cdot x) \| = 0,$$

o lo que es lo mismo, que

$$\lim_n \sup_{\| x \| \leq 1} \| (u - B_n (u)) \cdot x \| = 0;$$

entonces se sigue mediante (1) que:

$$\| u - B_n (u) \| \leq \sup_{\| x \| \leq 1} \| (u - B_n (u)) \cdot x \|$$

y en consecuencia que $\lim \| u - B_n (u) \| = 0$.

Por tanto, $B_n (u)$ es $\| \ \|$-convergente hacia u en L, y como $B_n (u) \in F$ y F es cerrado, se sigue que $u \in F$.

Probaremos ahora la relación (1). Téngase en cuenta que para cada u en L y cada x en CS, se tiene que:

$$\| u \cdot x \| = \sup | \sigma_n (u \cdot x) | = \sup | u_1 x_1 + ((n-1)/n) \cdot u_2 x_2 + \ldots + (1/n) \cdot u_n x_n | = \sup | \langle B_n (x), u \rangle | .$$

y aplicando el lema 1, tenemos que:

$$\sup_{\| x \| \leq 1} \| u \cdot x \| = \sup_{\| x \| < 1} \| u \cdot x \| = \sup_{\| x \| < 1} (\sup_n | \langle B_n (x), u \rangle |). \tag{2}$$

Sea $A = \{ B_n (x) : n \in N, y \| x \| < 1 \}$. Así, podremos escribir (2) en la forma:

$$\sup_{\| x \| \leq 1} \| u \cdot x \| = \sup_{y \in A} | \langle y, u \rangle | . \tag{3}$$

Sea $D = \{ B_n (x) : n \in N, \| x \| < 1 \ \text{ y } \ \| B_n (x) \| < 1 \}$; como $D \subset A$, se tiene que

$$\sup_{y \in A} | \langle y, u \rangle | \geq \sup_{y \in D} | \langle y, u \rangle | . \tag{4}$$

Pero D es denso en $\{y : \| y \| < 1\}$, en efecto:

Si $\| y \| < 1$, como $B_n(y)$ es $\| \;\|$-convergente hacia y se tiene que existe $n_0 \in N$, tal que $\| B_n(y) \| < 1$, para cada $n \geqslant n_0$; en consecuencia, $(B_n(y))$ con $n \geqslant n_0$, está contenida en D y converge hacia y.

Del hecho anterior, se sigue que:

$$\sup_{y \in D} | \langle y, u \rangle | = \sup_{\| y \| < 1} | \langle y, u \rangle | . \tag{5}$$

Así, aplicando (3), (4) y (5) se tiene que:

$$\sup_{\| x \| \leqq 1} \| u \cdot x \| \geq \sup_{\| y \| < 1} | \langle y, u \rangle | .$$

y nuevamente por el lema 1, se sigue que

$$\sup_{\| x \| \leqq 1} \| u \cdot x \| \geq \| u \| .$$

4. Espacios engendrados por espacios CS (a^n)

Dado $a = (a_n) \in \omega$ con $a_n \neq 0$, para $n = 1, 2, \ldots$ consideraremos el espacio definido mediante

$$C S(a) = \left\{ x = (x_n) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n \quad \text{es c-convergente} \right\} .$$

Es obvio que la aplicación:

$$D_{(1/a)} : y = (y_n) \in C S \dashrightarrow (y_n/a_n) \in C S(a)$$

es un isomorfismo algebraico, que puede transformarse en un isomorfismo topológico (isometría) sin más que definir en CS (a) una norma, mediante $\| x \|_a = \sup | \sigma_n (x \cdot a) |$, para cada x en CS (a).

PROPOSICIÓN 3.—Sean a y b dos elementos de ω, con $a_n \neq 0$ y $b_n \neq 0$, para cada $n \in N$. Entonces se verifica que:

$$C S(a) \subset C S(b) \Leftrightarrow b/a = (b_n/a_n) \in L .$$

además, en dicho caso, la inyección $I_{a,b} : CS(a) \hookrightarrow CS(b)$ es continua.

