SOBRE c-DUALIDAD Y ESPACIOS c-PERFECTOS

Miguel Florencio Lora (*)

Recibido: 15 octubre 1980

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

Given a sequence space λ the c-dual $\lambda^c = \{ u = (u_n) : \Sigma\, u_n\, x_n$ is convergent in the sense of Cesàro for every $x = (x_n)$ of $\lambda \}$ is introduced. The convergence of the n-sections of a vector of λ is studied for the weak $[\sigma(\lambda, \lambda^c)]$ topology and the c-topology, which is an analogous of the normal topology of Köthe. A necesary and sufficient condition for a sequence space to be c-perfect is given.

1. Introducción

Si p es alguna medida de convergencia de series, podemos definir el p-dual de cualquier espacio de sucesiones λ mediante:

$$\lambda^p = \left\{ u = (u_n) : \sum_n u_n\, x_n \ \text{ es } \ p - \text{convergente}, \ \ \forall\, x = (x_n) \in \lambda \right\}.$$

En este sentido, han sido estudiados el α-dual (cuando p es la convergencia absoluta), el β-dual (cuando p es la convergencia ordinaria) o el ρ-dual (cuando p es la convergencia en el sentido de Abel).

El objeto de este trabajo es estudiar el caso en que p es la convergencia en el sentido de Cesàro, con lo que obtenemos el c-dual de un espacio de sucesiones:

$$\lambda^c = \left\{ u = (u_n) : \sum_n u_n\, x_n \ \text{ es Cesàro-convergente}, \ \ \forall\, x = (x_n) \in \lambda \right\}.$$

(*) Este trabajo ha sido realizado en el Departamento de Matemáticas de la E. S. I. I. de Sevilla que dirige el Prof. Dr. P. Pérez Carreras.

De las implicaciones: convergencia absoluta $\Longrightarrow$ convergencia ordinaria $\Longrightarrow$ convergencia Cesàro $\Longrightarrow$ convergencia Abel; se sigue que $\lambda^{\alpha} \subseteq \lambda^{\beta} \subseteq \lambda^{c} \subseteq \lambda^{\rho}$. También es conocido (ver [1]) que si λ es normal entonces $\lambda^{\alpha} = \lambda^{\rho}$ y por tanto $\lambda^{\alpha} = \lambda^{\beta} = \lambda^{c} = \lambda^{\rho}$.

2. Propiedades elementales

En este apartado estudiaremos algunas propiedades de la c-dualidad cuyas demostraciones omitimos por poderse realizar de forma análoga a las realizadas en [6] respecto a la α-dualidad.

Proposición 1.—Sean λ y μ dos espacios de sucesiones, entonces se verifican: (a) Si $\lambda \subset \mu$, se tiene que $\mu^{c} \subset \lambda^{c}$ y que (b) $\lambda^{cc} = (\lambda^{c})^{c} \supset \lambda$.

Definición 1.—Se dice que un espacio de sucesiones λ es c-perfecto si verifica que $\lambda^{cc} = \lambda$.

Proposición 2.—(a) El c-dual de cualquier espacio de sucesiones es c-perfecto. (b) λ^{cc} es el menor espacio c-perfecto que contiene a λ. (c) Si λ es c-perfecto, entonces λ contiene al espacio φ de las sucesiones con solo un número finito de coordenadas no nulas.

En [6] se demuestra que todo espacio α-perfecto es necesariamente normal; el siguiente ejemplo muestra que existen espacios c-perfectos que no son normales, separando de esta forma el concepto de α-dualidad y el de c-dualidad.

Ejemplo 1.—Sea el vector $e = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ y consideremos el espacio unidimensional engendrado por e; es fácil comprobar que el c-dual de dicho espacio es el espacio CS de todas las sucesiones sumables en el sentido de Cesàro. En consecuencia, CS es un espacio c-perfecto (pues se trata de un c-dual) que no es normal, pues la sucesión $(1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1, \ldots)$ pertenece a CS y sin embargo la sucesión $(1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$ no pertenece a CS.

