METODO SECUENCIAL DE OPTIMACION DE DECISIONES CON CRITERIOS MULTIPLES

Sixto Ríos-Insúa
Universidad Complutense de Madrid

Recibido: 5 noviembre 1980

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. SIXTO RÍOS GARCÍA

In this paper a generalization of the Wold-Debreu's theorem on a vectorial fashion is given, obtaining a vector-valued function. This new function is a generalization of the Debreu's scalar-valued function, and represents a partial ordering in $\mathscr{R}^N$, or more general in a topological space. Such a vector-valued function is used in the construction of a sequential optimization process.

Finally, the optimization problem of the process is considered, obtaining a convergent process for the sets of efficient points.

0. Introducción

El método de optimación que consideramos se puede suponer encuadrado dentro de la teoría de la decisión con multiatributos, y para su construcción y desarrollo han sido dos las motivaciones principales.

La primera, simplificar la construcción efectiva de la función de utilidad (contexto aleatorio) mediante la simplificación de la construcción previa de la función de valor (contexto determinista), y la segunda resolver un problema propuesto por Aumann (1964), en relación con la existencia de puntos maximales en un recinto que pueden no corresponder a máximos de una función de utilidad definida en él. La idea directriz de esta metodología parte de una generalización de la función de valor escalar de Debreu, sustituyéndola por una función de valor vectorial que corresponde a un orden parcial en $\mathscr{R}^N$ o más general en un espacio topológico.

1. Notación

Hay una cierta pluralidad de notación o nomenclatura utilizada en los libros o memorias dedicados a la teoría de la decisión con multiatributos, y nosotros hemos fijado para el presente trabajo la siguiente:

Tenemos un conjunto $\mathcal{A}$ de *alternativas*, o *decisiones*, $a \in \mathcal{A}$, como consecuencia de una de las cuales se obtiene un *resultado*. Un resultado es, pues, un ente u objeto seguro que se recibe como consecuencia de una decisión y que es susceptible de *identificación* mediante N *atributos* o cualidades características, que suponemos susceptibles de medidas o *evaluadores*:

$$(z_1(a), z_2(a), \ldots z_N(a)) = \mathbf{z}(a)$$

Consideramos *objetivos* o *criterios* como ciertas características (algunas coincidirán con los atributos, otras dependerán de todos o algunos de ellos) que el decisor está interesado en optimizar.

Supondremos que estos criterios son n y que se designan por

$$(x_1(\mathbf{z}(a)), x_2(\mathbf{z}(a)), \ldots, x_n(\mathbf{z}(a))) = \mathbf{x}(\mathbf{z}(a))$$

Así $\mathbf{x}(\mathbf{z})$ es una aplicación $\mathcal{R}^N \longrightarrow \mathcal{R}^n$, mientras $\mathbf{z}(a)$ es una aplicación $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{R}^N$. Es frecuente que haya una jerarquía de atributos en dependencia unos de otros.

En esta nomenclatura los atributos son características, cuyas medidas se pueden obtener directamente, mientras los criterios son introducidos a partir de aquéllos como escalas que representan unas ciertas preferencias fijadas por el decisor, y se adaptan a las operaciones que se definen de modo natural en el espacio de atributos. Se consideran de un modo especial en este trabajo objetivos de 1.ª etapa, de 2.ª etapa, etc.

2. Formalización del método

Para formalizar el método de optimación se da un teorema, que introduce una función de valor vectorial que viene a representar una generalización de la función de valor escalar de Wold-Debreu (Koopmans, 1972; Ríos, 1976), y cuyas componentes serán los objetivos de primera etapa, $\mathfrak{f}$ estará definida sobre el espacio de atributos. Tal función de valor vectorial, nos hace pasar del espacio N-dimensional de los atributos al n-dimensional de los objetivos de primera etapa (1).

Se tiene así el siguiente:

TEOREMA 2.1.—Sea $\mathcal{B} \equiv \mathcal{R}_N^+$ un conjunto de elementos $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_N)$ (que corresponden a los N atributos), y supongamos que el individuo tiene un comportamiento preferencial regulado por el conjunto de axiomas siguientes:

1. Las preferencias están reguladas por n preórdenes completos $\gtrsim_i$

$$(z_1, \ldots, z_N) \gtrsim_i (z'_1, \ldots, z'_N); \quad (i = 1, \ldots, n)$$

(cada uno de ellos asociado a un objetivo).