DEMOSTRACIÓN.—($\Longrightarrow$) Supongamos que $CS(a) \subset CS(b)$; dado $y \in CS$, existe $x \in CS(a)$, tal que $y = x \cdot a$, por lo que usando la hipótesis, se tiene que $x \in CS(b)$, es decir, la serie $\Sigma\, x_n\, b_n$ es c-convergente. Por tanto:

$$\Sigma\, y_n \cdot (b_n/a_n) = \Sigma\, x_n \cdot a_n \cdot (b_n/a_n) = \Sigma\, x_n\, b_n$$

que es c-convergente, luego $b/a \in L$.

($\Longleftarrow$) Si $x \in CS(a)$, entonces $x \cdot a \in CS$, por lo que aplicando la hipótesis, se tiene que

$$x \cdot b = (x_n \cdot a_n \cdot (b_n/a_n)) \in CS,$$

es decir, $x \in CS(b)$.

Veamos ahora que la aplicación $I_{a,b}$ es continua, para ello basta tener en cuenta que $I_{a,b}$ se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccccc} CS(a) & \xrightarrow{D_a} & CS & \xrightarrow{f_{b/a}} & CS & \xrightarrow{D_{1/b}} & CS(b) \\ x & \longrightarrow & a \cdot x & \longrightarrow & b \cdot x & \longrightarrow & x \end{array}$$

esto es,

$$I_{a,b} = D_{1/b} \circ f_{b/a} \circ D_a .$$

En donde D_a y $D_{1\backslash b}$ son continuas por la nota previa a la proposición 3, y $f_{b\backslash a}$ es continua por el corolario de la proposición 1, pues $b/a \in L$; por tanto $I_{a,b}$ es continua.

Consideremos ahora una sucesión a^n en ω, donde $a^n = (a_i^n)$ es tal que $a_i^n \neq 0$, para cada $n \in N$ y cada $i \in N$. Si para cada $n \in N$, se tiene que

$$a^n/a^{n+1} = (a_i^n/a_i^{n+1}) \in L,$$

se sigue de la proposición anterior que para cada $n \in N$ se verifica $CS(a^n) \supset CS(a^{n+1})$ y que la inyección I_n de $CS(a^{n+1})$ en $CS(a^n)$ es continua. Con lo que disponemos de la siguiente situación:

$$CS(a^1) \xleftarrow{I_1} \supset CS(a^2) \xleftarrow{I_2} \supset \cdots \longleftarrow \supset CS(a^n) \xleftarrow{I_n} \supset CS(a^{n+1}) \longleftarrow \supset \cdots$$

con I_n continua para $n = 1, 2, 3, \ldots$

Podemos considerar el espacio $\bigcap_{n=1}^{\infty}$ CS (a^n) y dotarlo de la topología límite proyectivo. Denominaremos a este espacio mediante K (a), es decir,

$$K(a) = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ n}} CS(a^n).$$

Como cada espacio CS (a^n) es completo y separado, se sigue que K (a) es completo y separado (ver [4], p. 232). Además, la topología proyectiva de K (a) puede ser definida mediante la siguiente familia numerable de seminormas: $p_n(x) = \| x \|_{a^n}$, en consecuencia, K (a) es un espacio de Fréchet.

Estudiaremos ahora bajo qué condiciones las aplicaciones I_n son compactas.

Proposición 4.—La aplicación $I_{a,b}$: CS (a) $\hookrightarrow$ CS (b) además de continua es compacta si, y sólo si, $b/a = (b_n/a_n) \in$ F.

Demostración.—Obsérvese que las aplicaciones $I_{a,b}$ y $f_{a\backslash b}$ pueden relacionarse en la siguiente manera:

$$I_{b,a} = D_{1/b} \circ f_{b/a} \circ D_a \quad \text{y} \quad f_{b/a} = D_b \circ I_{a,b} \circ D_{1/a},$$

donde las transformaciones diagonales D_a y D_b así como sus inversas $D_{1\backslash a}$ y $D_{1\backslash b}$ son continuas.

Como la composición de aplicaciones lineales continuas con aplicaciones lineales compactas es lineal compacta, se sigue que $I_{a,b}$ es compacta si, y sólo si, $f_{b\backslash a}$ es compacta.

Aplicando ahora el teorema 2, se sigue que efectivamente $I_{a,b}$ es compacta si, y sólo si, $b/a \in$ F.

Como consecuencia de la proposición anterior, aplicándola al espacio K (a), obtenemos el siguiente corolario:

Corolario.—Sea $a^n \in \omega$, con $a_i^n \neq 0$, para cada $n \in$ N y cada $i \in$ N. Supongamos que $a^n/a^{n+1} \in$ F. Entonces, K (a) es un espacio de Schwartz. En particular, K (a) es un espacio de Fréchet que es Montel.

