SOBRE LOS TEOREMAS DE LYAPUNOV Y DE RADON-NIKODYM

Juan Luis Romero Romero

Recibido: 5 noviembre 1980

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO D. ANTONIO DE CASTRO BRZEZICKI

Let μ and ν be two positive measures on the measurable space (X, Σ). A real function, useful for the study of the absolute continuity and singularity of the measures μ and ν, is defined. This function can also be used to obtain the best upper and lower bounds for integrals of the form $\int_A f\, d\mu$. In theorem 3.1, an improved version of the two-dimentional theorem of Lyapunov on the range of a vector measure is given. In § 4, it is proved, using convexity techniques, that the Radon-Nikodym theorem is equivalent to the Lyapunov theorem.

Sean μ y ν dos medidas positivas sobre el espacio medible (X, Σ). Se define una función real la cual es útil para el estudio de la continuidad absoluta y singularidad de las medidas μ y ν. Esta función también puede ser utilizada para obtener las mejores cotas superiores e inferiores de integrales de la forma $\int_A f\, d\mu$. En el teorema 3.1 se da una versión mejorada del teorema de Lyapunov sobre el rango de una medida vectorial (para el caso de los espacios de Banach de dimensión 2). En el § 4 se prueba, usando técnicas de convexidad, que el teorema de Radon-Nikodym es equivalente al teorema de Lyapunov.

1. Introducción y notaciones

Sea (X, Σ) un espacio medible y sean μ y ν dos medidas positivas y finitas sobre (X, Σ). Para cada $\varepsilon > 0$ sea H_ε el conjunto

$$H_\varepsilon = \{ \delta > 0 \, ; (A \in \Sigma, \mu (A) < \delta) \Rightarrow (\nu (A) \leqslant \varepsilon) \}.$$

Consideremos la función $\delta_{\nu\mu}$ definida en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ por

$$\delta_{\nu\mu} (\varepsilon) = \sup H_\varepsilon$$

(donde supondremos que $\sup \phi = 0$). Salvo indicación expresa de lo contrario escribiremos $\delta(\varepsilon)$ en lugar de $\delta_{\nu\mu}(\varepsilon)$.

Sea ahora $Z = \{(\nu(A), \mu(A)), A \in \Sigma\}$ el rango de la medida vectorial (ν, μ). Para x e y números reales y positivos, representaremos por $M_{(x, y)}$ el conjunto $]x, \infty[\times [0, y[$ y por S el conjunto $\{M_{(x, y)} ; Z \cap M_{(x, y)} = \phi\}$. Para cada $\varepsilon > 0$ definimos

$$S_\varepsilon = \{y ; M_{(\varepsilon, y)} \in S\}.$$

En el presente trabajo establecemos las propiedades de las funciones del tipo $\delta_{\nu\mu}(\varepsilon)$. Estudiamos la relación existente entre la función $\delta(\varepsilon)$ y el rango de la medida vectorial (ν, μ). Utilizamos dicha función para el estudio de la continuidad absoluta y singularidad entre las medidas ν y μ y obtenemos cotas, superiores e inferiores, para las integrales de la forma $\int_A f\, d\mu$. Damos una demostración elemental de la versión 2-dimensional del teorema de Lyapunov y probamos la equivalencia entre los teoremas de Lyapunov y de Radon-Nikodym, usando técnicas de convexidad. Como consecuencia se da una solución constructiva al problema del zonoide de dimensión 2.

2. Propiedades de la función $\delta_{\nu\mu}(\varepsilon)$

2.1. Teorema

Sea (X, Σ) es un espacio medible y sean μ y ν dos medidas de probabilidad sobre (X, Σ). Se verifica:

1) $\delta(\varepsilon) = \mathit{inf}\{\mu(B) ; B \in \Sigma, \nu(B) > \varepsilon\}$ $(\varepsilon \in]0, 1[)$.

2) *Para cada* $\varepsilon \in]0, 1[$, $\delta(\varepsilon) = \sup S_\varepsilon$.

3) $\delta(\varepsilon)$ *es una función creciente y continua por la derecha en cada punto de* $]0, 1[$.

4) *Para cada* $s \in]0, 1[$

$$\delta_{\mu\nu}(s) = \sup\{1 - \varepsilon ; \delta_{\nu\mu}(\varepsilon) \geqslant 1 - s\}.$$

5) $\delta(\nu(A) - 0) \leqslant \mu(A)$ *para cada* $A \in \Sigma$ *con* $\nu(A) \geqslant 0$.

6) *Si existe algún* $\varepsilon_0 \in]0, 1]$ *tal que* $\delta(\varepsilon) = 0$ *para* $\varepsilon < \varepsilon_0$, *entonces existe un* $A \in \Sigma$ *tal que* $\mu(A) = 0$ *y* $\nu(A) \geqslant \varepsilon_0$.

7) $\nu \ll \mu$ *si y sólo si para cada* $\varepsilon \in]0, 1[$, $\delta(\varepsilon) > 0$.

8) μ *y* ν *son equivalentes si y sólo si para cada* $\varepsilon \in]\, 0, 1\, [$ *se verifica* $\delta(\varepsilon) > 0$ *y además* $\lim\limits_{\varepsilon \uparrow 1} \delta(\varepsilon) = 1$.

9) μ *y* ν *son mutuamente singulares si y sólo si* $\delta(\varepsilon) = 0$ *para cada* $\varepsilon \in]\, 0, 1\, [$.

10) (*Teorema de descomposición de Lebesgue*). *Existe un único par de medidas* ν_1 *y* ν_2 *tales que* $\nu_1 \ll \mu$, $\nu_1 \perp \nu_2$, $\nu_2 \perp \mu$ *y* $\nu = \nu_1 + \nu_2$. *Si además* ν_1 *y* ν_2 *no son idénticamente nulas se verifica:*

$$\delta_{\nu\mu}(\varepsilon) = 0 \qquad si \quad 0 < \varepsilon < \nu_2(X)$$

$$\delta_{\nu\mu}(\varepsilon) = \delta_{\nu_1\mu}(s) \qquad si \quad \varepsilon = \nu_2(X) + s, \quad s \geqslant 0.$$

2.2. Observaciones

1. Aunque el teorema 2.1 ha sido enunciado, y será demostrado, para dos medidas de probabilidad μ y ν, los resultados que aparecen en ese teorema siguen siendo válidos, con las oportunas modificaciones, para medidas finitas y positivas cualesquiera.

2. El teorema 2.1.2 nos indica que la gráfica de la función $\delta(\varepsilon)$ limita inferiormente al rango de la medida vectorial $\lambda = (\nu, \mu)$. Para el caso en que las medidas μ y ν sean puramente atómicas, la construcción de la función $\delta(\varepsilon)$ es inmediata.

3. Existen numerosos ejemplos en los que la función $\delta(\varepsilon)$ no es continua. En este caso, probaremos que las medidas μ y ν deben tener átomos comunes (Prop. 2.4).

4. El teorema 2.1.4 nos relaciona las funciones $\delta_{\nu\mu}(\varepsilon)$ y $\delta_{\mu\nu}(s)$. Hablando informalmente, puede decirse que la gráfica de la función $\delta_{\mu\nu}$ es la simétrica de la gráfica de la función $\delta_{\mu\nu}$ respecto del punto (1/,2 1/2). En este caso los saltos de la función $\delta_{\nu\mu}$ se corresponden con intervalos en los que $\delta_{\mu\nu}$ es constante y los intervalos en los que $\delta_{\nu\mu}$ es constante se corresponden con saltos de la función $\delta_{\mu\nu}$.

5. La desigualdad que aparece en el teorema 2.1.5 permite acotar inferiormente integrales de la forma $\int_A f\, d\mu$, siendo f una función μ-integrable. Para ello basta considerar la medida $\nu = f \cdot \mu$ y la correspondiente función $\delta_{\mu\nu}$. Se verifica entonces que

$$\delta_{\mu\nu}(\mu(A) - 0) \leqslant \int_A f\, d\mu.$$

En la próxima sección veremos que la función $\delta_{\mu\nu}$ permite también acotar superiormente integrales del tipo anterior.

Dado que la función $\delta_{\nu\mu}(\varepsilon)$ puede ser discontinua, no es válida en general la desigualdad $\delta_{\nu\mu}(\nu(A)) \leqslant \mu(A)$, salvo que la función δ sea continua en el punto $\varepsilon = \nu(A)$.

La cota $\delta(\nu(A) - 0)$ para $\mu(A)$ no puede ser, en general, mejorada en el sentido siguiente: si $h(\varepsilon)$ es una función creciente, definida en $]0, 1[$, tal que $h(\nu(A)) \leqslant \mu(A)$ para cada $A \in \Sigma$ entonces $h(\varepsilon) \leqslant \delta_{\nu\mu}(\varepsilon)$, para cada $\varepsilon \in]0, 1[$. En efecto; si para algún ε se tiene $h(\varepsilon) > \delta(\varepsilon)$ entonces existe un $B \in \Sigma$ tal que $\delta(\varepsilon) \leqslant \mu(B) < h(\varepsilon)$ y tal que $\nu(B) > \varepsilon$. Dado que h es creciente, $h(\varepsilon) \leqslant h(\nu(B))$ y por tanto, $\mu(B) < h(\nu(B))$, lo cual es una contradicción.

6. En virtud del teorema 2.1.10, para estudiar las propiedades de la función $\delta(\varepsilon)$ podremos suponer que $\nu \ll \mu$.

2.3. Demostración del teorema 2.1

1) Sea $g(\varepsilon) = \inf\{\mu(B), B \in \Sigma, \nu(B) > \varepsilon\}$. Si $\mu(B) < \delta(\varepsilon)$ entonces $\nu(B) \leqslant \varepsilon$; por tanto, $\delta(\varepsilon) \leqslant g(\varepsilon)$. Si fuese $\delta(\varepsilon) < g(\varepsilon)$, podríamos encontrar un conjunto $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) < g(\varepsilon)$ y tal que $\nu(A) > \varepsilon$, lo cual contradice la definición de $g(\varepsilon)$.

2) Sea $\delta_0(\varepsilon)$ la función definida en $]0, 1[$ por $\delta_0(\varepsilon) = \sup S_\varepsilon$. Supongamos en primer lugar que $\varepsilon \in]0, 1[$ es tal que $\delta_0(\varepsilon) > 0$. Si $\mu(A) < \delta_0(\varepsilon)$, existe un $y \in S_\varepsilon$ tal que $\mu(A) < y$. En este caso $M_{(\varepsilon, y)} \in S$, $M_{(\varepsilon, y)} \cap Z = \phi$ y por tanto $\nu(A) < \varepsilon$. Esto prueba que $\delta_0(\varepsilon) \leqslant \delta(\varepsilon)$. Si $\eta > 0$

$$M_{(\varepsilon, \delta_0(\varepsilon) + \eta)} \notin S \quad \text{y} \quad Z \cap M_{(\varepsilon, \delta_0(\varepsilon) + \eta)} \neq \phi$$

por lo cual existe un $A \in \Sigma$ tal que $\nu(A) > \varepsilon$ y

$$\delta_0(\varepsilon) \leqslant \mu(A) < \delta_0(\varepsilon) + \eta.$$

Esto demuestra que $\delta_0(\varepsilon) = \delta(\varepsilon)$. Si ahora se tiene que $\delta_0(\varepsilon) = 0$, se sigue directamente de las definiciones que $\delta(\varepsilon) = 0$.

3) Este apartado es consecuencia del apartado 1) y de las definiciones.

4) Para cada $s \in]0, 1[$, sea $g(s) = \sup\{1 - \varepsilon; \delta(\varepsilon) \geqslant 1 - s\}$. Se sigue directamente de la definición de $\delta(\varepsilon)$ que $\mu(B) \leqslant 1 - \delta(\varepsilon)$ siempre que $B \in \Sigma$ y $\nu(B) < 1 - \varepsilon$. Esto prueba que $g(s) \leqslant \delta_{\mu\nu}(s)$.

Se puede probar directamente que para cada ε tal que $g(s) < 1 - \varepsilon$ existe un $C \in \Sigma$ tal que $g(s) \leqslant \nu(C) < 1 - \varepsilon$ y tal que $\mu(C) > s$. De aquí se sigue que $g(s) = \delta_{\mu\nu}(s)$.

5) Para cada $\eta > 0$, se tiene que

$$\delta_{\nu\mu}(\nu(A) - \eta) = \inf\{\mu(B);\ \nu(B) > \nu(A) - \eta\} \leqslant \mu(A).$$

Teniendo en cuenta que δ es una función creciente, se tiene que

$$\delta(\nu(A) - 0) \leqslant \mu(A).$$

6) Para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_0 - \dfrac{1}{n} > 0$, se tiene, por definición de $\delta\left(\varepsilon_0 - \dfrac{1}{n}\right)$ que existe un conjunto $A_n \in \Sigma$ tal que $\mu(A_n) < 2^{-n}$ y tal que $\varepsilon_0 - \dfrac{1}{n} < \nu(A_n)$. Para cada $n \in N$ tal que $\varepsilon_0 - \dfrac{1}{n} > 0$ sea $E_n = \bigcup_n^\infty A_k$ y sea A la intersección de esos E_n. Se verifica que $\mu(A) = 0$ y que $\nu(A) \geqslant \varepsilon_0$.

7) Este es un resultado bien conocido de la teoría general de la medida.

8) Este apartado es consecuencia de los apartados 4) y 7).

9) Si μ y ν son mutuamente singulares existe un conjunto $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ y $\nu(A) = 1$. Si para algún $\varepsilon \in]0, 1[$ se tuviese $\delta(\varepsilon) > 0$, la definición de $\delta(\varepsilon)$ nos conduce a una contradicción.

10) Si $\delta(\varepsilon) > 0$ para cada $\varepsilon \in]0, 1[$, tomamos $\nu_1 = \nu$ y $\nu_2 = 0$. Si $\delta(\varepsilon) = 0$ para cada $\varepsilon \in]0, 1[$, tomamos $\nu_2 = \nu$ y $\nu_1 = 0$. Supongamos ahora que existe un $\varepsilon \in]0, 1[$ tal que $\delta(\varepsilon) = 0$ para $\varepsilon < \varepsilon_0$ y tal que $\delta(\varepsilon) > 0$ para $\varepsilon > \varepsilon_0$. En virtud del apartado 6), existe un conjunto $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ y tal que $\nu(A) \geqslant \varepsilon_0$. Para cada $\varepsilon > \varepsilon_0$ se tiene $\mu(A) = 0 < \delta(\varepsilon)$ y por tanto, $\nu(A) \leqslant \varepsilon_0$. Esto prueba que $\mu(A) = 0$ y $\nu(A) = \varepsilon_0$. Si elegimos $\nu_2 = \nu_A$ y $\nu_1 = \nu_{X \setminus A}$, el resultado de este apartado queda como una mera comprobación.

En el teorema 2.1.3 se establece que la función $\delta(\varepsilon)$ es creciente y continua por la derecha en cada punto del intervalo $]0, 1[$. A continuación, estudiaremos el caso en que la función $\delta(\varepsilon)$ presente alguna discontinuidad y el caso en que $\delta(\varepsilon)$ no sea estrictamente creciente. En virtud del teorema 2.1.10, supondremos que las medidas μ y ν son equivalentes.

2.4. PROPOSICIÓN

Sea (X, Σ) un espacio medible y sean μ y ν dos medidas de probabilidad equivalentes sobre (X, Σ). En cada uno de los dos casos siguientes las medidas μ y ν tienen átomos comunes:

1) $\lim_{r \downarrow 0} \delta(r) = h > 0$. *En este caso se verifica, además, que las medidas μ y ν son puramente atómicas.*

2) *La función $\delta(\varepsilon)$ es discontinua en algún punto $\varepsilon_0 \in \,]0, 1[$.*

DEMOSTRACIÓN.

1) Si las medidas μ y ν no fuesen puramente atómicas, existirían conjuntos de Σ tales que sus medidas sean positivas y arbitrariamente pequeñas para ambas medidas y, en virtud del teorema 2.1.2, se obtendría una contradicción.

2) Sea $h = \lim_{r \downarrow 0} \delta(\varepsilon_0 - r)$ y supongamos que $\delta(\varepsilon_0) > h$. Sea $b = \delta(\varepsilon_0) - h$. Para cada $r > 0$ se tiene:

$$1 - \delta(\varepsilon_0) = \sup\{\mu(B);\, \nu(B) > 1 - \varepsilon_0\} < 1 - h \leqslant$$
$$\leqslant \sup\{\mu(B);\, \nu(B) > 1 - \varepsilon_0 + r\} = 1 - \delta(\varepsilon_0 - r).$$

Tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que si $n \geqslant n_0$, $2^{-(n+1)} < b$. Para cada $n \geqslant n_0$ sea $r_n = 2^{-(n+2)}$. Existen conjuntos $B_n \in \Sigma$ tales que

$$1 - \delta(\varepsilon_0 - r_n) - r_n < \mu(B_n) \leqslant 1 - \delta(\varepsilon_0 - r_n)$$

y tales que $1 - \varepsilon_0 \leqslant \nu(B_n) < 1 - \varepsilon_0 + r_n$. Si para cada $n \geqslant n_0$ existe un conjunto $B'_n \subset B_n$ tal que

$$\nu(B'_n) \in \,]1 - \varepsilon_0 - r_n, 1 - \varepsilon_0[$$

entonces se sigue fácilmente que

$$\mu(B_n \setminus B'_n) > b - r_n \quad \text{y} \quad \nu(B_n \setminus B'_n) < 2\, r_n.$$

Si, para $n \geqslant n_0$, definimos

$$A_n = \bigcup_n^\infty (B_k \setminus B'_k) \quad \text{y} \quad A = \bigcap_{n_0}^\infty A_k$$

se tiene que $\nu(A) = 0$ y $\mu(A) > b$, lo cual es imposible. Por consiguiente, existe al menos un $n \geqslant n_0$ tal que B_n posee ν átomos y no posee un subconjunto B'_n tal que

$$\nu(B'_n) \in]1 - \varepsilon_0 - r_n, 1 - \varepsilon_0[.$$

Esto significa que B_n posee un ν-átomo cuya ν-medida es mayor que r_n. Es fácil ahora concluir que cada uno de esos ν-átomos es un μ-átomo.

2.5. Observación

En virtud de la proposición 2.4 y del teorema 2.1.4, si la función $\delta(\varepsilon)$ es constante en algún subintervalo abierto de $]0, 1[$ las medidas μ y ν también tienen átomos comunes. Si μ y ν no tienen átomos comunes la función $\delta(\varepsilon)$ es continua y estrictamente creciente en $]0, 1[$. Existen casos en que la función $\delta(\varepsilon)$ es continua a pesar de que las medidas μ y ν poseen átomos comunes.

3. El teorema de Lyapunov

Un famoso teorema de Lyapunov (cf. [4]) permite afirmar que el rango de una medida vectorial no atómica con valores en un espacio de Banach de dimensión finita es cerrado y convexo. Se han realizado, desde diversos puntos de vista, numerosas demostraciones y generalizaciones de dicho teorema (cf. [1], [2], etc.). En este trabajo necesitaremos una formulación más precisa de ese teorema para el caso particular de la medida vectorial $\lambda = (\nu, \mu)$. Daremos una demostración sencilla del teorema de Lyapunov que nos permitirá dar una demostración constructiva del teorema de Radon-Nikodym. Asimismo, demostraremos el teorema de Lyapunov (para este caso particular) a partir del teorema de Radon-Nikodym. Por este motivo, y para pares de medidas, los dos teoremas arriba mencionados son consecuencia uno del otro.

3.1. Teorema

Sea (X, Σ) un espacio medible y sean μ y ν dos medidas de probabilidad no atómicas tales que $\nu \ll \mu$. Se verifica:

1) *La función* $\delta(\varepsilon)$ *es convexa.*

2) *Para cada* $\varepsilon \in\,]0, 1[$ *existe un conjunto* $A(\varepsilon) \in \Sigma$ *tal que* $\nu(A(\varepsilon)) = \varepsilon$ *y* $\mu(A(\varepsilon)) = \delta(\varepsilon)$.

DEMOSTRACIÓN.—Para cada par de conjuntos A y B de Σ escribiremos $A \sim B$ si $\mu(A \Delta B) = 0$ ($A \Delta B$ es la diferencia simétrica de los conjuntos A y B). La relación $\sim$ es de equivalencia en Σ. Sea $\dot{\Sigma}$ el conjunto cociente de Σ respecto de la relación $\sim$. Si para cada $\dot{A} \in \Sigma$ definimos $\dot{\mu}(\dot{A}) = \mu(A)$ y $\dot{\nu}(\dot{A}) = \nu(A)$ resulta que $\dot{\mu}$ y $\dot{\nu}$ son funciones bien definidas en $\dot{\Sigma}$. Escribiremos $\dot{A} \leqslant \dot{B}$ para indicar que $\mu(A \setminus B) = 0$ (en cuyo caso $\nu(A \setminus B) = 0$). El conjunto $\dot{\Sigma}$ está parcialmente ordenado por la relación $\leqslant$. Con esta ordenación, $\dot{\Sigma}$ es un retículo σ-completo en el que se definen las siguientes operaciones «booleanas»:

$$\dot{A} \vee \dot{B} = \widehat{A \cup B}^{\,\cdot}, \quad \dot{A} \wedge \dot{B} = \widehat{A \cap B}^{\,\cdot}, \quad \dot{A} \setminus \dot{B} = \widehat{A \setminus B}^{\,\cdot} \quad \text{y} \quad \dot{A} \Delta \dot{B} = \widehat{A \Delta B}^{\,\cdot}.$$

Los pares $(\dot{\Sigma}, \dot{\mu})$ y $(\dot{\Sigma}, \dot{\nu})$ son anillos de medida respecto de esas operaciones.

Si se considera la clase aditiva $\dot{\Sigma}$, la cual está libre de átomos, y la medida vectorial $\lambda = (\nu, \mu)$, puede usarse la técnica seguida por Bolker (cf. [1], págs. 294 y 295) para probar que el rango de λ es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^2$. En virtud de este resultado y del teorema 2.1.2, resulta que $\delta(\varepsilon)$ es una función convexa.

Para cada $k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ consideremos el conjunto $\dot{\Sigma}_k$ formado por el elemento 0 de $\dot{\Sigma}$ y por los $\dot{A} \in \dot{\Sigma}$, $\dot{A} \neq 0$ tales que si $\dot{B} \leqslant \dot{A}$ y $\dot{B} \neq 0$ existe un $\dot{M} \neq 0$, $\dot{M} \leqslant \dot{B}$ tal que $\dot{\nu}(\dot{M}) \leqslant k\,\dot{\mu}(\dot{M})$. Ordenemos el conjunto $\dot{\Sigma}_k$ por medio de la relación $\leqslant$. Cada cadena Γ en $\dot{\Sigma}_k$ admite un subconjunto cofinal numerable $\{\dot{A}_n\}$. En este caso, $\bigvee_1^\infty \dot{A}_n$ es un mayorante de Γ que pertenece a $\dot{\Sigma}_k$. El lema de Zorn nos permite afirmar que existe un elemento maximal $\dot{B}_k$ en $\dot{\Sigma}_k$. La unicidad de este elemento maximal es clara. Comprobemos que $\dot{\nu}(\dot{B}_k) \leqslant k\,\dot{\mu}(\dot{B}_k)$. En efecto: Sea Λ_k la familia de los elementos $\dot{M} \in \dot{\Sigma}_k$ tales que $\dot{\nu}(\dot{M}) \leqslant k\,\dot{\mu}(\dot{M})$. Ordenemos Λ_k por medio de $\leqslant$.

Es claro que cada cadena en Λ_k posee un mayorante que sigue estando en Λ_k. Sea $\dot{C}_k$ un elemento maximal en Λ_k. Si fuese $\dot{B}_k \neq \dot{C}_k$ podríamos encontrar en $\dot{B}_k \setminus \dot{C}_k$ un «subconjunto» $\dot{M}_k$ tal que $\dot{M}_k \neq 0$ y tal que $\bar{\nu}(\dot{M}_k) \leqslant k\,\bar{\mu}(\dot{M}_k)$. El hecho de ser $\dot{M}_k \vee \dot{C}_k > C_k$ nos conduce a una contradicción. Por consiguiente, $\dot{C}_k = \dot{B}_k \in \Lambda_k$. Es inmediato comprobar que si $k < k'$ entonces $\dot{B}_k \leqslant \dot{B}_{k'}$.

Probemos ahora que los puntos $(\bar{\mu}(\dot{B}_k), \bar{\nu}(\dot{B}_k))$ pertenecen a la gráfica de la función $\delta_{\mu\nu}(\varepsilon)$ (si $\bar{\mu}(\dot{B}_k) \neq 0$). En efecto: supongamos que $\dot{B} \in \dot{\Sigma}$ es tal que $(\bar{\mu}(\dot{B}), \bar{\nu}(\dot{B})) = t\,(\bar{\mu}(\dot{B}_k), \bar{\nu}(\dot{B}_k))$ para algún $t \geqslant 0$. En este caso $\bar{\mu}(\dot{B})\,\bar{\nu}(\dot{B}_k) = \bar{\nu}(\dot{B})\,\bar{\mu}(\dot{B}_k)$. Por otro lado $\bar{\nu}(\dot{B}_k) \leqslant k\,\bar{\mu}(\dot{B}_k)$. De aquí se deduce que $\bar{\nu}(\dot{B}) \leqslant k\,\bar{\mu}(\dot{B})$, $\dot{B} \leqslant \dot{B}_k$ y $t \leqslant 1$. La convexidad de la función $\delta_{\mu\nu}(\varepsilon)$ prueba que los puntos $(\bar{\mu}(\dot{B}_k), \bar{\nu}(\dot{B}_k))$ con $\bar{\mu}(\dot{B}_k) \neq 0$ están en la gráfica de la función $\delta_{\mu\nu}$. No obstante, la familia $\{\dot{B}_k ;\ k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$ no tiene por qué ser estrictamente creciente y pueden existir puntos de esa gráfica que no estén representados por medio de algún $\dot{B}_k$. Estudiamos a continuación este problema.

Si el conjunto de puntos $\{\bar{\mu}(\dot{B}_k),\ k \in \mathbb{R}^+\}$ es denso en $[0, 1]$, la continuidad de la función $\delta_{\mu\nu}$ prueba 2). Supongamos ahora que ese no es el caso, entonces existe al menos un $k_0 \geqslant 0$ y unos ε_1 y ε_2 en $[0, 1[$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, tales que si $k < k_0$ se tiene $\bar{\mu}(\dot{B}_k) < \varepsilon_1$ (supondremos que, si $k < 0$, $\dot{B}_k = 0$) y si $k \geqslant k_0$ se tiene $\bar{\mu}(\dot{B}_k) \geqslant \varepsilon_2$. En este caso $\bar{\mu}(\dot{B}_{k_0}) - \bar{\mu}(\dot{B}_k) \geqslant \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, para cada $k < k_0$. Sea ahora $\dot{B}'_{k_0} = \bigvee_{k < k_0} \dot{B}_k$. Es fácil comprobar que

$$\nu(\dot{B}_{k_0} \setminus \dot{B}'_{k_0}) = k_0\,\mu(\dot{B}_{k_0} \setminus \dot{B}'_{k_0})$$

y que para todo $\dot{B} \in \dot{\Sigma}$ tal que $\dot{B} \leqslant \dot{B}_{k_0} \setminus \dot{B}'_{k_0}$ se tiene $\bar{\nu}(\dot{B}) = k_0\,\bar{\mu}(\dot{B})$. Por consiguiente, en el conjunto $\dot{B}_{k_0} \setminus \dot{B}'_{k_0}$ las medidas μ y ν son proporcionales. Dado que μ y ν son no atómicas, para cada $\varepsilon \in]\varepsilon_1, \varepsilon_2[$ podemos encontrar un conjunto $C_\varepsilon \in \Sigma$ tal que si $\varepsilon < \varepsilon'$ $C_\varepsilon \subset C_{\varepsilon'}$ y tal que los puntos $(\bar{\mu}, \bar{\nu})(\dot{B}'_k \vee \dot{C}_\varepsilon)$ describan el segmento que une los puntos $(\bar{\mu}, \bar{\nu})(\dot{B}'_{k_0})$ y $(\bar{\mu}, \bar{\nu})(\dot{B}_{k_0})$. En el intervalo $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ la función $\delta_{\mu\nu}$ es lineal y con pendiente k_0. Si $\varepsilon \in]\varepsilon_1, \varepsilon_2[$ el conjunto C_ε anteriormente considerado no es único. En este caso el punto $(\varepsilon, \delta_{\mu\nu}(\varepsilon))$ no es extremal para rang (λ). Sin embargo, los puntos $(\mu, \nu)(B_k)$, para $k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, sí son extremales para ese conjunto y se corresponden con un único elemento de $\dot{\Sigma}$. El resto de la demostración se sigue de forma inmediata.

3.2. Observación

En la demostración del teorema 3.1 el hecho de ser $\nu \ll \mu$ ha jugado solamente un papel secundario. En virtud del teorema 2.1.10, los resultados del teorema 3.1 siguen siendo válidos para μ y ν probabilidades no atómicas cualesquiera. En dicha demostración no hemos utilizado el teorema de Radon-Nikodym.

3.3. Corolario

Sea (X, Σ) un espacio medible. Sean μ y ν dos medidas de probabilidad no atómicas sobre (X, Σ). Sea Z el rango de la medida vectorial (μ, ν). Se verifica:

$$Z = \{(x, y) ; 0 \leqslant x \leqslant 1, \delta_{\mu\nu}(x) \leqslant y \leqslant 1 - \delta_{\mu\nu}(1 - x)\},$$

donde

$$\delta_{\mu\nu}(0) = 0 \quad y \quad \delta_{\mu\nu}(1) = \lim_{x \uparrow 1} \delta_{\mu\nu}(x).$$

Demostración. — Basta observar que los conjuntos $A(\varepsilon)$, $\varepsilon \in]0, 1[$ que aparecen en el teorema 3.1 son tales que los puntos $(\mu, \nu)(A(\varepsilon))$ describen la gráfica de la función $\delta_{\mu\nu}$ y los puntos $(\mu, \nu)(X \setminus A(\varepsilon))$ describen la gráfica de la función $1 - \delta_{\mu\nu}$. El teorema 2.1.4 demuestra el corolario.

4. Los teoremas de Lyapunov y de Radon-Nikodym

Sea μ una medida de probabilidad no atómica sobre el espacio medible (X, Σ). Sea $f \geqslant 0$ una función μ-integrable. Sea $\nu = f \cdot \mu$. Supongamos en primer lugar que para cada $t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ se tiene $\mu(\{x \in X ; f(x) = t\}) = 0$. Para cada $t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ sea

$$A(t) = \{x \in X ; f(x) \leqslant t\}.$$

La familia de conjuntos $\{A(t) ; t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$ constituye una colección creciente de conjuntos μ-medibles en X. En general esta familia no es estrictamente creciente. Es fácil ver que para cada $\varepsilon \in]0, 1[$ existe un $t > 0$ tal que $\varepsilon = \mu(A(t))$. Para cada $\varepsilon \in]0, 1[$ sea

$$t(\varepsilon) = \sup\{t \geqslant 0 ; \mu(A(t)) = \varepsilon\}$$

y sea

$$t'(\varepsilon) = \inf\{t \geqslant 0, \mu(A(t)) = \varepsilon\}.$$

Se verifica que

$$\mu(A(t(\varepsilon))) = \mu(A(t'(\varepsilon))) = \varepsilon.$$

Se puede comprobar fácilmente que si $B \in \Sigma$ y $\mu(B) > \mu(A(t(\varepsilon)))$ entonces $\nu(B) > \nu(A(t(\varepsilon)))$. Dado que μ es no atómica, si

$$\mu(X \setminus A(t(\varepsilon))) \neq 0$$

podemos construir una sucesión $\{C_n\}$ decreciente de subconjuntos de $X \setminus A(t(\varepsilon))$ tal que $\mu(C_n) > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y tal que $\mu(C_n) \downarrow 0$. Es claro que

$$(\mu, \nu)(A(t(\varepsilon)) \cup C_n) \longrightarrow (\mu, \nu)(A(t(\varepsilon)))$$

y por tanto los puntos $(\mu, \nu)(A(t))$ describen la gráfica de la función $\delta_{\mu\nu}$.

Probemos ahora que la función $\delta_{\mu\nu}$ tiene derivadas laterales en cada punto de $]0, 1[$ y después probaremos que estas derivadas son crecientes. De aquí deduciremos que la función $\delta_{\mu\nu}$ es convexa (cf. [5]).

Sea $\eta > 0$. Se verifica:

$$\frac{\delta_{\mu\nu}(\varepsilon + \eta) - \delta_{\mu\nu}(\varepsilon)}{\eta} = \frac{\nu(A(t'(\varepsilon + \eta))) - \nu(A(t(\varepsilon)))}{\mu(A(t'(\varepsilon + \eta))) - \mu(A(t(\varepsilon)))} \tag{1}$$

Por otro lado

$$t(\varepsilon)\,\mu\,(A\,(t'\,(\varepsilon+\eta))\setminus A\,(t\,(\varepsilon)))\leqslant\nu\,(A\,(t'\,(\varepsilon+\eta))\setminus A\,(t\,(\varepsilon)))\leqslant$$
$$\leqslant t'\,(\varepsilon+\eta)\,\mu\,(A\,(t'\,(\varepsilon+\eta))\setminus A\,(t\,(\varepsilon))). \tag{2}$$

Por consiguiente, en virtud de (1) y (2),

$$t(\varepsilon)\leqslant[\delta_{\mu\nu}(\varepsilon+\eta)-\delta_{\mu\nu}(\varepsilon)]\,/\,\eta\leqslant t'\,(\varepsilon+\eta).$$

Se puede probar directamente que

$$\lim_{\eta\downarrow 0} t'\,(\varepsilon+\eta)=t\,(\varepsilon).$$

Por tanto, $\delta'_{\mu\nu}(\varepsilon+0)=t(\varepsilon)$. De forma análoga se puede probar que existe $\delta'_{\mu\nu}(\varepsilon-0)$ y que $\delta'_{\mu\nu}(\varepsilon-0)=t'(\varepsilon)$.

Es claro que se verifica:

$$f(x)=\inf\{t\geqslant 0\,;\,x\in A(t)\}\quad \text{si}\quad x\in\bigcup_{t\geq 0}A(t)$$

$$f(x)=+\infty\qquad \text{si}\quad x\in X\setminus\bigcup_{t\geq 0}A(t)$$

Para cada $x\in X$ sea

$$\varepsilon_x=\inf\{\varepsilon>0\,;\,x\in A\,(t\,(\varepsilon))\}=\inf B_\varepsilon,$$

donde

$$B_\varepsilon=\{\varepsilon>0\,;\,x\in A\,(t\,(\varepsilon))\}.$$

Si definimos $f_0(x)=\delta'_{\mu\nu}(\varepsilon_x+0)$ si $B_\varepsilon\neq\phi$ y $f_0(x)=+\infty$ si $B_\varepsilon=\phi$, resulta que las funciones $f(x)$ y $f_0(x)$ son iguales salvo en un conjunto de μ-medida cero.

Estudiemos ahora el caso en que para algún $t_0\geqslant 0$ se verifique

$$\mu\,(\{x\in X\,;\,f(x)=t_0\})>0.$$

Si t_0 es uno de esos puntos se tiene que

$$\varepsilon'_0=\lim_{\eta\downarrow 0}\mu\,(A\,(t_0-\eta))<\mu\,(A\,(t_0))$$

y, por otro lado,

$$\lim_{\eta \downarrow 0} \nu (A (t_0 - \eta)) < \nu (A (t_0)).$$

En el conjunto $\{x \in X ; f (x) = t_0\}$ las medidas μ y ν son proporcionales y, dado que μ no posee átomos, en el intervalo $[\varepsilon'_0, \mu (A (t_0))]$ la función $\delta_{\mu\nu}$ es lineal y con pendiente t_0.

En cualquiera de los dos casos tratados anteriormente la función $\delta_{\mu\nu}$ admite derivadas laterales en cada punto de $]\,0, 1\,[$ y estas derivadas constituyen funciones crecientes. Por consiguiente, la función $\delta_{\mu\nu}$ es convexa y su gráfica limita inferiormente al rango de la medida vectorial (μ, ν). Si denotamos por $\varkappa (\varepsilon)$ la función cuya gráfica limita superiormente al rango de (μ, ν), resulta que los puntos $(\mu, \nu) (X \setminus A (t))$ describen la gráfica de $\varkappa$. Es fácil ahora completar el teorema de Lyapunov, probando que el rango de (μ, ν) es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^2$.

Sea $P = (x, y)$ un punto que está comprendido entre las gráficas de las funciones $\delta_{\mu\nu}$ y $\varkappa$, es decir un punto tal que $\delta_{\mu\nu} (x) \leqslant y \leqslant \varkappa (x)$. Consideremos la semirecta que pasa por $(0, 0)$ y por P. Esta semirecta corta a alguna de las gráficas definidas por $\delta_{\mu\nu}$ o por $\varkappa$. Supongamos que, por ejemplo, esa semirecta corta a la gráfica de $\delta_{\mu\nu}$ en un punto Q. En la gráfica de esta última función existen dos puntos R y S de forma que el polígono definido por P, R, S, Q sea un paralelogramo. Se tiene:

$$R = (\mu, \nu) (A (t_1)), \quad S = (\mu, \nu) (A (t_2)), \quad Q = (\mu, \nu) (A (t_3))$$

para algunos números reales t_1, t_2 y t_3 tales que $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3$. Se verifica además que

$$P = (\mu, \nu) (A (t_3) \setminus [A (t_2) \setminus A (t_1)]).$$

Con esto se prueba que el rango de (μ, ν) es convexo (ya que el razonamiento que se seguiría en caso de que la referida semirecta corte a la gráfica de $\varkappa$ es totalmente análogo al anterior). Hemos probado, por consiguiente, que el teorema de Lyapunov para medidas vectoriales con valores en un espacio de Banach de dimensión 2 es una consecuencia directa del teorema de Radon-Nikodym.

Probaremos a continuación un resultado recíproco: El teorema de Radon-Nikodym es consecuencia del teorema 3.1 (teorema de Lyapunov).

4.1. TEOREMA (*Teorema de Radon-Nikodym*).

Sea (X, Σ) *un espacio medible y sean* μ *y* ν *dos medidas positivas, acotadas y no atómicas tales que* $\nu \ll \mu$. *Existe una función* f, μ*-integrable, definida en* X, *tal que* $\nu = f \cdot \mu$.

DEMOSTRACIÓN.—Continuaremos con las notaciones del teorema 3.1 y supondremos que μ y ν son medidas de probabilidad. Para cada $x \in X$, escribiremos

$$\varepsilon_x = \inf \{ \varepsilon \in]0, 1[, x \in A(\varepsilon) \}$$

y definamos $f(x) = \delta'_{\mu\nu}(\varepsilon_x + 0)$. Para cada $t \geqslant 0$ sea

$$B(t) = \{ x \in X ; f(x) \leqslant t \}.$$

Para cada $\varepsilon \in [0, 1[$ sea

$$t(\varepsilon) = \delta'_{\mu\nu}(\varepsilon + 0) = \delta'_{\mu\nu}(\mu(A(\varepsilon)) + 0).$$

Es fácil probar que para cada $\varepsilon \in]0, 1[$ se verifica la igualdad $A(\varepsilon) = B(t(\varepsilon))$, lo cual prueba que la función f, definida anteriormente, es μ-medible.

Probemos ahora que para cada conjunto $C \in \Sigma$ contenido en algún $A(t)$ se tiene $\nu(C) = (f \cdot \mu)(C)$. En efecto: para cada $\eta > 0$, consideremos una partición $\{t_0, t_1, ..., t_n\}$ del intervalo $[0, t]$ con norma menor que η. Consideremos también los correspondientes conjuntos $B(t_i)$, $0 \leqslant i \leqslant n$, y escribamos

$$\varepsilon_i = \mu(B(t_i)) = \mu(A(\varepsilon_i)).$$

Para $1 \leqslant i \leqslant n$, definamos

$$C_i = C \cap [A(\varepsilon_i) \setminus A(\varepsilon_{i-1})].$$

Vamos a probar que

$$t(\varepsilon_{i-1}) \mu(C_i) \leqslant \nu(C_i) \leqslant t(\varepsilon_i) \mu(C_i). \tag{3}$$

Si $\mu(C_i) = 0$ para algún i, se tiene que $\nu(C_i) = 0$ y, por tanto, se sigue (3). Supongamos ahora que $\mu(C_i) \neq 0$. Se verifica:

$$\nu(C_i) = \nu(A(\varepsilon_i)) - \nu(A(\varepsilon_i) \setminus C_i) = \nu(A(\varepsilon_i)) - \nu(A(\varepsilon_i - \alpha)),$$

para algún $\alpha \geqslant 0$. Si $\alpha = 0$, $\nu(C_i) = 0$ y la segunda igualdad en (3) es trivial. Supongamos pues que $\alpha > 0$. La convexidad del rango de (μ, ν) permite probar que

$$\mu(A(\varepsilon_i) \setminus C_i) \leqslant \varepsilon_i - \alpha = \mu(A(\varepsilon_i - \alpha)).$$

Por consiguiente,

$$\mu(C_i) \geqslant \mu(A(\varepsilon_i)) - \mu(A(\varepsilon_i - \alpha))$$

y

$$\frac{\nu(C_i)}{\mu(C_i)} \leqslant \frac{\nu(A(\varepsilon_i)) - \nu(A(\varepsilon_i - \alpha))}{\mu(A(\varepsilon_i)) - \mu(A(\varepsilon_i - \alpha))} \leqslant t(\varepsilon_i).$$

Esto prueba la segunda desigualdad en (3). Teniendo en cuenta que

$$\mu(A(\varepsilon_{i-1}) \cup C_i) = \mu(A(\varepsilon_{i-1} + \mu(C_i))) = \varepsilon_{i-1} + \mu(C_i),$$

se sigue, de forma análoga a la anterior, que

$$\frac{\nu(C_i)}{\mu(C_i)} \geqslant \frac{\nu(A(\varepsilon_{i-1} + \mu(C_i))) - \nu(A(\varepsilon_{i-1}))}{\mu(A(\varepsilon_{i-1} + \mu(C_i))) - \mu(A(\varepsilon_{i-1}))} \geqslant t(\varepsilon_{i-1})$$

lo cual prueba la primera desigualdad en (3).

Por otro lado es inmediato comprobar que

$$t(\varepsilon_{i-1})\,\mu(C_i) \leqslant (f \cdot \mu)(C_i) \leqslant t(\varepsilon_i)\,\mu(C_i). \tag{4}$$

De (3) y (4) se sigue:

$$|\nu(C_i) - (f \cdot \mu)(C_i)| < \eta\,\mu(C_i),$$

para $1 \leqslant i \leqslant n$. Por tanto,

$$|\nu(C) - (f \cdot \mu)(C)| < \eta\,\mu(C),$$

para cada $\eta > 0$. Esto prueba que $\nu(C) = (f \cdot \mu)(C)$, si $C \in \Sigma$ está contenido en algún $A(t)$, con $t \geqslant 0$.

Si ahora $C \in \Sigma$ es un conjunto arbitrario, sea $\{t_n\}$ una sucesión arbitraria de números reales que diverge a $+\infty$. Se tiene:

$$\nu(C) = \lim_{n \to \infty} \nu(C \cap B(t_n)) = \lim_{n \to \infty} (f \cdot \mu)(C \cap B(t_n)) = (f \cdot \mu)(C),$$

con lo cual el teorema queda demostrado.

La demostración del teorema de Radon-Nikodym que hemos dado utiliza fundamentalmente técnicas de convexidad. Usando este tipo de técnicas, vamos a probar, constructivamente, que todo conjunto compacto, convexo, centralmente simétrico y que contenga al origen de coordenadas en $\mathbb{R}^2$ es un zonoide, es decir es el rango de una medida vectorial no atómica. Este resultado ha sido probado por diversos autores utilizando otro tipo de técnicas.

4.2. PROPOSICIÓN

Todo subconjunto K_0 de $\mathbb{R}^2$ que contenga al origen de coordenadas y sea compacto, convexo y centralmente simétrico es un zonoide.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $x_0 = \inf \{x; (x, y) \in K_0$ para algún $y\}$. Sea

$$y_0 = \inf \{y; (x_0, y) \in K_0\}.$$

Sea $\xi = (x_0, y_0) \in K_0$. El conjunto K_0 es un zonoide si y sólo si el conjunto $K = K_0 - \xi$ es un zonoide. Probaremos que K es un zonoide. Sea $a = \sup \{x; (x, y) \in K$ para algún $y\}$. Para $x \in [0, a]$, sea $\delta(x) = \inf \{y; (x, y) \in K\}$. La función δ así definida es convexa. Esta función junto con el centro de simetría de K determinan completamente a K. Sea μ la medida de Lebesgue en el intervalo $[0, a[$. Sea $\nu_0 = f \cdot \mu$ donde f es la función definida en $[0, a[$ por $f(x) = \delta'(x + 0)$. Dado que δ es una función convexa, f es una función creciente y por tanto, es de variación acotada. Para cada $x \in [0, a[$, se tiene que $\mu([0, x]) = x$ y $\nu_0([0, x]) = \delta(x)$.

Sea ahora $b = \sup \{y; (0, y) \in K\}$ y sea ν_1 la medida de Lebesgue restringida al intervalo $[a, a + b]$. Si definimos $\nu = \nu_0 + \nu_1$, se tiene que la medida vectorial (μ, ν) definida (por extensión trivial) en todos los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$ tiene un rango que es precisamente K.

Referencias

[1] Bolker, E. D. (1966). Functions resembling quotients of measures. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **124** (2), 292-312.

[2] Halmos, P. R. (1948). The range of a vector Measure. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54**, 416-421.

[3] Halmos, P. R. (1950). Measure Theory. Van Nostrand. Princeton, N. J.

[4] Lyapunov, A. (1940). Sur les fonctions vecteurs completements additives. *Bull. Acad. Sci. URSS, Ser. Math.*, **4**, 465-478.

[5] Roberts, A. W. y Varberg, D. E. (1973). Convex Functions. Academic Press. New York.

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla