DIFERENCIACION DE MEDIDAS SOBRE ESPACIOS UNIFORMES

Baltasar Rodríguez-Salinas

Recibido: 1 abril 1981

In this work we extend for strict Radon measure of type ($\mathcal{H}$) some results given by Mattila in [4] and, in particular, for strict Radon measure.

En este trabajo extendemos algunos resultados de Mattila [4] para medidas de Radon estrictas de tipo ($\mathcal{H}$) y, en particular, para medidas de Radon estrictas.

1. Definición.—Sea E un espacio topológico y $\mathcal{H}$ una clase de conjuntos cerrados de E. Entonces se llama *medida de Radon estricta de tipo* ($\mathcal{H}$) a toda medida μ definida sobre la clase $\mathcal{B}$ de los conjuntos de Borel de E con las propiedades:

1.1. Todo $H \in \mathcal{H}$ es μ-compacto y de medida finita. (Un conjunto H se dice μ-compacto si, para todo cubrimiento abierto $\mathcal{G}_0$ de H y para todo $\varepsilon > 0$, existe un número finito de abiertos $G_i \in \mathcal{G}_0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tales que $\mu(H - \bigcup_1^n G_i) < \varepsilon$).

1.2. μ es exteriormente regular, e. d.,

$$\mu(B) = \inf\{\mu(G): \; B \subset G \in \mathcal{G}$$

para todo $B \in \mathcal{B}$, siendo $\mathcal{G}$ la clase de los abiertos de E.

1.3.

$$\mu(B) = \sup\{\mu(H): \; B \supset H \in \mathcal{H}\}$$

para todo $B \in \mathcal{B}$ de medida $\mu(B)$ finita o todo abierto B de E.

2. Notación.—En este trabajo E es un espacio uniforme con

una base $\mathcal{U}$, cuyos miembros son subconjuntos abiertos y simétricos de $E \times E$. Si $U \in \mathcal{U}$, el U entorno de $x \in E$ es

$$U[x] = \{y : (x, y) \in U\}.$$

De igual manera, el U entorno de un conjunto $A \subset E$ es

$$U[A] = \cup \{U[x] : x \in A\}$$

que, evidentemente, es abierto.

Si $f: \mathcal{U} \longrightarrow \overline{\mathbf{R}} = \{t: -\infty \leqslant t \leqslant \infty\}$, denotamos, respectivamente, por

$$\overline{\lim_{U \in \mathcal{U}}} f(U), \quad \underline{\lim_{U \in \mathcal{U}}} f(U) \quad \text{y} \quad \lim_{U \in \mathcal{U}} f(U)$$

el límite superior, el límite inferior y el límite de f cuando U tiende a la diagonal de $E \times E$ en $\mathcal{U}$. Por ejemplo,

$$\overline{\lim_{U \in \mathcal{U}}} f(U) = \inf_{V \in \mathcal{U}} \sup \{f(U) : V \supset U \in \mathcal{U}\}.$$

Denotamos por H el conjunto de todas las funciones h: $\mathcal{U} \longrightarrow (0, \infty)$ tales que $U \subset V$ implica

$$h(U) \leq h(V) \quad \text{y} \quad \lim_{U \in \mathcal{U}} h(U) = 0.$$

Si $1 \leqslant p < \infty$, $A \subset E$ y μ es una medida sobre E, $L^p(\mu, A)$ es el conjunto de todas las funciones μ-medibles $f: A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ tales que

$$\int_A |f|^p \, d\mu < \infty \quad \text{y} \quad L^p(\mu) = L^p(\mu, E).$$

χ_A es la función característica de A.