En lo que sigue probaremos que F $= \{u \in$ L : $\lim u_n = 0\}$, y para ello necesitaremos la siguiente:

PROPOSICIÓN 5.—(e_n) es una c-base en L para la topología σ (L, CS).

DEMOSTRACIÓN.—Sea $u = (u_n) \in$ L, tenemos que probar que $\Sigma\, u_n\, e_n$ es c-convergente hacia u en la topología σ (L, CS). Esto es, que $B_n\,(u)$ es σ (L, CS)-convergente hacia u, o equivalentemente, que para cada x en CS, la sucesión $\langle x, B_n\,(u)\rangle$ es convergente hacia $\langle x, u\rangle$ en K.

Ahora bien,

$$\langle x, B_n\,(u)\rangle = \left\langle (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \left(u_1, \frac{n-1}{n}\, u_2, \ldots, \frac{1}{n}\, u_n, 0, .\right)\right\rangle = \langle B_n\,(x), u\rangle .$$

Como $\langle \cdot, u\rangle$ es continua y $B_n\,(x)$ converge hacia x en CS, se tiene que $\langle x, B_n\,(u)\rangle = \langle B_n\,(x), u\rangle$ converge hacia $\langle x, u\rangle$ en K.

La unicidad de la representación se obtiene de forma inmediata.

TEOREMA 3.

$$F = \{u = (u_n) \in L : \lim u_n = 0\}.$$

DEMOSTRACIÓN.—(a) Si $u \in$ F, como (e_n) es una c-base de F, se tiene que

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\, e_n\, (c)$$

en la norma del espacio, luego la sucesión $(u_n\, e_n)$ es $\|\ \|$-convergente a cero en el sentido de Cesáro; esto es

$$(1/n) \cdot \|(u_1, u_2, \ldots, u_n, 0, 0, \ldots)\|$$

converge a cero en K. Pero

$$(1/n) \cdot \|(u_1, u_2, \ldots, u_n, 0, 0, \ldots)\| = (1/n) \cdot \sum_{k=1}^{n-2} k \cdot |\Delta^2 u_k| +$$
$$+ ((n-1)/n) \cdot \quad u_{n-1} \quad 2 \cdot u_n | + | u_n | \geq | u_n | ;$$

por lo que $\lim u_n = 0$.

(b) Probaremos ahora que si $u = (u_n) \in$ L, con $\lim u_n = 0$, entonces $u \in$ F. Tendremos que demostrar que

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n (c)$$

en la norma del espacio, esto es, que

$$\lim \| B_n (u) - u \| = 0.$$

Sea $z^n = u - B_n (u)$, es decir, el vector de coordenadas

$$z^n = \left(0, \frac{1}{n} u_2, \frac{2}{n} u_3, \ldots, \frac{n-1}{n} u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots\right);$$

trataremos de evaluar el valor de $\lim \| z^n \|$, para lo que necesitaremos de evaluar el valor de $\lim \| z_n \|$, para lo que necesitaremos conocer los valores de

$$\| z^n \| = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot | \Delta^2 z^n_k |$$

que calcularemos a continuación:

$$\Delta^2 z^n_1 = 0 - \frac{2}{n} u_2 + \frac{2}{n} u_3 = - \frac{2}{n} (u_2 - u_3) = - \frac{2}{n} \Delta u_2.$$

para los valores $2 \leqslant k \leqslant n - 1$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 z^n_k &= \frac{k-1}{n} u_k - \frac{2k}{n} u_{k+1} + \frac{k+1}{n} u_{k+2} = \\
&= \frac{k-1}{n} \left[u_k - \frac{2k}{k-1} u_{k+1} + \frac{k+1}{k-1} u_{k+2} \right] = \\
&= \frac{k-1}{n} \cdot \left[u_k - 2_{k+1} + u_{k+2} - \frac{2}{k-1} u_{k+1} + \frac{2}{k-1} u_{k+2} \right] = \\
&= \frac{k-1}{n} \cdot \Delta^2 u_k - \frac{2}{n} \cdot \Delta u_{k+1} \cdot
\end{aligned}$$