2. El orden parcial natural definido por

$$(z_1, \ldots, z_N) \geq^{\cdot} (z'_1, \ldots, z'_N) \quad \text{cuando} \quad z_j \geq z'_j, \quad \forall j$$
$$(z_1, \ldots, z_N) >^{\cdot} (z'_1, \ldots, z'_N) \quad \text{cuando} \quad z_j \geq z'_j, \quad \forall j$$

y $z_t > z'_t$ para algún t, es compatible con los preórdenes $\gtrsim_i$ ($i = 1, \ldots, n$,), es decir

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{z} \geq^{\cdot} \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{z} \gtrsim_i \mathbf{z}' \\ \mathbf{z} >^{\cdot} \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{z} \succ_i \mathbf{z}' \end{array}\right\} \quad i = 1, \ldots, n$$

3. Si $\mathbf{z} \sim_i \mathbf{z}' \sim_i \mathbf{z}''$ ($i = 1, \ldots, n$), existe $\lambda_i \in [0, 1]$ tal que

$$\mathbf{z}' \sim_i \lambda_i \mathbf{z} + (1 - \lambda_i) \mathbf{z}''$$

En estas condiciones existe una función de valor vectorial, continua, isótona y fiel

$$\mathbf{x}(\mathbf{z}) : \mathcal{R}_N^+ \longrightarrow \mathcal{R}_n^+$$

donde

$$\mathbf{x}(\mathbf{z}) = (x_1(\mathbf{z}), \ldots, x_n(\mathbf{z}))$$

(1) Respecto a la relación entre N y n, consideramos natural, el que sea n más pequeño que N, puesto que los criterios tratan de resumir los atributos y lograr una reducción de dimensión, para hacer más sencilla la resolución del problema en cuestión.

es decir, tal que

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{z} \succ_i \mathbf{z}' \Longleftrightarrow x_i(\mathbf{z}) > x_i(\mathbf{z}') \\ \mathbf{z} \sim_i \mathbf{z} \Longleftrightarrow x_i(\mathbf{z}) = x_i(\mathbf{z}') \end{array}\right\} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Además, tal función es única salvo una transformación monótona. Es decir, si existe otra función vectorial $\mathbf{y}(\mathbf{z})$ que tiene las mismas propiedades citadas que $\mathbf{x}(\mathbf{z})$, se verifica que

$$y_i(\mathbf{z}) = g_i(x_i(\mathbf{z})) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

siendo g_i $(i = 1, \ldots, n)$ funciones estrictamente monótonas, y continuas.

DEMOSTRACIÓN.—Se tiene en $\mathcal{R}_N^+$ definidos n preórdenes completos $\gtrsim_i$, cada uno de ellos respecto de uno de los n objetivos de primera etapa.

Vamos a probar que para cada $i = 1, \ldots, n$ existe una función

$$x_i(\mathbf{z}) : \mathcal{R}_N^+ \to \mathcal{R}^+$$

continua, isótona y fiel, siendo además única salvo una transformación estrictamente monótona, y continua. Una vez demostrado esto, tedremos probada la existencia de la función vectorial $\mathbf{x}(\mathbf{z})$ con las propiedades indicadas.

En efecto, sea un elemento $\mathbf{z}^0 >^{\boldsymbol{\cdot}} \mathbf{0}$, y sea el subconjunto

$$Z = \{\mathbf{z} \in \mathcal{R}_N^+ / \exists\, \lambda \geq 0, \quad \mathbf{z} = \lambda\, \mathbf{z}^0\} \subset \mathcal{R}_N^+$$

Este subconjunto Z, está completamente ordenado como consecuencia del axioma 2, pues dados $\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2 \in Z$, existen $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant \mathbf{0}$ tales que

$$\begin{array}{l} \mathbf{z}^1 = \lambda_1\, \mathbf{z}^0 \\ \mathbf{z}^2 = \lambda_2\, \mathbf{z}^0 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{llll} \text{o bien} & \lambda_1 > \lambda_2 & \text{luego} & \lambda_1\, \mathbf{z}^0 >^{\boldsymbol{\cdot}} \lambda_2\, \mathbf{z}^0 \Longrightarrow \mathbf{z}^1 \succ_i \mathbf{z}^2, \\ \text{o bien} & \lambda_1 < \lambda_2 & \text{luego} & \lambda_1\, \mathbf{z}^0 \,{\boldsymbol{\cdot}}\!< \lambda_2\, \mathbf{z}^0 \Longrightarrow \mathbf{z}^1 \prec_i \mathbf{z}^2, \quad \text{y} \\ \text{o bien} & \lambda_1 = \lambda_2 & \text{luego} & \lambda_1\, \mathbf{z}^0 = \lambda_2\, \mathbf{z}^0 \Longrightarrow \mathbf{z}^1 \sim_i \mathbf{z}^2. \end{array}$$

Definamos ahora la función

$$\nu_i : Z \to \mathscr{R}^+$$

en la forma siguiente:

$$\nu_i(\mathbf{z}) = \lambda, \quad \text{si es} \quad \mathbf{z} = \lambda\,\mathbf{z}^0$$

Esta función $\nu_i(\mathbf{z})$, así definida, es isótona y fiel, siendo además $\nu_i(0) = 0$ y $\nu_i(\mathbf{z}^0) = 1$.

Veamos que es isótona. Para ello, sean $\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2 \in Z$, tales que $\mathbf{z}^1 \succ_i \mathbf{z}^2$, será entonces

$$\mathbf{z}^1 = \lambda_1\,\mathbf{z}^0 \succ_i \lambda_2\,\mathbf{z}^0 = \mathbf{z}^2$$

luego $\lambda_1 > \lambda_2$ y puesto que $\nu_i(\mathbf{z}^1) = \lambda_1$ y $\nu_i(\mathbf{z}^2) = \lambda_2$, será $\nu_i(\mathbf{z}^1) > \nu_i(\mathbf{z}^2)$.

Supongamos ahora $\mathbf{z}^1 \sim_i \mathbf{z}^2$, tendremos que

$$\mathbf{z}^1 = \lambda_1\,\mathbf{z}^0 \sim_i \lambda_2\,\mathbf{z}^0 = \mathbf{z}^2$$

luego $\lambda_1 = \lambda_2$, que implica que $\nu_i(\mathbf{z}^1) = \nu_i(\mathbf{z}^2)$.

Por tanto, $\nu_i(\mathbf{z})$ es isótona y además fiel por ser el preorden $\gtrsim_i$ completo.

Vamos a extender ahora la función $\nu_i(\mathbf{z})$ a todo $\mathscr{R}_N^+$.

Dado $\mathbf{z} \in \mathscr{R}_N^+$, se pueden encontrar dos números λ_1, λ_2 tales que

$$\lambda_2\,\mathbf{z}^0 \geq \cdot\ \mathbf{z} \geq \cdot\ \lambda_1\,\mathbf{z}^0 \geq \cdot\ 0.$$

Por el axioma 2, será

$$\lambda_2\,\mathbf{z}^0 \gtrsim_i \mathbf{z} \gtrsim_i \lambda_1\,\mathbf{z}^0,$$

y en virtud del axioma 3, existirá un $\mu \in [0, 1]$ tal que

$$\mathbf{z} \sim_i \mu\,\lambda_2\,\mathbf{z}^0 + (1-\mu)\,\lambda_1\,\mathbf{z}^0 = (\mu\,\lambda_2 + (1-\mu)\,\lambda_1)\,\mathbf{z}^0 = \mathbf{z}' \in Z$$

ya que

$$1 \geq \mu\,\lambda_2 + (1-\mu)\,\lambda_1 \geq 0.$$

Por tanto, dado $\mathbf{z} \in \mathscr{R}_N^+$, existe un $\mathbf{z}' \in Z$ tal que $\mathbf{z} \sim \mathbf{z}'$.

Definimos entonces la función

$$x_i(\mathbf{z}) : \mathscr{R}_N^+ \to \mathscr{R}^+$$

por el convenio

$$x_i(\mathbf{z}) = \lambda \quad \text{si} \quad \mathbf{z} \sim_i \lambda\, \mathbf{z}^0$$

Esta función $x_i(\mathbf{z})$ así definida, es isótona por serlo la función $v_i(\mathbf{z})$ y fiel ya que el preorden $\gtrsim_i$ es completo. Además $x_i(\mathbf{z})$ es continua en cada punto $\mathbf{z} \in \mathscr{R}_N^+$, es decir, dado un $\varepsilon > 0$ se puede determinar un $\delta > 0$ tal que si $d(\mathbf{z}, \mathbf{z}') < \delta$, entonces

$$| x_i(\mathbf{z}) - x_i(\mathbf{z}') | < \varepsilon .$$

En efecto, sea $x_i(\mathbf{z}') = \lambda$, es decir $\mathbf{z}' \sim_i \lambda\, \mathbf{z}^0$ y sean

$$\lambda_1 = \lambda + \varepsilon, \quad \lambda_2 = \lambda - \varepsilon$$

tales que

$$\lambda + \varepsilon = x_i(\lambda_1 \mathbf{z}^0) > x_i(\lambda\, \mathbf{z}^0) = \lambda > x_i(\lambda_2 \mathbf{z}^0) = \lambda - \varepsilon$$

Como consecuencia del axioma 3, resulta fácilmente que los conjuntos

$$C_1 = \{\mathbf{z} : \lambda_1 \mathbf{z}^0 \succ_i \mathbf{z}\}$$
$$C_2 = \{\mathbf{z} : \mathbf{z} \succ_i \lambda_2 \mathbf{z}^0\}$$

son abiertos.

En efecto, sea $\zeta \in C_1$, luego $\zeta \,{}_i\!\prec \lambda_1 \mathbf{z}^0$. Sea $\zeta' >^{\cdot} \lambda_1 \mathbf{z}^0$, $\zeta' >^{\cdot} \zeta$

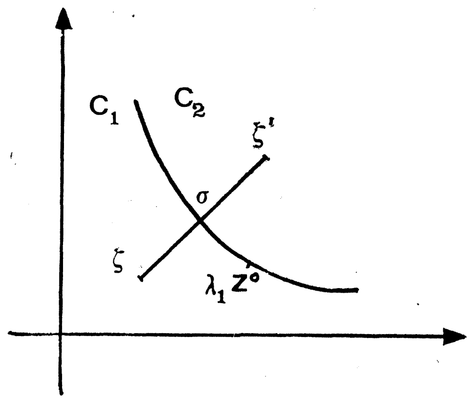

Fig. 1.

y $\zeta' \succ_i \lambda_1 \mathbf{z}^0$, luego por el axioma 3, existe β tal que

$$\lambda_1 \mathbf{z}^0 \sim_i \beta \zeta + (1 - \beta) \zeta' = \sigma, \quad \sigma >\cdot \zeta.$$

Si tomamos

$$\varepsilon < \frac{1}{2} \min_i | \zeta'_i - \sigma_i |$$

se verifica que el entorno $E_\varepsilon(\zeta)$ está contenido en C_1, luego C_1 es abierto. También es abierto $I = C_1 \cap C_2$. Como $\mathbf{z}' \in I$, existirá un entorno $E_\delta(\mathbf{z}')$ contenido en I, y para todo $\mathbf{z} \in E_\delta(\mathbf{z}')$ será

$$\lambda_2 \mathbf{z}^0 = (\lambda - \varepsilon) \mathbf{z}^0 \,{}_i\!\prec \mathbf{z} \,{}_i\!\prec (\lambda + \varepsilon) \mathbf{z}^0 = \lambda_1 \mathbf{z}^0,$$

y como $x_i(\mathbf{z})$ es isótona

$$\lambda - \varepsilon < x_i(\mathbf{z}) < \lambda + \varepsilon$$

o bien

$$- \varepsilon < x_i(\mathbf{z}) - \lambda < \varepsilon.$$

Como

$$\lambda = x_i(\mathbf{z}'),$$
$$| x_i(\mathbf{z}) - x_i(\mathbf{z}') | < \varepsilon.$$

Probemos ahora que la función de valor $x_i(\mathbf{z})$, es única salvo una transformación estrictamente monótona, y continua, es decir, que para toda otra $y_i(\mathbf{z})$ continua y monótona de $\mathbf{z}$, es $y_i(x_i)$ continua y monótona de x_i.

En efecto, supongamos que existe otra función vectorial $\mathbf{y}(\mathbf{z})$ con las mismas propiedades que $\mathbf{x}(\mathbf{z})$, y vamos a ver la relación entre $y_i(\mathbf{z})$ y $x_i(\mathbf{z})$. Si llamamos $[\mathbf{z}]$ a la clase de todos los elementos equivalentes a $\mathbf{z}$, tenemos que a cada $[\mathbf{z}]$ corresponden dos números $x_i(\mathbf{z})$, $y_i(\mathbf{z})$. Podemos establecer una correspondencia 1-1 entre x_i e y_i, y vamos a ver que es estrictamente monótona en ambos sentidos. En efecto,

$$x_i(\mathbf{z}^1) > x_i(\mathbf{z}^2) \Leftrightarrow \mathbf{z}^1 \succ_i \mathbf{z}^2 \Leftrightarrow y_i(\mathbf{z}^1) > y_i(\mathbf{z}^2),$$

Al ser $y_i(x_i)$ función estrictamente monótona y análogamente

$x_i(y_i)$, resulta que al intervalo comprendido entre dos valores fijados de una de las variables corresponde el intervalo entre los valores homólogos de la otra; luego los valores de y_i quedan dentro del entorno $(y_i(x_i^0) - \varepsilon, \; y_i(x_i^0) + \varepsilon)$ sin más que tomar x_i en el intervalo $(x_i^0 - \delta, \; x_i^0 + \delta)$, y recíprocamente, luego $y_i(x_i)$ y $x_i(y_i)$ son ambas continuas.

Puesto que se ha probado que cada función $x_i(\mathbf{z})$ $(i = 1, \ldots, n)$ es isótona, fiel y continua, y única salvo una transformación estrictamente monótona y continua, se tendrá que la función vectorial $\mathbf{x}(\mathbf{z})$ cumplirá las propiedades exigidas y el teorema queda probado.

El caso más sencillo, relativo a este teorema, es aquel en que $n = 1$, es decir, el caso en que el espacio $\mathcal{C}$ de objetivos de primera etapa está formado por un único objetivo.

A este caso, se refiere el teorema de Wold-Debreu, sobre el modelo de «utilidad para complejos de bienes en certidumbre», iniciado en los problemas clásicos de la economía del consumidor y del que el teorema dado es una generalización.

Es importante indicar que el objetivo del método es facilitar al máximo la determinación de la decisión óptima. Entonces resulta interesante la situación en que hay la posibilidad de establecer un sistema de preferencias entre los n objetivos de primera etapa, lo que permite llegar mediante una nueva función de valor vectorial a un espacio de dimensión k de objetivos de segunda etapa, siendo este espacio de menor dimensión que el anterior. A continuación considerar sobre el espacio de k objetivos de segunda etapa, una nueva función de valor vectorial para pasar a otro espacio de dimensión l, menor que k, a continuación hacer una nueva reducción, etc. Intuitivamente la idea desarrollada, es ir haciendo una reducción de los distintos espacios de objetivos en consideración, usando como puente entre ellos una función de valor vectorial, para pasar después al problema de optimación, teniendo en cuenta, sin embargo, que el problema de óptimo que permite resolver este método, estará mejor definido cuanto más próximo esté a la unidad la dimensión del último espacio de objetivos considerado. En cada una de las etapas de este proceso, el conjunto de puntos que son maximales se va reduciendo y el proceso es convergente. En la práctica esta reducción sucesiva se hará de acuerdo con el decisor de modo que éste pida la continuación del proceso, si no está satisfecho con la reducción del conjunto maximal a que se ha llegado. Esta es la idea directriz del método que hemos llamado «Método secuencial de optimación de decisiones».

3. El problema de optimación

En este apartado vamos a centrarnos sobre el problema de construcción de la función de valor, cuya evaluación correcta es requisito previo en cualquier metodología más o menos sofisticada.

Dentro del aspecto del problema de optimación, a saber la construcción de la función de valor, vamos a desarrollar primero un método y a continuación, indicar dos generalizaciones de éste.

Veamos los aspectos teóricos de este primer método para una etapa, para después hacer la extensión a un número finito de ellas, con el correspondiente proceso secuencial de optimación.

Consideremos la función de valor vectorial

$$\mathbf{x}(\mathbf{z}) : \mathscr{R}_N^+ \to \mathscr{R}_n^+$$

donde

$$\mathbf{x}(\mathbf{z}) = (x_1(\mathbf{z}), \ldots, x_n(\mathbf{z}))$$

siendo $x_i(\mathbf{z})$ el valor del i-ésimo objetivo en el punto $\mathbf{z} \in Z$.

Sea $X = \{\mathbf{x} \in \mathscr{R}_N^+ / \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{z})$ para algún $\mathbf{z} \in Z\}$, es decir, $X = \mathbf{x}(Z)$.

Supondremos en lo que sigue, que para todos los atributos y objetivos el decisor prefiere valores mayores de x_i y z_i a menores.

DEFINICIÓN 3.1.—Se dice que $\mathbf{x}^* \in X$, *es un punto maximal* en X para el orden parcial $\gtrsim$ en $\mathscr{R}^n$, si no existe un $\mathbf{x} \in X$ tal que $\mathbf{x} \gtrsim \mathbf{x}^*$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$.

Si el orden parcial $\gtrsim$ en $\mathscr{R}^n$ es el orden parcial natural, la definición anterior se ve inmediatamente que es equivalente a que

$$X \cap X(\mathbf{x}^*) = \}\mathbf{x}^*\{$$

donde $X(\mathbf{x}^*)$ es el cono positivo de $\mathscr{R}^n$ trasladado al punto $\mathbf{x}^*$. Al conjunto de puntos maximales respecto del orden parcial natural $\gtrsim$ en $\mathscr{R}^n$, lo indicaremos por M (X).

Análogamente se definiría punto maximal en Z respecto de un orden parcial en $\mathscr{R}^N$. Si tal orden parcial es el natural en $\mathscr{R}^N$, que representaremos por $\gtrsim'$, el conjunto de puntos maximales en Z respecto de éste lo indicaremos por M (Z).

Vamos a dar a continuación la definición de punto eficiente (2). Para ello supongamos la función vectorial

$$\mathbf{x}(\mathbf{z}) : \mathcal{R}^N \to \mathcal{R}^n$$

donde $\mathbf{x}(\mathbf{z}) = (x_1(\mathbf{z}), \ldots, x_n(\mathbf{z}))$ y siendo $x_i(\mathbf{z})$ para todo $i = 1, \ldots, n$, funciones unívocas, continuas y monótonas. Sea $Z \subset \mathcal{R}^N$ y $X = \mathbf{x}(Z)$ con $X \subset \mathcal{R}^n$. Las familias $x_i = x_i(\mathbf{z})$ forman unas familias de superficies isoútiles $x_i(\mathbf{z}) = k$, definiendo cada una de ellas un preorden completo en Z, y conjuntamente un preorden parcial $\gtrsim^*$ en la forma siguiente:

DEFINICIÓN 3.2.—Dados $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in Z$, diremos que $\mathbf{z} \gtrsim^* \mathbf{z}'$ si y sólo si $x_i(\mathbf{z}) \geqslant x_i(\mathbf{z}')$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Entonces se tiene:

DEFINICIÓN 3.3.—Se dice que $\mathbf{z}^* \in Z$ *es un punto eficiente* en Z o maximal en Z respecto del preorden parcial $\gtrsim^*$, si no existe un $\mathbf{z}' \in Z$ tal que $\mathbf{z}' \succ^* \mathbf{z}$, o de forma equivalente si no existe un $\mathbf{z}' \in Z$, tal que $x_i(\mathbf{z}') \geqslant x_i(\mathbf{z}^*)$ para todo $i = 1, \ldots, n$ siendo $x_j(\mathbf{z}') > x_j(\mathbf{z}^*)$ para algún j.

Tal conjunto de puntos eficientes, lo indicaremos por $M^*(Z)$.

Parece intuitivo que si es $X = \mathbf{x}(Z)$, interesará considerar en $X \subset \mathcal{R}^n$, el conjunto de puntos maximales $M(X)$, y obtener los puntos de Z que se transforman en los de $M(X)$. Vamos a ver que tales puntos forman un subconjunto de $M(Z)$, y que éste es precisamente $M^*(Z)$.

Para ello, damos el siguiente teorema:

TEOREMA 3.1.—Sea $\mathbf{x}(\mathbf{z}) : \mathcal{R}^N \longrightarrow \mathcal{R}^n$ una transformación unívoca, continua y estrictamente monótona, es decir

$$x_i(\mathbf{z} + \Delta\mathbf{z}) \geq x_i(\mathbf{z}), \quad \text{para todo} \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{y} \quad \exists j$$

tal que

$$x_j(\mathbf{z} + \Delta\mathbf{z}) > x_j(\mathbf{z})$$

siendo

$$\Delta z_h \geq 0 \quad \text{para todo} \quad h = 1, \ldots, N \quad \text{y} \quad \exists t$$

tal que $z_t > 0$.

(2) También llamado optimal de Pareto, no dominado, etc.

Sea $\mathbf{z}^* \in Z \subset \mathscr{R}^N$ un punto tal que $\mathbf{x}(\mathbf{z}^*) = \mathbf{x}^*$ es maximal en $X = \mathbf{x}(Z) \subset \mathscr{R}^n$ para el orden parcial natural $\gtrsim$ en $\mathscr{R}^n$. Entonces se verifica que $\mathbf{z}^* \in Z$ es maximal en Z para el orden parcial natural $\gtrsim'$ en $\mathscr{R}^N$.

DEMOSTRACIÓN.—Puesto que $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{z}^*)$ es maximal en X para el orden parcial natural en $\mathscr{R}^n$, se verificará que

$$X \cap X(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{x}^*\}$$

Vamos a probar que también $Z \cap Z(\mathbf{z}^*) = \{\mathbf{z}^*\}$. Para ello supongamos que

$$Z \cap Z(\mathbf{z}^*) \neq \{\mathbf{z}^*\}$$

En consecuencia existe $\mathbf{z}^1 \neq \mathbf{z}^*$, tal que $\mathbf{z}^1 \in Z \cap Z(\mathbf{z}^*)$. Entonces será $\mathbf{z}^1 \gtrsim' \mathbf{z}$, y como $\mathbf{x}(\mathbf{z})$ es estrictamente monótona,

$$\mathbf{x}(\mathbf{z}^1) \gtrsim \mathbf{x}(\mathbf{z}), \quad \text{y} \quad \mathbf{x}(\mathbf{z}^1) \neq \mathbf{x}(\mathbf{z}^*).$$

Por tanto $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{z})$ no sería maximal, luego

$$Z \cap Z(\mathbf{z}^*) = \{\mathbf{z}^*\}.$$

Se tiene entonces por el teorema 3.1, que

$$M(Z) \supset \mathbf{x}^{-1}(M(X)) \cap Z$$

de la definición 3.3

$$M^*(Z) = \mathbf{x}^{-1}(M(X)) \cap Z.$$

De ambas relaciones se deduce que deberá ser

$$M^*(Z) \subset M(Z).$$

Resulta así que, una vez determinado el conjunto M (X), que se determina por métodos conocidos (Kuhn y Tucker, 1951; Karlin, 1959; Zeleny, 1974; Cohon, 1978 y Ching-Lai Hwang, 1979), se pasaría al conjunto

$$M^*(Z) = x^{-1}(M(X)) \cap Z$$

de decisiones o alternativas eficientes y bastaría investigar M* (Z) en lugar de M (Z), para llegar a una decisión óptima.

Conviene resaltar, que en las situaciones de decisión real, la necesidad de llegar a la elección de una alternativa final de decisión, llevaría a una reducción adicional del conjunto M* (Z), de alternativas eficientes, que sean igualmente preferidas respecto a las actitudes del decisor y más preferidas que el resto. Esto es precisamente lo que se consigue mediante el proceso polietápico que consideramos, es decir, ir reduciendo el conjunto M* (Z) mediante la consideración de nuevas etapas.

Vamos ahora a hacer la extensión del proceso de optimación para dos o más etapas.

Para ello, sean $j_1 > j_2 > \ldots > j_i > \ldots > j_h$ las dimensiones de los distintos espacios que se consideran en el proceso.

Representemos por $\gtrsim_{j_i}$, la relación de preorden parcial en $\mathcal{B}_i$, donde $\mathcal{B}_i$ representa el espacio de objetivos que corresponde a la reducción a la dimensión j_i, para los objetivos de la etapa $i - 1$, siendo $\mathcal{B}_i \equiv \mathcal{R}^+_{j_i}$, para todo $i = 1, \ldots, h$.

Esquemáticamente se tendría una serie de transformaciones en la forma

$$\mathcal{R}^+_{j_1} \xrightarrow{\mathbf{x}_1} \mathcal{R}^+_{j_2} \xrightarrow{\mathbf{x}_2} \ldots \xrightarrow{\mathbf{x}_{h-2}} \mathcal{R}^+_{j_{h-1}} \xrightarrow{\mathbf{x}_{h-1}} \mathcal{R}^+_{j_h}$$

donde $\mathbf{x}_i$ $(i = 1, \ldots, h - 1)$ son las funciones de valor vectoriales, dadas por los correspondientes teoremas, siendo $\mathcal{B}_1$ el espacio de atributos, $\mathcal{B}_2$ espacio de objetivos de primera etapa, $\mathcal{B}_3$ espacio de objetivos de segunda etapa, etc.

Es natural considerar que si el decisor ha llegado a la relación $\gtrsim_j$, y tiene elementos de información suficientes para obtener la función de valor vectorial que da la etapa siguiente, deberá ser

$$(\gtrsim_{j_i}) \subset (\gtrsim_{j_{i+1}}),$$

que se ha de entender en el sentido de que la primera relación está definida en el espacio $\mathcal{B}_i$, y la segunda en el $\mathcal{B}_{i+1}$, y será posible comparar nuevos vectores mediante la relación $\gtrsim_{j_{i+1}}$, aunque para todo par comparable por $\gtrsim_{j_i}$, debe verificarse que sus transformados mediante $\mathbf{x}_i$ deben ser comparables por $\gtrsim_{j_{i+1}}$.

Veamos ahora la definición de punto eficiente de $\mathcal{B}_i$.

DEFINICIÓN 3.4.—Se dice que el punto $\mathbf{z}^* \in \mathcal{B}_i$ es *eficiente* en $\mathcal{B}_i$, o bien maximal en $\mathcal{B}_i$ respecto de la relación de preorden parcial $\gtrsim_j$, si no existe otro $\mathbf{z}' \in \mathcal{B}_i$, tal que $\mathbf{z}' \succ_{j_i} \mathbf{z}^*$.

Tal conjunto de puntos eficientes lo designaremos por $M^*_{j_i}$.

En el caso particular en que $\gtrsim_{j_i}$ fuera el orden parcial natural en $\mathcal{R}^{j_i}$, el conjunto de puntos maximales respecto de éste, lo indicaremos M_{j_i}, y se verificará que

$$M_{j_i} \supset M^*_{j_i}$$

y

$$M^*_{j_i} = \mathbf{x}_i^{-1}(M_{j_{i+1}}) \cap \mathcal{B}_i$$

sin más que tener en cuenta el teorema 3.1 y la definición 3.3.

La extensión del proceso de optimación es sencilla. En efecto, aplicando en forma reiterada los resultados anteriores, se tendrá que en la etapa $h-1$,

$$M^*_{j_{h-1}} = \mathbf{x}_{h-1}^{-1}(M_{j_h}) \cap \mathcal{B}_{h-1} \subset M_{j_{h-1}}$$

Análogamente en la etapa $h-2$, el conjunto $M^*_{j_{h-2}}$ de puntos eficientes de $\mathcal{B}_{h-2}$, es tal que

$$M^*_{j_{h-2}} = \mathbf{x}_{h-2}^{-1}(M_{j_{h-1}}) \cap \mathcal{P}_{h-2} \subset M_{j_{h-2}}.$$

Sin embargo este conjunto podría ser reducido, mediante la consideración natural de tomar, no la transformación inversa mediante $\mathbf{x}_{h-2}^{-1}$ de $M_{j_{h-1}}$, sino la de $M^*_{j_{h-1}}$, habiendo obtenido este último conjunto en la anterior etapa. Esto nos llevaría a considerar un nuevo conjunto reducido aún más del $M_{j_{h-2}}$, que sería

$$M'_{j_{h-2}} = \mathbf{x}_{h-2}^{-1}(M^*_{j_{h-1}}) \cap \mathcal{B}_{h-2}$$

verificándose que

$$M'_{j_{h-2}} \subset M^*_{j_{h-2}} \subset M_{j_{h-2}}$$

y teniendo en cuenta que mediante la consideración de esta segunda etapa, ha obtenido el decisor una nueva reducción del conjunto de puntos maximales de su interés.

Reiterando el proceso, se llegaría al subconjunto de puntos de $\mathscr{B}_1$

$$\begin{aligned} M'_{j_1} &= \mathbf{x}_1^{-1}(M'_{j_2}) \cap \mathscr{P}_1 = \mathbf{x}_1^{-1}(\mathbf{x}_2^{-1}(M'_{j_3}) \cap \mathscr{B}_2) \cap \mathscr{B}_1 = \ldots = \\ &= \mathbf{x}_1^{-1}(\mathbf{x}_2^{-1}(\ldots(\mathbf{x}_{h-2}^{-1}(M^*_{j_{h-1}}) \cap \mathscr{B}_{h-2})\ldots) \cap \mathscr{B}_2) \cap \mathscr{B}_1 = \\ &= \mathbf{x}_1^{-1}(\mathbf{x}_2^{-1}(\ldots(\mathbf{x}_{h-2}^{-1}(\mathbf{x}_{h-1}^{-1}(M_{j_h})\ \mathscr{B}_{h-1}) \cap \mathscr{B}_{h-2})\ldots) \cap \mathscr{B}_2) \cap \mathscr{B}_1 \end{aligned}$$

Se observa que en este proceso polietápico, se parte del conjunto M_{j_h} de puntos maximales de $\mathscr{B}_h$, respecto del orden parcial natural en $\mathscr{R}^{j_h}$, y se va produciendo una reducción, llegando finalmente al conjunto M'_{j_1}, donde

$$M'_{j_1} \subset \ldots \subset \mathbf{x}_1^{-1}(M_{j_2}) \cap \mathscr{B}_1 \subset M^*_{j_1} \subset M_{j_1}$$

y este conjunto M'_j, sensiblemente reducido del M_{j_1} es en el que el decisor debería investigar para determinar su curso de acción óptimo.

Una generalización de este método (3) consiste, en considerar órdenes parciales más fuertes en el espacio X, y sus correspondientes órdenes parciales en Z, y como situación extrema el paso al límite del anterior.

Bibliografía

AUMANN, R. J. (1964). Subjective Programming. En Human Judgments and Optimality. M. W. Shelly y G. L. Bryan, eds. Wiley, New York.

COHON, J. L. (1978). Multiobjective Programming and Planning. Academic Press, New York.

CHING LAI HWANG et al. (1979). Multiple Objective Decision Making. Springer Verlag, Berlin.

DEBREU, G. (1954). Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function. En Decision Processes. R. M. Thrall, C. H. Coombs y R. L. Davis, eds. Wiley, New York.

FISHBURN, P. C. (1970). Utility Theory for Decision Making. Wiley, New York.

(3) Ver Ríos-Insúa, S. (1980).

GORMAN, W. N. (1959). Separable Utility and Aggregation. *Econometrica*, vol. 27.

KARLIN, S. (1959). Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics, vol. I. Pergamon Press, London.

KEENEY, R. L. y RAIFFA, H. (1976). Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade offs. Wiley, New York.

KOOPMANS, T. (1972). Representation of Preference Ordering over Time. En Decision and Organization. C. B. McGuire y R. Radner, eds. North-Holland.

KUHN, H. W. y TUCKER, A. W. (1951). Nonlinear Programming. En Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. J. Neyman, ed. Berkeley, California.

RÍOS, S. (1976). Análisis de Decisiones. ICE, Madrid.

RÍOS-INSÚA, S. (1980). Decisiones Multicriterio con Ordenaciones Parciales. Tesis Doctoral, Madrid.

STROTZ (1959). The Utility Tree. *Econometrica*, vol. 27.

ZELENY, M. (1974). Linear Multiobjective Programming. Springer Verlag, Berlin.