INMERSION EN ESPACIOS CUASISEUDOMETRICOS Y CUASIUNIFORMES

M. López Pellicer y S. Romaguera (1)

Recibido: 3 diciembre 1980

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

Usando una técnica de inmersión, se da (teorema 1) una sencilla demostración de que todo espacio topológico con base σ-puntualmente finita es cuasiseudometrizable (resultado que fue obtenido por L. J. Norman [4] y M. Sion y G. Zelmer [8]). El método utilizado permite obtener (teoremas 2 y 3) ciertas completaciones que conservan la cuasiuniformidad de Pervin.

Using a technique of embedding, we prove easily (theorem 1) that every topological space with a σ-pointly finite base is quasi-pseudo-metrizable (this result was obtained, independently, by L. J. Norman and M. Sion with G. Zelmer). With this method we obtain (theorems 2 and 3) some completions which preserve the Pervin's quasi-uniformity.

En [3]-3.12, S. Mrówka demuestra que el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es T_0 si, y sólo si, es homeomorfo a cierta potencia de la diada conexa de Alexandrov $(\{0, 1\}, \mathcal{J})$, siendo

$$\mathcal{J} = \}\emptyset, \{1\}, \}0, 1\ \{.$$

PROPOSICIÓN 1.—Sea α un cardinal infinito. El espacio $(X, \mathcal{T})$ es homeomorfo a un subespacio de $(\{0, 1\}, \mathcal{J})^\alpha$ si, y sólo si, es T_0 y tiene una base $\mathcal{B}$ de cardinal menor o igual a α.

---

(1) Los autores agradecen al Académico Numerario Excmo. Sr. D. Manuel Valdivia la presentación de este artículo en la REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS DE MADRID.

DEMOSTRACIÓN.—Las funciones características de los $\mathcal{T}$-abiertos de $\mathcal{B}$ forman una familia $\mathcal{F}$ de aplicaciones continuas de $(X, \mathcal{T})$ en $(\{0,1\}, \mathcal{J})$ que distingue puntos y cerrados. Si $(X, \mathcal{T})$ es T_0 se tiene, por [3]-2.1 y 2.3, que se puede sumergir $(X, \mathcal{T})$ en $(\{0,1\}, \mathcal{J})^{\mathcal{F}}$ y, por tanto, también se puede sumergir en $(\{0, 1\}, \mathcal{J})^{\alpha}$.

El recíproco se deduce de que $(\{0, 1\}, \mathcal{J})^{\alpha}$ es T_0 y de que el cardinal de su topología es α, pues el cardinal de las partes finitas de un conjunto de cardinal α es α. Por tanto, los subespacios de $(\{0, 1\}, \mathcal{J})^{\alpha}$ son T_0 y admiten bases de cardinal menor o igual a α.

COROLARIO 1.1.—Sea α_0 el primer cardinal infinito. El espacio $(X, \mathcal{T})$ es homeomorfo a un subespacio de $(\{0, 1\}, \mathcal{J})^{\alpha_0}$ si, y sólo si, es T_0 y tiene base numerable.

DEMOSTRACIÓN.—Aplíquese la proposición 1 con $\alpha = \alpha_0$.

Como el espacio $(\{0, 1\}, \mathcal{J})$ es cuasiseudometrizable (considérese, por ejemplo, $d(x, y) = \text{máx}(x - y, 0)$) se deduce del corolario que el ser T_0 y tener base numerable implica la cuasiseudometrizabilidad, pues esta propiedad es estable en los productos numerables y en la formación de subespacios.

En el teorema 1 se da otra condición suficiente de cuasiseudometrizabilidad que es más general, considerando bases σ-puntualmente finitas.

TEOREMA 1 (Norman [4], Sion y Zelmer [8]).—Si el espacio $(X, \mathcal{T})$ posee una base $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \alpha_0} \mathcal{B}_n$ σ-puntualmente finita, es cuasiseudometrizable.

DEMOSTRACIÓN.—Sea U un abierto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{X}_U$ la función característica de U. La topología $\{X, \emptyset, U\}$ está generada por la cuasimétrica

$$d_U(x, y) = \text{máx}\,\}\chi_U(x) - \chi_U(y), 0\{.$$

Por la finitud local de $\mathcal{B}_n$ se tiene que

$$d_n(x, y) = \sum_{U \in \mathcal{B}_n} d_U(x, y)$$

es una cuasiseudométrica. Además:

$$\}y \in X : d_n(x, y) < r \leq 1\{ = \bigcap\ U \in \mathcal{B}_n : x \in U\{$$

y, por tanto, $\mathcal{B}_n$ es subbase de $\mathcal{T}_{d_n}$. Por ser $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{T}$, se tiene que $\mathcal{T}$ es la topología supremo de $\{\mathcal{T}_{d_n} : n \in \alpha_0\}$ y, en consecuencia, (X, $\mathcal{T}$) es homeomorfo a la diagonal del cuasiseudometrizable $\prod_{n \in \alpha_0} (X, d_n)$.

En [1] A. Császár afirma, usando el desarrollo de estructuras syntopógenas, que todo espacio topológico (X, $\mathcal{T}$) es cuasiuniformizable. En [5] W. J. Pervin da una demostración topológica directa de dicho resultado, construyendo para cada $G \in \mathcal{T}$ el conjunto

$$S_G = (G \times G) \cup (X - G) \times X$$

y probando que la familia $\mathcal{S} = \{S_G : G \in \mathcal{T}\}$ es subbase de una cuasiuniformidad en X compatible con la topología $\mathcal{T}$. A esta cuasiuniformidad la denominaremos cuasiuniformidad de Pervin y la denotaremos por $\mathcal{U}_\mathcal{T}$.

E. Popa prueba en [6] que si $B \subset X$ es un subespacio cerrado de un espacio cuasiuniforme completo (X, $\mathcal{U}$), entonces el espacio (B, $\mathcal{U}|_B$) es completo.

TEOREMA 2.—Sea (X, $\mathcal{T}$) un espacio T_0. Entonces, la cuasiuniformidad de Pervin $\mathcal{U}_\mathcal{T}$ admite una completación T_0 que es de Pervin.

DEMOSTRACIÓN.—Por la proposición 1 existe un homeomorfismo φ entre (X, $\mathcal{T}$) y el subespacio φ (X) de $(\{0, 1\}, \mathcal{J})^\mathcal{T}$. Es fácil comprobar que $\varphi_2(x, y) = (\varphi(x), \varphi(y))$ es un isomorfismo cuasiuniforme entre (X, $\mathcal{U}_\mathcal{T}$) y la cuasiuniformidad de Pervin asociada a φ (X). Como $(\{0, 1\}, \mathcal{J})$ es compacto, se sigue que también lo es $(\{0, 1\}, \mathcal{J})^\mathcal{T}$ y, por tanto, su cuasiuniformidad de Pervin es completa, [7]-teorema 1.4. Finalmente, la cuasiuniformidad de Pervin del $(\{0, 1\}, \mathcal{J})^\mathcal{T}$-cerrado $\overline{\varphi(X)}$ es la completación deseada que es, evidentemente, T_0.

TEOREMA 3.—Sea (X, $\mathcal{T}$) un espacio con base numerable $\mathcal{B} = \{U_n : n \in \alpha_0\}$. Entonces, la cuasiuniformidad de Pervin $\mathcal{U}_\mathcal{T}$ admite una completación que es de Pervin.

DEMOSTRACIÓN.—Por el teorema 1 existe un homeomorfismo φ entre (X, $\mathcal{T}$) y la diagonal de $\prod_{n \in \alpha_0} (X, d_n)$, donde

$$d_n(x, y) = \text{máx}\{\chi_{U_n}(x) - \chi_{U_n}(y), 0\}.$$

El espacio $\prod_{n \in a_0} (X, d_n)$ es compacto y, razonando como en el teorema precedente, la cuasiuniformidad de Pervin del $\prod_{n \in a_0} (V, d_n)$-cerrado $\overline{\varphi(X)}$ es la completación deseada.

En [4] y [8] se dan ejemplos que prueban la falsedad del recíproco del teorema 1. Damos otro más que nos será útil.

EJEMPLO 1.—Sea d la cuasiseudométrica definida en el conjunto R de los números reales por $d(x, y) = 0$ si $x \leqslant y$, y $d(x, y) = 1$ si $x > y$. La topología asociada

$$\mathcal{T}_d = \{R, \emptyset, [a, +\infty[\ ,\ ]a, +\infty[\ ,\ \forall a \in R\}$$

es T_0, admite a N como subconjunto denso, es normal y no tiene base σ-puntualmente finita, pues cualquier base de $\mathcal{T}_d$ debe contener a $\{[a, +\infty[, \forall a \in R\}$.

El ejemplo precedente tiene la propiedad de que cada punto admite un sistema fundamental de entornos formado por un abierto. El teorema 4 prueba que esta clase de espacios se puede ultracuasiseudometrizar.

DEFINICIÓN 1 [2]—Una ultracuasiseudométrica (o cuasiseudométrica no arquimediana) en un conjunto X, es una aplicación $d : X \times X \longrightarrow R$ que verifica: (i) $d(x, y) \geqslant 0$ $\forall x, y$ de X, (ii) $d(x, x) = 0$ $\forall x \in X$, (iii) $d(x, y) \leqslant \text{máx}\{d(x, z), d(z, y)\}$ $\forall x, y, z$ de X.

TEOREMA 4.—Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio en el que cada punto x tiene un entorno $V(x)$ tal que $\{V(x)\}$ es base de entornos de x. Entonces, $(X, \mathcal{T})$ es ultracuasiseudometrizable.

DEMOSTRACIÓN.—Se tiene que $V(x)$ es abierto, pues $V(x) = \hat{V}(x)$, y que la aplicación d definida en $X \times X$ por $d(x, y) = 0$ si $y \in V(x)$ y $d(x, y) = 1$ si $y \in X - V(x)$, es una ultracuasiseudométrica, pues si $d(x, y) = 1$ y $d(x, z) = 0$ entonces $d(z, y) = 1$ ya que si $z \in V(x)$ se tiene, por hipótesis, que $V(z) \subset V(x)$ y si $y \in X - V(x)$ se deduce que $y \in X - V(z)$. Finalmente, $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$ pues $\{y \in X : d(x, y) < r \leqslant 1\} = V(x)$.

Bibliografía

[1] CSASZAR, A.: (1960). Fondements de la topologie générale. París: Gauthier Villars.
[2] GRUENHAGE, G. (1977). A note on quasi-metrizability. *Canad. J. Math.*, **29**, 360-366.
[3] MROWKA, S. (1968). Further results on E-compact spaces I. *Act. Math.*, **120**, 161-185.
[4] NORMAN, J. L. (1967). A sufficient condition for quasi-metrizability of a topological space. *Portugaliae Math.*, **26**, 207-211.
[5] PERVIN, W. J. (1962). Quasi-uniformization of topological spaces. *Math. Ann.*, **147**, 316-317.
[6] POPA, E. (1970). Completion of quasi-uniform spaces. *Math. Ann.*, **186**, 297-298.
[7] SIEBER, J. L. and PERVIN, W. J. (1965). Completeness in quasi-uniform spaces. *Math. Ann.*, **158**, 79-81.
[8] SION, M. and ZELMER, G. (1967). On quasi-metrizability. *Canad. J. Math.*, **19**, 1243-1249.

Cátedra de Matemáticas (ETSIA)
Universidad Politécnica
Camino de Vera, s/n
Valencia-22 (España)