para $k = n$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 z^n_n &= \frac{n-1}{n} u_n - 2 u_{n+1} + u_{n+2} = u_n - 2 u_{n+1} + u_{n+2} - \frac{1}{n} u_n = \\
&= \Delta^2 u_n - \frac{1}{n} u_n
\end{aligned}$$

y para $k > n$, se tiene que:

$$\Delta^2 z^n_k = \Delta^2 u_k.$$

Por tanto:

$$\| z^n \| = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot |\Delta^2 z^n_k| \leq \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=2}^{n} (k-1) \,|\, \Delta u_k \,| + \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{n} \,|\, \Delta^2 u_k \,| +$$

$$+ n \cdot |\Delta^2 u_n| + |u_n| + \sum_{K=n+1}^{\infty} k \cdot |\Delta^2 u_k| =$$

$$= \left[\frac{2}{n} \sum_{k=2}^{n} (k-1) \cdot |\Delta u_k| \right] + |u_n| +$$

$$+ \left[\sum_{k=2}^{n-1} \frac{k(k-1)}{n} \cdot |\Delta^2 u_k| + \sum_{k=n}^{\infty} k \cdot |\Delta^2 u_k| \right]. \qquad (1)$$

En estas condiciones, bastará demostrar que cada uno de los tres sumandos de (1) tiene límite cero.

El segundo sumando de (1) tiene límite cero por hipótesis.

Estudiemos el tercer sumando. Para ello haremos uso del siguiente resultado: «Si $a_n \geqslant 0$ con $\Sigma\, a_n < +\infty$, y si

$$A_n = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k-1}{n} a_k + \sum_{k=n}^{\infty} a_k,$$

entonces $\lim A_n = 0$», lo que podemos probar con el siguiente razonamiento: Sea el vector

$$u^n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-2}{n}, 1, 1, \ldots\right) = e - B_n(e) - \frac{1}{n} e_n \in L,$$

como $a = (a_n) \in l^1 \subset CS$ y

$$A_n = \langle a, u^n \rangle = \langle a, e - B_n(e) \rangle - \langle a, \frac{1}{n} e_n \rangle = \langle a, e \rangle - \langle a, B_n(e) \rangle + \frac{1}{n} \cdot a_n;$$

tenemos que se verifica que $\lim \frac{1}{n} a_n = 0$, pues $\lim a_n = 0$; y por la proposición 5 se tiene que

$$\lim [\langle a, e \rangle - \langle a, B_n(e) \rangle] = 0,$$

lo que prueba que $\lim A_n = 0$.

Ahora bien, tomando $a_k = k \cdot |\Delta^2 u_k|$, se tiene que la serie Σa_k es convergente, pues $u \in L$, y es claro que la sucesión A_n, obtenida de esta forma, corresponde al tercer sumando de (1), por lo que dicho sumando tiene límite cero.

Consideremos ahora el primer sumando de (1), es decir,

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=2}^{n} (k-1) \cdot |\Delta u_k| .$$

Sea $b_k = (k-1) \cdot |\Delta u_k|$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$; tendremos que probar que:

$$\lim \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} = 0$$

para lo que es suficiente ver que $\lim b_n = 0$.

Por tanto, el resultado quedará probado si demostramos que para cada $u = (u_n) \in L$ con $\lim u_n = 0$, se verifica que $\lim n \cdot \Delta u_{n+1} = 0$.

Sea

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \Delta^2 u_n$$

haciendo uso del resultado (b), obtenemos que $\alpha = u_1$, pues

$$u_1 = \langle e_1, u \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} e_{1,n} u_n (c) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n (e_1) n \Delta^2 u_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \Delta^2 u_n .$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k \Delta^2 u_k &= (\Delta u_1 - \Delta u_2) + 2 (\Delta u_2 - \Delta u_3) + 3 (\Delta u_3 - \Delta u_4) + \ldots + \\ &+ n (\Delta u_n - \Delta u_{n+1}) = \Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3 + \ldots + \Delta u_n - n \Delta u_{n+1} = \\ &= (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_n - u_{n+1}) - n \Delta u_{n+1} = \\ &= u_1 - u_{n+1} - n \cdot \Delta u_{n+1}. \end{aligned}$$

esto es,

$$n \cdot \Delta u_{n+1} = u_1 = u_1 - u_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} k \cdot \Delta^2 u_k;$$