3. Definición.—Se dice que una medida sobre E tiene la *propiedad de aproximación uniforme* si para todo conjunto de Borel A de medida $\mu(A) < \infty$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto de Borel $H \subset A$ y $U \in \mathcal{U}$ tales que

$$\mu(A - H) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \mu(U[H] - H) < \varepsilon.$$

4. PROPOSICIÓN.—*Si* μ *es una medida de Radon estricta de tipo* $(\mathcal{H})$ *sobre el espacio uniforme E, entonces E tiene la propiedad de aproximación uniforme.*

DEMOSTRACIÓN. — Sea A un conjunto de Borel de medida $\mu(A) < \infty$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un abierto $G \supset A$ tal que $\mu(G - A) < \varepsilon/2$. Sea

$$G_U = \{x : \ U[x] \subset G\}.$$

Entonces

$$\lim_{U \in \mathcal{U}} G_U^0 = \cup \{G_U^0 : \ U \in \mathcal{U}\} \subset G.$$

Pero por otra parte, si $x \in G$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \circ U[x] \subset G$. Por tanto,

$$U[x] \subset G_U \quad \text{y} \quad x \in G_U^0,$$

luego

$$\lim_{U \in \mathcal{U}} G_U^0 = G.$$

Por consiguiente, para cada $\varepsilon > 0$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que

$$\mu(G - G_U^0) < \varepsilon/4$$

Análogamente, existe $H \in \mathcal{H}$ que verifica

$$H \subset A \cap G_U^0 \quad \text{y} \quad \mu(A \cap G_U^0 - H) < \varepsilon/4.$$

Entonces

$$U[H] \subset U[G_U] \subset G,$$

$$\mu(A - H) \leq \mu(G - G_U^0) + \mu(A \cup G_U^0 - H) < \varepsilon/2$$

y

$$\mu(U[H] - H) \leq \mu(G - A) + \mu(A - H) < \varepsilon.$$

5. LEMA.—*Sean* μ *y* ν *medidas de Radon estrictas de tipo* $(\mathcal{H})$ *sobre el espacio uniforme E. Si A y B son conjuntos de Borel de E de medidas* $\mu(A) < \infty$ *y* $\nu(B) < \infty$, *entonces para cada* $U \in \mathcal{U}$ *la función* $x \longrightarrow \nu(U[x] \cap B)$ *es* μ*-medible en A y*

$$\int_B \mu(U[x] \cap A)\, d\nu(x) = \int_A \nu(U[x] \cap B)\, d\mu(x)$$

En particular, si f: $E \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$ *es una función de Borel no negativa tal que* $\int_B f \, d \mu < \infty$, *se tiene*

$$\int_B \mu(U[x] \cap A) f(x) \, d\mu(x) = \int_A \int_{U[x] \cap B} f \, d\mu \, d\mu(x).$$

DEMOSTRACIÓN.—En primer lugar,

$$U[x] \cap B = \{y : \; (x, y) \in U \cap (A \times B)\}$$

para $x \in A$ y $U \cap (A \times B)$ es un conjunto de Borel y, por tanto, medible para la medida $\mu \otimes \nu$ de Radon estricta de tipo $(\mathcal{H}_2)$, donde $\mathcal{H}_2$ es la clase de los conjuntos cerrados de $E \times E$ contenidos en algún conjunto $H \times H$, siendo H unión finita de conjuntos de $\mathcal{H}$.

Como A y B son de medidas $\mu(A) < \infty$ y $\nu(B) < \infty$, se deduce del teorema de Fubini (véase [3]) que $x \longmapsto \nu(U[x] \cap B)$ es μ-medible en A y

$$\int_B \mu(U[x] \cap A) \, d\nu(x) = \int_B \int_A \chi_{U \cap (B \times A)}(x, y) \, d\mu(y) \, d\nu(x)$$

$$= \int_A \int_B \chi_{U \cap (A \times B)}(x, y) \, d\nu(y) \, d\mu(x)$$

$$= \int_A \nu(U[x] \cap B) \, d\mu(x).$$

En particular, si $f: E \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$ es una función de Borel no negativa tal que $\int_B f \, d\mu < \infty$, se tiene

$$\int_B \mu(U[x] \cap A) f(x) \, d\mu(x) = \int_A \int_{U[x] \cap B} f \, d\mu \, d\mu(x).$$

El lema anterior es, evidentemente, también válido cuando, respectivamente, A y B son de medidas μ y ν σ-finitas.