En [3] se prueba que el dual de CS es el espacio L de las sucesiones (u_n) que son convergentes y tales que la serie $\Sigma\, n \cdot \Delta^2 u_n$ es absolutamente convergente (donde $\Delta^2 u_n$ indican las diferencias de segundo orden de u_n) y que si a L se le dota de la norma

$$\| (u_n) \| = | \lim_n u_n | + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot | \Delta^2 u_n |$$

obtenemos el dual fuerte de CS.

Diremos que un espacio de sucesiones λ es L-invariante si para cada (x_n) en λ y cada (ε_n) en L se tiene que $(\varepsilon_n \cdot x_n)$ pertenece a λ.

PROPOSICIÓN 3.—(a) El c-dual de cualquier espacio de sucesiones es L-invariante. (b) Todo espacio c-perfecto es L-invariante.

3. Convergencia seccional en la topología débil

Recordemos que una sucesión (x_n) se dice sumable en el sentido de Cesàro si la sucesión

$$\sigma_n(x) = \frac{S_1(x) + S_2(x) + \ldots + S_n(x)}{n} \quad \text{con} \quad S_k(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$$

es convergente; en tal caso al límite de dicha sucesión se denotará mediante $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(c)$ y se dirá que es la c-suma de (x_n).

Para cada espacio de sucesiones, debido a la definición de su c-dual, tiene sentido considerar la forma bilineal:

$$(x, u) \in \lambda \times \lambda^c \longmapsto \langle u, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n(c) \in \mathbb{K}.$$

es fácil probar que si λ contiene a φ entonces dicha forma bilineal es separada, por lo que determina al par dual (λ, λ^c).

Dado un espacio de sucesiones $\lambda \supset \varphi$, para cada vector $x = (x_n) \in \lambda$, consideremos los vectores $X_n \in \varphi \subset \lambda$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ definidos mediante $X_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ y a los que denominaremos secciones de x.

Tomando el caso particular en que λ es el espacio CS podemos comprobar que las secciones de un vector no son necesariamente convergente hacia él en la topología débil $\sigma(\lambda, \lambda^c)$, pues tomando $x = (x_n) \in$ CS con $x_n = (-1)^{n+1}$ y $u = (u_n) \in$ L con $u_n = 1$ para cada n, tenemos que:

$$|\langle x - X_n, u \rangle| = \left| \sum_{n+1}^{\infty} x_k(c) \right| = \left| \sum_{1}^{\infty} x_k(c) - \sum_{1}^{n} x_k \right| =$$

$$= \begin{cases} \left| \dfrac{1}{2} - 0 \right|, & \text{si } n \text{ es par} \\ \left| \dfrac{1}{2} - 1 \right|, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} = \frac{1}{2}.$$

luego (X_n) no converge hacia x en la topología σ (CS, L). No obstante, se cumple el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 4.—Sea λ un espacio de sucesiones que contenga a φ. Entonces, para cada $x \in \lambda$ se tiene que (X_n) c-converge hacia x en la topología $\sigma(\lambda, \lambda^c)$. Es decir, en la topología débil, se verifica que:

$$\lim_n \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = x.$$

DEMOSTRACIÓN.—Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$B_n(x) = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} =$$

$$= \left(x_1, \frac{n-1}{n} x_2, \frac{n-2}{n} x_3, \ldots, \frac{1}{n} x_n, 0, 0, \ldots \right).$$

Dados $u \in \lambda^c$ y $\varepsilon > 0$, encontraremos $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $| < x - B_n(x), u > | < \varepsilon$. Ahora bien, como $x \in \lambda$ y $u \in \lambda^c$, la serie $\Sigma\, x_k\, u_k$ es c-convergente y escribiremos su c-suma como $< u, x > = \Sigma\, x_k\, u_k\, (c)$.

Sea

$$Z_n = u_1 x_1 + \frac{n-1}{n} u_2 x_2 + \ldots + \frac{1}{n} u_n x_n,$$

como $\Sigma\, u_k\, x_k$ c-converge, se sigue que la sucesión (Z_n) converge a $\sum_{k=1}^{\infty} u_k\, x_k\, (c)$ en $\mathbb{K}$. Por lo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$, entonces:

$$\left| Z_n - \sum_{k=1}^{\infty} u_k\, x_k\, (c) \right| < \varepsilon.$$

pero

$$| \langle x - B_n(x), u \rangle | = | \langle x, u \rangle - \langle B_n(x), u \rangle | = \left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k\, x_k\, (c) - Z_n \right|$$

por tanto

$$| \langle x - B_n(x), u \rangle | < \varepsilon, \quad \text{si} \quad n \geq n_0. \quad \text{C. Q. D.}$$

4. La c-topología de un espacio de sucesiones

Por la proposición 3 (a) se tiene que λ^c es L-invariante, esto es, para cada $u = (u_n) \in \lambda^c$ y cada $(\varepsilon_n) \in$ L, se verifica que $(\varepsilon_n \cdot u_n) \in \lambda^c$. Por tanto, para cada $u \in \lambda^c$ fijo, tiene sentido considerar la aplicación:

$$f_u : (\varepsilon_n) \in L \longmapsto (\varepsilon_n \cdot u_n) \in \lambda^c$$

que obviamente es lineal.

Proposición 5.—Para cada $u \in \lambda^c$, la aplicación f_u es débil-débil continua; es decir, f_u : L $[\sigma$ (L, CS)$]$ $\longmapsto \lambda^c$ $[\sigma(\lambda^c, \lambda)]$ es continua.

Demostración.—Sea V un $\sigma(\lambda^c, \lambda)$-entorno del origen en λ^c, por lo que V será de la forma

$$V = \{x^1, x^2, \dots, x^k\}^0 = \bigcap_{i=1}^{k} \{x^i\}^0,$$

con $x^i \in \lambda$ para $i = 1, 2, \dots, k$. Al ser $x^i \in \lambda$ y $u \in \lambda^c$, se tiene que la serie $\sum_n x^i_n \cdot u_n$ es c-convergente, esto es, el vector $m^i = (x^i_n \cdot u_n)$ pertenece a CS.

Consideremos el conjunto $\{m^i\}^0 \subset$ L, que se trata de un σ (L, CS)-entorno del origen. Ahora bien:

Si

$$b \in \{m^i\}^0 \Longrightarrow | \langle b, m^i \rangle | \leq 1 \Longrightarrow \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot x^i_n \cdot u_n(c) \right| \leq 1$$

$$\Longrightarrow \left| \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cdot u_n) \cdot x^i_n \, (c) \right| \leq 1 \Longrightarrow | < (b_n \cdot u_u), (x^i_n) > | \leq 1$$

$$\Longrightarrow f_u(b) = (b_n \cdot u_n) \in \{x^i\}^0$$

Por tanto, basta considerar el σ (L, CS)-entorno definido mediante $U = \bigcap_{i=1}^{k} \{m^i\}^0$, para obtener que $f_u(U) \subset V$; es decir, la continuidad de f_u. c. q. d.

Para cada $u \in \lambda^c$, definimos su L-envoltura mediante:

$$\{u\}^L = \{(\varepsilon_n \cdot u_n) : (\varepsilon_n) \in L \quad y \quad \|(\varepsilon_n)\| \leq 1\}.$$

Es claro que cada $\{u\}^L \subset \lambda^c$ (pues λ^c es L-invariante) y además $\{u\}^L = f_u(B)$, donde B es la bola unidad cerrada de L y por tanto un σ (L, CS)-compacto. En consecuencia, de la proposición anterior se sigue que $\{u\}^L$ es $\sigma(\lambda^c, \lambda)$-compacto.

Por otro lado, es obvio que $t \cdot \{u\}^L = \{t \cdot u\}^L$, para cada $t \in \mathbb{K}$. Además, como $u \in \{u\}^L$, se sigue que la unión de todos los conjuntos $\{u\}^L$ da lugar al espacio λ^c. En consecuencia, la familia

$$\{(\{u\}^L)^0 : u \in \lambda^c\}$$

define una base de entornos del origen para una topología localmente convexa en λ, y al ser los $\{u\}^L = \sigma(\lambda^c, \lambda)$-compactos, dicha topología es compatible con el par dual (λ, λ^c). Llamaremos a esta topología «c-topología» del espacio de sucesiones λ, y la designaremos por τ_L.

Estudiaremos a continuación la convergencia seccional respecto a la c-topología. Para ello haremos uso del siguiente resultado probado en [3]: «Los vectores coordenados (e_n) de CS constituyen una c-base del espacio CS», asímismo haremos uso del siguiente resultado que puede encontrarse en [5]: «Si $x \in$ CS y $u \in$ L entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k u_k(c) = \lim u_n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k(c) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(x) \cdot n \cdot \Delta^2 u_n \text{»}.$$

PROPOSICIÓN 6.—Sea λ un espacio de sucesiones que contenga a φ. Entonces, para cada $x \in \lambda$, la sucesión (X_n) de las secciones de x es c-convergente hacia x en la c-topología de λ.

DEMOSTRACIÓN.—Dado U τ_L-entorno del origen en λ tenemos que encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geqslant n_0$, entonces se verifique que:

$$x - \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \in U.$$

Ahora bien, si U es un τ_L-entorno ha de ser de la forma $U = (\{u\}^L)^0$, para algún $u \in \lambda^c$. Por lo que habrá que demostrar que existe n_0, tal que si $n \geqslant n_0$, entonces:

$$\left| < x - \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \ v > \right| \leq 1, \quad \forall v \in \{ u \}^L .$$

Por la proposición 4 sabemos que (X_n) es c-convergente hacia x en la topología $\sigma(\lambda, \lambda^c)$, luego existe n_1 tal que si $n \geqslant n_1$ entonces:

$$\left| < x - \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \ u > \right| \leq 1 \tag{1}$$

Por otro lado, como $x \in \lambda$ y $u \in \lambda^c$, se tiene que el vector $(x_k \cdot u_k)$ pertenece a CS. Sea Y^n definido mediante:

$$Y^n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \left(x_1, \frac{n-1}{n} x_2, \frac{n-2}{n} x_3, \ldots, \frac{1}{n} x_n, 0, 0, \ldots \right)$$

por lo que se tiene que:

$$(Y^n_k \cdot u_k) = \left(x_1 u_1, \frac{n-1}{n} x_2 u_2, \frac{n-2}{n} x_3 u_3, \ldots, \frac{1}{n} x_n u_n, 0, 0, \ldots \right) .$$

Es obvio que

$$(Y^n_k \cdot u_k) = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n},$$

en donde denotamos $S_i = \sum_{k=1}^{i} x_k u_k \cdot e_k$; ahora bien, por ser (e_n) una c-base de CS se sigue que la sucesión $(Y^n_k \cdot u_k)_{n \in N}$ converge en el espacio de Banach CS hacia el vector $(x_k u_k)$. Por tanto, la sucesión $([x_k - Y^n_k] u_k)_{n \in N}$ converge a cero en CS; luego existe n_2, tal que si $n \geqslant n_2$ entonces $Z^n = ([x_k - Y^n_k] \cdot u_k)$ tiene norma menor o igual a uno en CS. Es decir

$$\| Z^n \| = \sup_{m \in N} | \sigma_m (Z^n) | \leq 1, \quad \forall n \geq n_2 . \tag{2}$$

Consideremos $n_0 = \text{máx}\,(n_1, n_2)$ y veamos que si n es posterior a n_0 se tiene la desigualdad:

$$\left| < x - \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, v > \right| \leq 1, \quad \forall\, v \in \{u\}^L .$$

Si $v \in \{u\}^L$, será $v_n = \varepsilon_n \cdot u_n$, con $(\varepsilon_n) \in L$ y $\| (\varepsilon_n) \| \leqslant 1$, y como $(\varepsilon_n) \in L$, existe $\lim \varepsilon_n = \hat{\varepsilon}$.

Aplicando ahora la nota previa a la proposición, se obtiene que:

$$< x - \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, v > = \langle x - Y^n, v \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - Y_k^n) \cdot u_k \cdot \varepsilon_k (c) = \hat{\varepsilon} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - Y_k^n) \cdot u_k (c) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_m (Z^n) \cdot m \cdot \Delta^2 \varepsilon_m .$$

Por tanto, aplicando (1) y (2) y siempre que $n \geqslant n_0$ se tiene que:

$$\left| < x - \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, v > \right| \leq | \hat{\varepsilon} | \cdot$$

$$\cdot \left| < x - \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, u > \right| + \sum_{m=1}^{\infty} | \sigma_m (Z^n) | \cdot m \cdot | \Delta^2 \varepsilon_m | \leq$$

$$\leq | \hat{\varepsilon} | + \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot | \Delta^2 \varepsilon_m | = \| (\varepsilon_n) \| \leq 1.$$

luego (X_n) c-converge hacia x en la c-topología. c. q. d.

Estudiaremos ahora la c-topología del espacio de sucesiones CS.

Proposición 7.—En CS la c-topología y la topología normada coinciden.

Demostración.—Recuérdese que la topología normada de CS (es decir $\| x \| = \sup | \sigma_n (x) |$) es compatible con la c-dualidad, pues su dual topológico y su c-dual coinciden con el espacio L (ver [3]). Por tanto, como τ_L es una topología compatible con el par dual (CS, L) y la topología normada es la más fina de dicho par, se tiene que τ_L es menos fina que la topología normada.

Probemos que τ_L es más fina que la topología normada de CS. Para ello consideremos el elemento $u = (u_n)$ en L, con $u_n = 1$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ y sea el τ_L-entorno $(\{u\}^L)^0$. Obsérvese que $\{u\}^L = \{(\varepsilon_n) \in L : \| (\varepsilon_n) \| \leqslant 1\}$ es decir, $\{u\}^L$ es la bola unidad cerrada de L.

Un elemento x pertenece a $(\{u\}^L)^0$, si y solo si, verifica que $| \Sigma x_n \cdot \varepsilon_n (c) | \leqslant 1$, para cada $(\varepsilon_n) \in L$ con $\| (\varepsilon_n) \| \leqslant 1$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el elemento:

$$(\varepsilon_k^n) = \left(1, \frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right) \in L$$

es fácil comprobar que $\| (\varepsilon^n_k) \| = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$; y por tanto que si x pertenece a $(\{u\}^L)^0$ se verifica que:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \varepsilon_k^n (c) \right| \leq 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

ahora bien,

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \, \varepsilon_k^n (c) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n} \cdot x_k = \sigma_n (x);$$

en consecuencia, la relación anterior se traduce en que $| \sigma_n (x) | \leqslant 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto es:

$$\| x \| = \sup_{n \in \mathbb{N}} | \sigma_n (x) | \leq 1.$$

Luego $(\{u\}^L)^0$ está contenido en la bola unidad de CS y por tanto τ_L es más fina que la topología normada de CS, c. q. d.

Dado un espacio de sucesiones λ y dado un elemento fijo $u \in \lambda^c$ tiene sentido considerar la aplicación:

$$F_u : x \in \lambda \longmapsto (x_k \cdot u_k) \in \quad CS$$

PROPOSICIÓN 8.—La aplicación $F_u : \lambda\, [\tau_L] \longmapsto CS\, [\tau_L]$ es continua.

DEMOSTRACIÓN.—Para $v \in L$ sea $V = (\{v\}^L)^0$ que será un τ_L-entorno del origen en CS. Como $u \in \lambda^c$ y $v \in L$, se sigue de ser λ^c L-invariante (proposición 3) que $a = (u_k \cdot v_k) \in \lambda^c$; en consecuencia $U = (\{a\}^L)^0$ es un τ_L-entorno del origen en λ. Probaremos que el conjunto $F_u(U)$ está contenido en V.

Ahora bien, $x \in U$ si y solo si, $\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n w_n(c) \right| \leqslant 1$, para cada $w \in \{a\}^L$. Pero $w \in \{a\}^L$, si y solo si, w_n es de la forma $w_n = u_n v_n \varepsilon_n$, con $(\varepsilon_n) \in L$ y $\| (\varepsilon_n) \| \leqslant 1$. Luego:

$$x \in U \iff \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n u_n v_n \varepsilon_n(c) \right| \leq 1, \forall (\varepsilon_u) \in L \quad \text{con} \quad \|(\varepsilon_n)\| \leq 1. \quad (1)$$

Como un elemento $z \in \{v\}^L$, si y solo si, $z_k = v_k \cdot \varepsilon_k$, con $(\varepsilon_k) \in L$ y $\| (\varepsilon_k) \| \leqslant 1$; se sigue de (1) que para cada x en U y cada z en $\{v\}^L$ se verifica que:

$$|\langle F_u(x), z \rangle| = |\langle (x_k u_k), (v_k x_k) \rangle| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k u_k v_k \varepsilon_k(c) \right| \leq 1$$

luego, $F_u(x) \in (\{v\}^L)^0 = V$. Esto es, $F_u(U) \subset V$, c. q. d.

Daremos a continuación una condición necesaria y suficiente para que un espacio de sucesiones sea c-perfecto; para lo cual necesitaremos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.—Sea λ un espacio de sucesiones y sea η una topología en λ. Se dice que λ es η-completo a coordenadas, si y solo si, para cada sucesión η-Cauchy en λ, existe un elemento de λ, tal que es límite coordenada a coordenada de dicha sucesión.

TEOREMA 1.—Sea λ un espacio de sucesiones que contenga a φ. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que λ sea c-perfecto es que λ sea τ_L-completo a coordenadas.

DEMOSTRACIÓN.—(a) Suficiencia: Tendremos que probar que $\lambda^{cc} \subset \lambda$. Sea $x \in \lambda^{cc}$, por la proposición 6 sabemos que $B_n(x) = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$ converge hacia x en la c-topología del par dual $(\lambda^{cc}, \lambda^c)$ a la que denotaremos por $\tau_L(\lambda^{cc})$ para distinguirla de la c-topología del par (λ, λ^c) que será denotada por $\tau_L(\lambda)$.

Ahora bien, es fácil comprobar que $\tau_L(\lambda^{cc})$ induce sobre λ la propia topología $\tau_L(\lambda)$. Por tanto, como $(B_n(x))$ es una sucesión $\tau_L(\lambda^{cc})$-Cauchy y $B_n(x) \in \varphi \subset \lambda$, se tiene que $(B_n(x))$ es una sucesión $\tau_L(\lambda)$-Cauchy en λ. Por lo que aplicando la hipótesis se sigue que existe $y \in \lambda$ tal que $(B_n(x))$ converge coordenada a coordenada hacia y.

Obviamente la sucesión $(B_n(x))$ también converge coordenada a coordenada hacia x, por lo que necesariamente $x = y$, de lo que se sigue que $x \in \lambda$.

(b) Necesidad: Sea (x^n) una sucesión τ_L-Cauchy en λ, tendremos que probar que existe un elemento $x \in \lambda$ tal que (x^n) converge hacia x coordenada a coordenada.

Como τ_L es más fina que $\sigma(\lambda, \lambda^c)$, se sigue que (x^n) es $\sigma(\lambda, \lambda^c)$ Cauchy; en consecuencia, dado $e_k \in \lambda^c$, con k fijo, tenemos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon, k)$ de manera que:

$$| x_k^n - x_k^m | = | \langle x^n - x^m, e_k \rangle | \leq \varepsilon, \quad \forall\, m,\ n \geq n_0$$

lo que indica que la sucesión $(x^n{}_k)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$ y por tanto convergente. Pongamos $\lim\limits_n x^n{}_k = x_k$.

Consideremos el vector $x = (x_k)$; bastará demostrar que x pertenece a λ, y como por hipótesis $\lambda = \lambda^{cc}$, bastará demostrar que $x \in \lambda^{cc}$. Es decir, habrá que probar que para cada $u \in \lambda^c$, la serie $\Sigma\, x_k u_k$ es c-convergente.

Ahora bien, dado $u \in \lambda^c$, si (x^n) es τ_L-Cauchy en λ, por la proposición 8 se tiene que la sucesión imagen por F_u, esto es, $((x^n{}_k \cdot u_k))_{n \in \mathbb{N}}$ es τ_L-Cauchy en CS, y por la proposición 7, se sigue que dicha sucesión es $\| \ \|$-Cauchy en CS.

Como $(\mathrm{CS}, \| \ \|)$ es un espacio de Banach, se sigue que existe $z = (z_k) \in \mathrm{CS}$, tal que $(x^n{}_k \cdot u_k)$ es $\| \ \|$-convergente hacia x en CS, y por tanto, también es convergente coordenada a coordenada, es decir, para cada k fijo, la sucesión $x^n{}_k \cdot u_k$ converge a z_k en $\mathbb{K}$. Por otro lado, como se verifica que $\lim\limits_n x^n{}_k = x_k$, se sigue que $x^n{}_k \cdot u_k$ converge a $x_k u_k$, por lo que necesariamente $z_k = x_k \cdot u_k$, de lo que se deduce que el vector $(x_k \cdot u_k)$ coincide con z, por lo que también pertenece a CS.

De esta forma queda probado que la serie $\Sigma\, x_k \cdot u_k$ es c-convergente para cada $u \in \lambda^c$, es decir, que $x \in \lambda^{cc}$, c. q. d.

Siguiendo técnicas similares a [6] en relación a la α-dualidad se puede demostrar el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 9.—Sea λ un espacio de sucesiones que contiene a φ. Entonces, λ es τ_L-sucesionalmente-separable.

5. La *c*-dualidad y los conjuntos compactos

Con objeto de obtener una caracterización de los conjuntos compactos para topologías compatibles con el par dual (λ, λ^c) daremos unos resultados que están en la línea de (6) y (7).

Utilizando resultados de compacidad contenidos en (8) y (2) y teniendo en cuenta la proposición 9 no resulta difícil dar los siguientes teoremas:

TEOREMA 2.—Sea λ un espacio de sucesiones tal que (λ, λ^c) es un par dual y sea A un subconjunto de λ. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) A es $\sigma(\lambda, \lambda^c)$-compacto

(b) A es $\sigma(\lambda, \lambda^c)$-numerablemente compacto

(c) A es $\sigma(\lambda, \lambda^c)$-sucesionalmente compacto.

TEOREMA 3.—Sea λ un espacio de sucesiones tal que (λ, λ^c) es un par dual y sea A un subconjunto de λ. Si τ es una topología localmente convexa y compatible con el par dual (λ, λ^c) las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) A es τ-compacto

(b) A es τ-numerablemente compacto

(c) A es τ-sucesionalmente compacto.

Los detalles de estas pruebas pueden ser encontrados en (9).

El siguiente teorema, que completa el teorema 3, es de gran interés práctico para caracterizar a los conjuntos compactos.

TEOREMA 4.—Sea λ un espacio de sucesiones y sea τ una topología localmente convexa compatible con el par dual (λ, λ^c). Si A es un subconjunto de λ, son equivalentes:

(1) A es τ-compacto.

(2) A es acotado y para cada sucesión x^n en A que sea convergente coordenada a coordenada hacia un elemento $x^0 \in \omega$, se verifica que $x^0 \in$ A y que x^n τ-converge hacia x^0.

DEMOSTRACIÓN.—*(1)* $\Longrightarrow$ *(2)*: Si A es τ-compacto, la acotación de A es obvia. Sea x^n una sucesión en A que converge coordenada a coordenada hacia un elemento $x^0 \in \omega$. Como A es τ-sucesionalmente compacto (teorema 3) existe una subsucesión $x^{(n_k)}$ que τ-converge hacia un punto $y_0 \in$ A.

Como τ es más fina que $\sigma(\lambda, \lambda^c)$, se tiene que $x^{(n_k)}$ converge coordenada a coordenada hacia y_0. Luego necesariamente $x^0 = y_0$, lo que prueba que $x^0 \in$ A.

Demostraremos ahora que x^n τ-converge a x^0. Como x^n converge coordenada a coordenada hacia x^0, se tiene que x^0 es el único punto al que x^n puede τ-converger. Así pues, decir que x^n no τ-converge es equivalente a afirmar que x^n no τ-converge hacia x^0. Luego, si x^n no fuese τ-convergente, existiría un τ-entorno U de x^0, tal que, para infinitos índices (pongamos para $n \in$ I) se tiene que $x^n \notin$ U, $\forall\, n \in$ I.

Ahora bien, como $(x^n)_{n \in I}$ es una sucesión en el conjunto τ-sucesionalmente compacto A, se puede extraer una subsucesión que sea τ-convergente hacia un punto y_0 en A, punto que no puede ser otro que x^0, esto es $y_0 = x^0$.

Pero al ser $x^n \notin$ U, $\forall\, n \in$ I, se tiene que $y_0 \notin \mathring{U}$ y en consecuencia $y_0 \neq x^0$, con lo que llegamos a una contradicción.

(2) $\Longrightarrow$ *(1)*: Teniendo en cuenta el teorema 3, bastará probar que A es τ-sucesionalmente compacto.

Sea x^n una sucesión en A, habrá que demostrar que x^n posee una subsucesión que τ-converge hacia un elemento de A.

Como A es acotado, se sigue que $A_i = \langle A, e_i \rangle$ es acotado en $\mathbb{K}$, para cada i fijo; luego la sucesión $(x_i^n)_{n \in N}$ está contenida en el acotado A_i de $\mathbb{K}$, por lo que es posible extraer de ella una subsucesión convergente. Y como esto es factible para cada coordenada, podemos usar el procedimiento diagonal para obtener una subsucesión de x^n que sea convergente coordenada a coordenada hacia un cierto elemento $x^0 \in \omega$. Basta ahora usar la hipótesis, para poder afirmar que dicha subsucesión τ-converge hacia x^0 y que $x^0 \in$ A, c. q. d.

Referencias

[1] ANTONINO, J. A. Propiedades de los espacios de sucesiones, ρ-dualidad y espacios casi-perfectos. Tesis doctoral. Universidad de Valencia.

[2] DIEUDONNE, J. y SCHWARTZ, L. (1950). La dualité dans les espaces (F) et (LF). *Ann. Inst. Fourier*, **1**, 61-101.

[3] FLORENCIO, M. y PÉREZ CARRERAS, P. (1981). Sobre sumabilidad Cesàro en el espacio CS (I). *Rev. R. Acad. Ci. Madrid,* **75**, 1185-1198.
[4] GARLING, D. J. H. (1967). The β- and γ-duality of sequence spaces. *Proc. Camb. Phil. Soc.,* **63**, 963-981.
[5] HARDY, G. H. (1973). Divergent Series. Oxford U. P.
[6] KÖTHE, G. (1969). Topological vector spaces I. Springer-Verlag.
[7] MARQUINA, A. Algunas propiedades de compacidad en espacios de sucesiones. *Rev. Real Acad.* Tomo LXVII, cuaderno 1.°.
[8] VALDIVIA, M. (1972). Some criteria for weak compactness. *J. reine angew. Math.,* **255**, 165-169.
[9] FLORENCIO, M. (1980). Sumabilidad Cesàro en espacios de sucesiones. Tesis doctoral. Sevilla.

Departamento de Matemáticas
E. S. I. I. de la Universidad de Sevilla