6. LEMA.—*Supongamos que A y B son conjuntos de Borel y que existe* $h \in H$ *tal que*

$$\mu(U[x]) \leq h(U) \quad (\mu \text{ *medida de Radon estricta de tipo* } (\mathcal{H}))$$

para casi todo $x \in U[B]$. *Si* $A \supset B$ *y* $\mu(B) < \infty$, *se tiene*

$$\lim_{U \in \mathcal{U}} h(U)^{-1} \int_B \mu(U[x] - A)\, d\mu(x) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\varepsilon > 0$. Por la propiedad de aproximación uniforme existe un conjunto de Borel $H \subset B$ y un $U_0 \in \mathcal{U}$ tales que

$$\mu'(B - H) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \mu(U_0[H] - H) < \varepsilon.$$

Entonces del lema 5, para $U \in \mathcal{U}$ y $U \subset U_0$, resulta

$$\begin{aligned} h(U)^{-1} &\int_B \mu(U[x] - A)\, d\mu(x) \leq \\ &\leq h(U)^{-1} \int_H \mu(U[x] - H)\, d\mu(x) + \varepsilon = \\ &= h(U)^{-1} \int_H \mu(U[x] \cap U[H] - H)\, d\mu(x) + \varepsilon = \\ &= h(U)^{-1} \int_{U[H] - H} \mu(U[x] \cap H)\, d\mu(x) + \varepsilon \leq \\ &\leq \mu(U[H] - H) + \varepsilon < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba el lema.

7. TEOREMA.—*Supongamos que existe* $h \in H$ *tal que*

$$\mu(U[x]) \leq h(U) \quad (\mu \textit{ medida de Radon estricta de tipo } (\mathcal{H}))$$

para casi todo $x \in U[A]$ *y todo* $U \in \mathcal{U}$, $U \subset U_0$. *Si* $f \in L^p(\mu)$ *es una función de Borel para algún* $1 \leqslant p < \infty$, *y si* A *tiene medida* μ *σ-finita, entonces*

$$\lim_{U \in \mathcal{U}} h(U)^{-1} \int_A \int_{U[x]} |f(y) - f(x)|^p\, d\mu(y)\, d\mu(x) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $f = \chi_B$ donde B es un conjunto de Borel de medida $\mu(B) < \infty$. Entonces, si $U \in \mathcal{U}$, se tiene

$$h(U)^{-1} \int_A \int_{U[x]} | \chi_B(y) - \chi_B(x) |^p \, d\mu(y) \, d\mu(x) =$$

$$= h(U)^{-1} \int_{A \cap B} \mu(U[x] - B) \, d\mu(x) + h(U)^{-1} \int_{A - B} \mu(U[x] \cap B) \, d\mu(x).$$

El primer término de esta expresión tiende evidentemente a 0 cuando U tiende a la diagonal de E × E en $\mathcal{U}$ puesto que, según el lema 6, se verifica

$$\lim_{U \in \mathcal{U}} h(U)^{-1} \int_B \mu(U[x] - B) \, d\mu(x) = 0.$$

Como además, según el lema 5, se tiene

$$\int_{A-B} \mu(U[x] \cap B) \, d\mu(x) = \int_B \mu(U[x] \cap A - B) \, d\mu(x) \leq$$

$$\leq \int_B \mu(U[x] - B) \, d\mu(x),$$

resulta

$$\lim_{U \in \mathcal{U}} h(U)^{-1} \int_A \int_{U[x]} | \chi_B(y) - \chi_B(x) |^p \, d\mu(y) \, d\mu(x) = 0.$$

Ahora para demostrar completamente el teorema basta proceder como Mattila [4] en 3.2.

8. Corolario.—*Si en adición a las hipótesis del teorema 7 existe* c > 0 *tal que*

$$\mu(U[x] \geq ch(U)$$

para casi todo x ∈ *A, entonces*

$$\mu(U[x])^{-1} \int_{U[x]} f \, d\mu \longrightarrow f(x)$$

en $L^p(\mu, A)$.

DEMOSTRACIÓN.—Basta proceder como Mattila [4] en 3.3.

Si A es medible y $f_U, f\colon E \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$ son medibles para todo $U \in \mathcal{U}$, se dice que $f_U \longrightarrow f$ en medida μ_A si

$$\lim_{U \in \mathcal{U}} \mu \{x \in A : |f_U(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

para todo $\varepsilon > 0$.

9. COROLARIO.—*Supongamos que E es metrizable (o que tiene una base contable para su uniformidad). Si en adición a las hipótesis del teorema 7* $\mu(A) < \infty$ *y*

$$\underline{\lim}_{U \in \mathcal{U}} h(U)^{-1} \mu(U[x]) >$$

para casi todo $x \in A$, *entonces*

$$\mu(U[x])^{-1} \int_{U[x} | f(y) - f(x) |^p \, d\mu(y) \longrightarrow 0$$

en medida μ_A *y*

$$\mu(U[x])^{-1} \int_{U[x]} f \, d\mu \longrightarrow f(x)$$

en medida μ_A.

DEMOSTRACIÓN.—Basta proceder como Mattila [4] en 3.4.

10. COROLARIO.—*Sea* $\mathcal{V}$ *una base para la uniformidad de E formada por conjuntos abiertos. Si existe* $C < \infty$ *tal que*

$$\mu(V^{-1}[x]) \leq C \mu(V[x])$$

para casi todo $x \in U_0[A]$ *y para* $V \in \mathcal{V}$, *entonces las proposiciones 6 a 9 son también válidas si se sustituye* $\mathcal{U}$ *por* $\mathcal{V}$.

DEMOSTRACIÓN.—Basta proceder como Mattila [4] en 3.5.

11. TEOREMA.—*Supongamos* μ *y A como en el corolario 9, que* ν *es una medida sobre E tal que los conjuntos de Borel son* ν*-medi-*

bles, $\nu(E) < \infty$ *y* ν *es absolutamente continua respecto de* μ. *Si* $U_0 \in \mathcal{U}$ *y*

$$\mathcal{V} = \{ U[x] : x \in A, \ U_0 \supset U \in \mathcal{U} \},$$

entonces para todo $\varepsilon > 0$ *existe una subfamilia contable*

$$\{ U_n [x_n] : n \in \mathbf{N} \} \subset \mathcal{V}$$

tal que

$$\nu \left(A - \bigcup_1^\infty U_n [x_n] \right) = 0$$

y

$$\sum_1^\infty \nu (U_n [x_n]) \leq \nu \left(\bigcup_1^\infty U_n [x_n] \right) + \varepsilon .$$

DEMOSTRACIÓN.—Basta proceder como Mattila en 3.7. Para ello se debe seguir los métodos de Hayes y Pauc [1] en III.2.5-7.

Suponemos ahora que μ y ν son medidas de Radon estrictas de tipo $(\mathcal{H})$ sobre E, ν (E) $< \infty$ y A es un conjunto de Borel en E de medida μ (A) $< \infty$.

12. TEOREMA.—*Si* ν *es una medida singular respecto de* μ *y si existe* $h \in H$, $c > 0$ *y* $U_0 \in \mathcal{U}$ *tales que para* $U \in \mathcal{U}$, $U \subset U_0$,

$$\mu (U [x]) \leq h (U)$$

para casi todo $x \in U [A]$ *y*

$$\mu (U [x]) \geq c h (U)$$

para casi todo $x \in A$, *entonces*

$$\nu (U [x]) / \mu (U [x]) \longrightarrow 0$$

en medida μ_A.

DEMOSTRACIÓN.—Como ν es singular respecto de μ, existe un conjunto de Borel $B \subset E$ tal que μ (B) $= 0 = \nu$ (E — B). Sean $\varepsilon > 0$

y $\delta > 0$. Vamos a probar primero que existen conjuntos abiertos V, W y $U_1 \in \mathcal{U}$, $U_1 \subset U_0$ tales que

$$B \subset V, \quad \mu(V) < \delta, \quad U_1[W] \subset V, \quad \nu(V - W) < \delta.$$

Sea $V \supset B$, $V \in \mathcal{U}$ con $\mu(V) < \delta$. Pongamos

$$V_U = \{x \in V : U[x] \subset V\}$$

para $U \in \mathcal{U}$, entonces

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} V_U^0 = V \quad y \quad \lim_{U \in \mathcal{U}} \nu(V - V_U^0) = 0 .$$

Por tanto existe un $U_1 \subset \mathcal{U}$, $U_1 \subset U_0$ que verifica $U_1[W] \subset V$ y $\mu(V - W) < \delta$ para $W = V_{U_1}^0$.

Por el lema 5 se tiene para $U \in \mathcal{U}$ y $U \subset U_1$,

$$\begin{aligned} &\int_{A - V} \nu(U[x])/\mu(U[x])\, d\mu(x) = \\ &\leq (c\,h(U))^{-1} \int_{A - V} \nu(U[x] \cap B - W)\, d\mu(x) \leq \\ &\leq (c\,h(U))^{-1} \int_{B - V} \mu(U[x] \cap A - V)\, d\nu(x) \leq \\ &\leq c^{-1} \nu(B - W) < c^{-1}\delta, \end{aligned}$$

de donde teniendo en cuenta que $\mu(V) < \delta$ resulta

$$\mu(\{x \in A : \nu(U[x])/\mu(U[x]) \geq \varepsilon\}) < \delta(c^{-1}\varepsilon^{-1} + 1).$$

Esto prueba el teorema.

Si ν es una medida arbitraria por el teorema de descomposición de Lebesgue existe una función de Borel no negativa f y una medida singular ν_s tales que

$$\nu(B) = \int_B f\, d\mu + \nu_s(B).$$

13. TEOREMA.—*Si* μ *satisface las condiciones del teorema 12 y* ν *es como arriba se tiene*

$$\nu(U[x])/\mu(U[x]) \longrightarrow f(x)$$

en medida μ_A.

DEMOSTRACIÓN.—Basta combinar el corolario 8 con el teorema 12.

14. COROLARIO.—*Supongamos que E es metrizable (o que tiene una base contable para su uniformidad). Si existe* $h \in H$ *y* $U_0 \in \mathcal{U}$ *tales que*

$$\mu(U[x]) \leq h(U)$$

para casi todo $x \in U[A]$ *y todo* $U \in \mathcal{U}$, $U \subset U_0$, *y*

$$\lim_{\overline{U \in \mathcal{U}}} h(U)^{-1} \mu(U[x]) > 0$$

para casi todo $x \in A$, *se tiene*

$$\nu(U[x])/\mu(U[x]) \longrightarrow f(x)$$

en medida μ_A, *supuesto que* $\mu(A) < \infty$.

DEMOSTRACIÓN.—Basta proceder como Mattila [4] en 4.3.

15. COROLARIO.—*Sea* $\mathcal{V}$ *una base para la uniformidad de E formada por conjuntos abiertos. Si existe* $C < \infty$ *tal que*

$$\mu(V^{-1}[x]) \leq C\mu(V[x])$$

para casi todo $x \in U_0[A]$ *y para* $V \in \mathcal{V}$, *entonces los resultados de 12 a 14 son válidos si se sustituye* $\mathcal{U}$ *por* $\mathcal{V}$.

DEMOSTRACIÓN.—Basta proceder como Mattila [4] en 4.4.

Bibliografía

[1] HAYES, C. A. and PAUC, C. Y. (1970). Derivation and Martingales. Springer.

[2] JIMÉNEZ GUERRA, P. y RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1979). Medidas de Radon de tipo ($\mathcal{H}$) en espacios topológicos arbitrarios. *Memoria de la R. Acad. Ci. Madrid.*

[3] JIMÉNEZ GUERRA, P. y RODRÍGUEZ-SALINAS, B. Teorema de Fubini en espacios topológicos arbitrarios. Aparecerá en la *Rev. R. Acad. Ci. Madrid.*

[4] MATTILA, P. (1980). Differentiation of measures on uniform spaces. *Lect. Notes in Math.*, **794**, 261-283. Springer, Berlin.

[5] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1973). Teoría de la medida sobre los espacios topológicos no localmente compactos. *Rev. Mat. Hispano-Americana*, (4), **32**, 257-274.

[6] SCHWARTZ, L. (1973). *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures.* Oxford University Press.

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid