DESARROLLOS ASINTOTICOS A TRAVES DE COMPACTOS ANGULARES (*)

Juan A. Mira López

Recibido: 15 octubre 1980

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

En este artículo estudiamos el espacio de las funciones holomorfas con desarrollo asintótico en el origen **0**, a través de una clase especial de compactos, y el dual de dicho espacio.

In this paper, we studie the space of holomorphic functions with asymptotic expansions in the origin, **0**, throughout a special kind of compacts and the dual of this space.

1. El espacio $\hat{E}[T]$

Sea D un abierto simplemente conexo del plano complejo C, que admite el origen O como punto frontera, y que sea localmente convexo en O, es decir, que exista una bola B (O, r), tal que la intersección B (O, r) $\cap$ D es un conjunto convexo.

DEFINICIÓN 1.—Diremos que K $\subset$ D $\cup$ {O} es un «compacto angular», cuando K es un compacto de D $\cup$ {O} tal que K — {O} está contenido en D, y cuya frontera está formada por un ángulo de vértice O y una curva regular a trozos.

DEFINICIÓN 2.—Si f es una función holomorfa en D, diremos que

(1) Este trabajo forma parte de la memoria *Espacios de funciones holomorfas con desarrollo asintótico*, presentada en la Universidad de Valencia, para optar al Grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas, dirigida por D. Manuel Valdivia Ureña.

f tiene desarrollo asintótico en O, desde los compactos angulares, si para todo compacto angular K, existen los siguientes límites:

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} f(z) = a_0, \quad \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} \frac{f(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p}{z^n} = a_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Entonces, escribiremos

$$f(z) \hat{\simeq} \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p,$$

y designaremos por $\hat{E}$ al conjunto de tales funciones.

Llamaremos transformada de orden n en D de $f \in \hat{E}$, a la función

$$f_{(n)}(z) = \frac{f(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p}{z}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Escribiremos también

$$f_{(0)}(z) = f(z) \quad \text{y} \quad f_{(p)}(0) = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} f_{(p)}(z).$$

Con estas notaciones, $f_{(n)} \in \hat{E}$, para todo $n \in$ N, y

$$f_{(n)}(z) \hat{\simeq} \sum_{r=0}^{\infty} a_{n+r} z^r.$$

Con las definiciones habituales, $\hat{E}$ es un espacio vectorial sobre C.

El lema siguiente se demuestra fácilmente:

Lema 1.—*Dada una sucesión fundamental de compactos de D, $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \Delta_2 \ldots$, es posible encontrar una sucesión $K_0 \subset K_1 \subset \subset K_2 \subset \ldots$, de compactos angulares de modo que para todo Δ_k, existe un K_m tal que $\Delta_k \subset K_m$, y además esta sucesión es tal que cualquier compacto angular K está contenido en un K_n.*

Definición 3.—Llamaremos T a la topología de la convergencia uniforme de las funciones de $\hat{E}$ y sus transformadas, sobre la familia $\{K\}$ de todos los compactos angulares.

T queda definida por las seminormas $q_{K,p}(f) = \sup_{z \in K} | f_{(p)}(z) |$, $p = 0, 1, 2, \ldots$; K compacto angular; y también, en virtud del lema, por la sucesión de seminormas

$$q_{m,n}(f) = \sup_{\substack{z \in K_m \\ p \leq n}} | f_{(p)}(z) |, \quad m, n \in N.$$

Por tanto, $\hat{E}[T]$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo y metrizable.

Como la sucesión de compactos angulares $\{K_m\}_{m=0}^{\infty}$ que define T, cumple las condiciones dadas en (Mira, def. 2), se verifica el siguiente teorema:

TEOREMA 1.—*$\hat{E}[T]$ es un espacio Fréchet-Montel.*

Aunque la separabilidad de $\hat{E}[T]$ es consecuencia del teorema 1, puede deducirse también del siguiente:

TEOREMA 2.—*Los polinomios forman un subconjunto denso de $\hat{E}[T]$.*

DEMOSTRACIÓN.—Análoga a la dada en (Mira, teorema 4).

2. El espacio dual de $\hat{E}[T]$

En este párrafo, para fijar ideas, consideramos que D es un círculo tangente al eje imaginario en el origen, y situado en $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Sea $u \in (\hat{E}[T])'$ una funcional lineal continua sobre $\hat{E}[T]$. Entonces existe un compacto angular K, un $n \in 0, 1, 2, \ldots$ y un $M > 0$, tales que para toda $f \in \hat{E}$ es

$$| u(f) | \leqslant M\, q_{K,n}(f) = M \sup_{\substack{z \in K \\ p \leq n}} | f_{(p)}(z) |.$$

Si llamamos $\hat{F}$ al espacio vectorial de las funciones holomorfas en el interior de K, continuas en K, y con desarrollo asintótico en el origen sobre K, entonces $\hat{E} \subset \hat{F}$, y por el teorema de Hahn-Banach, la funcional u se puede extender a todo $\hat{F}$.

Llamando también u a dicha extensión, se verifica que u es continua en $\hat{F}$ con la topología de la norma $q_{K,n}$, que llamaremos $T_{K,n}$, y se verifica que

$$| u(f) | \leqslant M\, q_{K,n}(f), \quad \text{para todo} \quad f \in \hat{F}.$$

Si $\lambda \notin K$, u está definida sobre la función $\phi_\lambda(z) = \dfrac{1}{1-z}$ que pertenece a $\hat{F}$ ya que es holomorfa en un entorno de K. Podemos pues dar la

DEFINICIÓN 4.—Para $\lambda \neq \infty$, definimos

$$\tilde{u}_K(\lambda) = u\left(\frac{1}{\lambda - z}\right) = \left\langle u, \frac{1}{\lambda - z}\right\rangle, \quad \text{y} \quad \tilde{u}_K(\infty) = 0.$$

$\tilde{u}_K$ tiene por dominio $\complement K = \Omega - K$, que es abierto y conexo.

TEOREMA 3.—$\tilde{u}_K(\lambda)$ *es holomorfa en* $\Omega - K$.

DEMOSTRACIÓN.—Se tiene, para $\lambda \neq \infty$, que

$$\frac{\tilde{u}_K(\lambda) - \tilde{u}_K(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \left\langle u, \frac{\dfrac{1}{\lambda - z} - \dfrac{1}{\lambda_0 - z}}{\lambda - \lambda_0}\right\rangle = \left\langle u, \frac{-1}{(\lambda - z)(\lambda_0 - z)}\right\rangle.$$

Vamos a demostrar que

$$T_{K,n} - \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{-1}{(\lambda - z)(\lambda_0 - z)} = \frac{-1}{(\lambda_0 - z)^2}.$$

Se tiene:

$$q_{K,n}\left(\frac{1}{(\lambda_0 - z)^2} - \frac{1}{(\lambda - z)(\lambda_0 - z)}\right) = q_{K,n}\left(\frac{(\lambda - z) - (\lambda_0 - z)}{(\lambda_0 - z)^2(\lambda - z)}\right) =$$

$$= q_{K,n}\left(\frac{\lambda - \lambda_0}{(\lambda_0 - z)^2(\lambda - z)}\right) = | \lambda - \lambda_0 |\, q_{K,n}\left(\frac{1}{(\lambda_0 - z)^2(\lambda - z)}\right)$$

Es sencillo probar que si λ varía en un cierto entorno de λ_0,

$$q_{K,m}\left(\frac{1}{(\lambda_0 - z)^2 (\lambda - z)}\right)$$

está acotado. Por tanto, existe una $M > 0$, tal que

$$q_{K,m}\left(\frac{1}{(\lambda_0 - z)^2 (\lambda - z)}\right) \leqslant M,$$

y

$$q_{K,m}\left(\frac{1}{(\lambda_0 - z)^2} - \frac{1}{(\lambda - z)(\lambda_0 - z)}\right) < \epsilon \quad \text{si} \quad |\lambda - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Con esto,

$$T_{K,n} - \lim_{\lambda \to \lambda_0}\left(\frac{-1}{(\lambda - z)(\lambda_0 - z)}\right) = \frac{-1}{(\lambda_0 - z)^2}$$

y

$$\lim_{\lambda \to \lambda} \frac{\tilde{u}_K(\lambda) - \tilde{u}_K(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \to \lambda_0}\left\langle u, \frac{1}{(\lambda - z)(\lambda_0 - z)}\right\rangle =$$

$$= \left\langle u, T_{K,n} - \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{-1}{(\lambda - z)(\lambda_0 - z)}\right\rangle = \left\langle u, \frac{-1}{(\lambda_0 - z)^2}\right\rangle$$

que es finito, ya que $\dfrac{-1}{(\lambda_0 - z)^2}$ pertenece a $\hat{F}$; por tanto, $\tilde{u}_k(\lambda)$ es holomorfa en $\lambda \neq \infty$, $\lambda \in CK$.

Si $\lambda_0 = \infty$, $\tilde{u}_k(\lambda)$ es analítica en un entorno de ∞ y $\tilde{u}_k(\lambda)$ converge a 0 cuando $\lambda \longrightarrow \infty$, ya que

$$q_{K,n}\left(\frac{1}{\lambda - z}\right) = \sup_{\substack{z \in K \\ p \leq m}} \left|\left(\frac{1}{\lambda - z}\right)_{(p)}\right| = \sup_{\substack{z \in K \\ p \leq n}} \left|\frac{1}{\lambda^p(\lambda - z)}\right|$$

tiende a 0 cuando $\lambda \longrightarrow \infty$.

$\tilde{u}_K(\lambda)$ es por tanto analítica en el ∞ y se anula allí.

NOTAS.

1. La función $\tilde{u}_K$ depende de la seminorma $q_{K,n}$ y de su exten-

sión de $\hat{E}$ a $\hat{F}$. Si $M' > 0$, K' compacto angular y $n' \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ son tales que también es $|\langle u, f\rangle| \leqslant M' q_{K', n'}(f)$ para toda $f \in \hat{E}$, entonces la función $\tilde{u}_{K'}$ correspondiente resultaría holomorfa fuera de K'. Pero en el complemento de $D \cup \{0\}$, ambas $\tilde{u}_K$ y $\tilde{u}_{K'}$ coinciden, pues entonces para cada $\lambda \notin D \cup \{0\}$, la función $\dfrac{1}{\lambda - z} \in \hat{E}$ y el valor común sería $\left\langle u, \dfrac{1}{\lambda - z}\right\rangle$. En el complemento de $K \cup K'$, $\tilde{u}_K$ y $\tilde{u}_{K'}$ son holomorfas por lo que si $\mathcal{C}(K \cup K')$ es conexo, en él $\tilde{u}_K = \tilde{u}_{K'}$ por el principio de prolongación analítica; si no es así siempre podemos encontrar un $K'' \supset K \cup K'$ de complemento conexo, que nos determinaría una función $\tilde{u}_{K''}$ fuera de K'', de la cual $\tilde{u}_K$ y $\tilde{u}_{K'}$ serían prolongaciones analíticas a $\mathcal{C}K$ y $\mathcal{C}K'$ respectivamente. Por tanto en los puntos $\lambda \in \mathcal{C}(K \cup K')$ es $\tilde{u}_K(\lambda) = \tilde{u}_{K'}(\lambda)$.

2. Dado $u \in \hat{E}'$, queda determinada una familia $\{K_\beta\}$ de compactos angulares para los que es posible encontrar un $M_\beta > 0$ y un n_β natural, de modo que

$$|\langle u, f\rangle| \leqslant M_\beta\, q_{K_\beta n_\beta}(f) \quad \text{para toda} \quad f \in \hat{E}.$$

Si llamamos $K_u = \bigcap_\beta K_\beta$, K_u es un compacto angular (podría reducirse al $\{0\}$), que tiene la propiedad de que en el complementario de K_u puede definirse una función $\tilde{u}\colon \mathcal{C}K_u \longrightarrow C$, que es holomorfa, puesto que si $\lambda \in \mathcal{C}K_u$, existe K_β tal que λ no pertenece a K_β y entonces escribiendo $\tilde{u}(\lambda) = \tilde{u}_{K_\beta}(\lambda)$, resulta $\tilde{u}(\lambda)$ holomorfa según el teorema 3. La parte 1 de estas notas prueba que $\tilde{u}$ está bien definida.

Definición 5.—Llamaremos a $\tilde{u}(\lambda)$ indicatriz de la funcional lineal $u\colon \hat{E} \longrightarrow C$.

Veamos ahora como la indicatriz $\tilde{u}$ nos permite recuperar la funcional u.

Supongamos que para todo $f \in \hat{E}$ se cumple que

$$|u(f)| \leqslant M\, q_{K,r}(f).$$

Entonces se verifica el siguiente:

TEOREMA 4.—*Si* $\tilde{u}(\lambda)$ *es la indicatriz de la funcional lineal* u, $\{P^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de polinomios que converge a* f *en* $\hat{E}[T]$, *y* Γ *una curva cerrada simple contenida en el complementario de* K *y que rodea a* K, *orientada positivamente, entonces*

$$\langle u, f\rangle = \lim_{n \to \infty} \langle u, P^n\rangle = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \tilde{u}(t)\, P^n(t)\, dt \quad \textit{para} \quad f \in \hat{E}.$$

DEMOSTRACIÓN.—Para $f \in E$, el teorema 2 asegura la existencia de la sucesión $P^n(z)$. Sea $\rho = d(\Gamma, K)$. La fórmula integral de Cauchy permite escribir

$$P^n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{P^n(t)}{t - z}\, dt,$$

para $z \in K$.

Llamaremos $P^n_k(z)$ a las sumas de Riemann correspondientes a una cierta partición $\{t^k_j\}_{j=1}^{m(k)}$ de Γ, es decir,

$$P^n_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_j \frac{P^n(t^k_j)\, \Delta t^k_j}{t^k_j - z}$$

Vamos a demostrar que

$$T_{K,r} - \lim_{k \to \infty} P^n_k = P^n,$$

o lo que es equivalente, que si $0 \leqslant p \leqslant r$, la transformada de orden p, $P^n_{k\,(p)}$, converge uniformemente en K, a la transformada de orden p, $P^n_{(p)}$.

En efecto: la transformada de orden p de la función $\dfrac{1}{\lambda - z}$ es $\dfrac{1}{\lambda^p(\lambda - z)}$, por tanto

$$P^n_{k\,(p)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_j \frac{P^n(t^k_j)\, \Delta t^k_j}{(t^k_j)^p\, (t^k_j - z)}.$$

y

$$P^n_{(p)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{P^n(t)\, dt}{t^p\, (t - z)}$$

Luego vemos que, puntualmente

$$\lim_{k \to \infty} P^n_{k\,(p)}(z) = P^n_{(p)}(z),$$

y puesto que existe una distancia mínima $\rho > 0$, entre los puntos $z \in K$ y los $t \in \Gamma$, la sucesión $P^n_{k\,(p)}(z)$ converge uniformemente a $P^n_{(p)}(z)$ en K. Se tiene entonces que

$$\langle u, P^n(z)\rangle = \langle u, T_{K,\,r} - \lim_{k \to \infty} P^n_k(z)\rangle = \lim_{k \to \infty} \left\langle u, \frac{1}{2\pi i} \sum_j \frac{P^n(t^k_j)\,\Delta t^k_j}{t^k_j - z} \right\rangle =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \sum_j P^n(t^k_j) \left\langle u, \frac{1}{t^k_j - z} \right\rangle \Delta t^k_j = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \tilde{u}(t)\, P^n(t)\, d\,t.$$

Como $u \in (\hat{E}\,[T])'$, y $f = T - \lim_{n \to \infty} P^n$, se tiene

$$\langle u, f\rangle = \lim_{n \to \infty} \langle u, P^n\rangle = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \tilde{u}(t)\, P^n(t)\, d\,t.$$

* * *

Busquemos una acotación para las indicatrices $\tilde{u}$.

Sea $\{K_\beta\}$ la familia de compactos angulares asociada a la funcional $u \in (\hat{E}\,[T])'$ que hemos descrito en la nota 2 anterior. Si K es un compacto angular que contiene a algún K_β, entonces K pertenece a la familia $\{K_\beta\}$ sirviendo como M y n las correspondientes a K_β.

Si $\lambda \in \mathcal{C}\,K$, tendremos

$$|\tilde{u}(\lambda)| = \left| \left\langle u, \frac{1}{\lambda - z} \right\rangle \right| \leqslant M \sup_{\substack{z \in K \\ p \leq n}} \left| \left(\frac{1}{\lambda - z} \right)_{(p)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant M \sup_{z \in K} \left\{ \frac{1}{d(\lambda, K)}, \ldots \frac{1}{|\lambda|^n\, d(\lambda, K)} \right\}$$

puesto que

$$\left(\frac{1}{\lambda - z} \right)_{(p)} = \frac{1}{\lambda^p(\lambda - z)}$$

DEFINICIÓN 6.—Llamaremos $\hat{H}$ al conjunto de funciones $\tilde{f}$ para las que existe un compacto angular K, una constante positiva M y un entero no negativo n, tales que

a) $\tilde{f}$ es holomorfa en $\mathcal{C}$ K

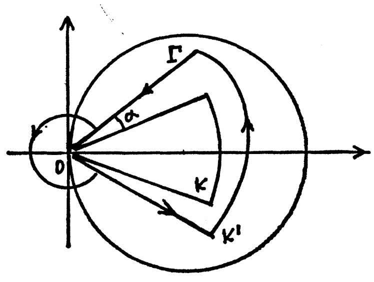
b) Para $\lambda \in \mathcal{C}$ K, es

$$| \tilde{f}(\lambda) | \leqslant \mathrm{M} \sup \left\{ \frac{1}{d(\lambda, \mathrm{K})}, \ldots, \frac{1}{|\lambda|^n d(\lambda, \mathrm{K})} \right\}$$

Observemos que si $u \in (\hat{E}\,[T])'$, su indicatriz $\tilde{u} \in \hat{\mathrm{H}}$, y el teorema 4, prueba que la aplicación lineal

$$(\hat{E}\,[T])' \longrightarrow \hat{H}$$
$$u \longrightarrow \tilde{u}, \quad \text{es inyectiva.}$$

Vamos a probar que esta aplicación también es sobre. Para ello, las curvas Γ que rodean a K, las podemos tomar como en la figura, formadas por parte de la frontera de K′ ⊃ K, y un arco de circunferencia de centro 0 y radio pequeño. Para esta clase de curvas Γ,



y para $|\lambda|$ pequeño, existe siempre una constante $C > 0$, tal que $d(\lambda, \mathrm{K}) > C\,|\lambda|$, pues si $0 < C < |\operatorname{sen} \alpha|$, siendo α el menor ángulo formado por los lados de K y K′ ⊃ K, dicha C cumple la condición exigida.

TEOREMA 5.—*El dual de* $\hat{E}\,[T]$ *es* $\hat{H}$.

DEMOSTRACIÓN.—Queda por demostrar únicamente que, dado $\tilde{f} \in \hat{H}$ nos determina un elemento de $(\hat{E}\,[T])'$.

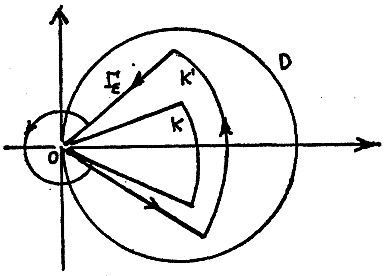
Para ello, probaremos que para todo polinomio P existe una constante $C > 0$, independiente de P, y un compacto $K' \supset K$ tal que

$$|\int_{\Gamma} \tilde{f}(t)\, P(t)\, dt| \leqslant C\, q_{K',\,(n+2)}(P)$$

donde $\tilde{f}$ es holomorfa fuera de K y cumple el sistema de cotas:

$$|\tilde{f}(\lambda)| \leqslant M_K \sup \left\{ \frac{1}{d(\lambda, K)}, \ldots, \frac{1}{|\lambda|^n\, d(\lambda, K)} \right\}$$

Γ_ε es la curva regular a trozos formada por la frontera de K′, en la que se sustituye el ángulo por el arco de circunferencia de radio $\varepsilon > 0$ cualquiera (ver figura).



Con ello, la aplicación

$$P \longrightarrow \int_{\Gamma_\varepsilon} \tilde{f}(t)\, P(t)\, dt$$

es continua, y el Teorema queda probado pues los polinomios son densos en $\hat{E}\,[T]$.

Observemos que para las $t \in \Gamma_\varepsilon$, de módulo suficientemente pequeño, se cumple que

$$|\tilde{f}(t)| \leqslant \frac{\text{Cte.}}{|t|^{n+1}}.$$

Calculemos $\int_{\Gamma_\varepsilon} \tilde{f}(t)\, P(t)\, dt$. Escribamos

$$P(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n+1} t^{n+1} + t^{n+2} P_{(n+2)}(t).$$

Entonces,

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \tilde{f}(t)\, P(t)\, dt = \int_{\Gamma_\varepsilon} \tilde{f}(t)\, (a_0 + \dots + a_{n+1}\, t^{n+1})\, dt +$$
$$+ \int_{\Gamma_\varepsilon} \tilde{f}(t)\, t^{n+2}\, P_{(n+2)}(t)\, dt.$$

Ahora bien, si llamamos Γ a la frontera de K', la función $\tilde{f}(t)\, t^{n+2}\, P_{(n+2)}(t)$ es integrable sobre Γ, ya que, completándola con el valor 0 en el origen, resulta continua sobre Γ, pues

$$|\tilde{f}(t)\, t^{n+2}\, P_{(n+2)}(t)| = |t|\, \tilde{f}(t)\, t^{n+1}\, P_{(n+2)}(t) \leqslant$$
$$= |t|\, \|\tilde{f}(t)\, t^{n+1}\|\, P_{(n+2)}(t)| = \text{cte.}\, |t|,$$

ya que $|\tilde{f}(t)\, t^{n+1}| <$ Cte., y $|P_{(n+2)}(t)|$ está acotado en Γ, pues es un polinomio. Tiene pues sentido la integral

$$\int_\Gamma f(t)\, t^{n+2}\, P_{(n+2)}(t)\, dt$$

que es un cierto número complejo. Se verifica además que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \tilde{f}(t)\, t^{n+2}\, P_{(n+2)}(t)\, dt = \int_\Gamma \tilde{f}(t)\, t^{n+2}\, P_{(n+2)}(t)\, dt$$

pues

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon - \Gamma} \tilde{f}(t)\, t^{n+2}\, P_{(n+2)}(t)\, dt \right| \leqslant \int_{\Gamma_\varepsilon - \Gamma} |\tilde{f}(t)\, t^{n+2}\, P_{(n+2)}(t)|\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \text{Cte.}\, \varepsilon \operatorname{long}(\Gamma_\varepsilon - \Gamma),$$

que tiende a 0 con ε.

Tendremos entonces:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \tilde{f}(t)\, t^{n+2}\, P_{(n+2)}(t)\, dt = \int_\Gamma \tilde{f}(t)\, t^{n+2}\, P_{(n+2)}(t)\, dt$$

ya que el valor de la primera integral no depende de ε, por el teorema de Cauchy. Así pues,

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \tilde{f}(t)\, P(t)\, dt \right| = |a_0|\, \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \tilde{f}(t)\, dt \right| + |a_1|\, \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \tilde{f}(t)\, t\, dt \right| +$$
$$+ \dots + |a_{n+1}|\, \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \tilde{f}(t)\, t^{n+1}\, dt \right| + \left| \int_\Gamma \tilde{f}(t)\, t^{n+2}\, P_{(n+2)}(t)\, dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant q_{K',\,(n+2)}(P) \cdot C,$$

puesto que

$$| a_0 |, | a_1 |, \ldots, | a_{n+1} |$$

quedan mayorados por $q_{K', (n+2)}$ (P); los números

$$| \int_{\Gamma_\varepsilon} \bar{f}(t)\, d\, t |, \ldots, | \int_{\Gamma_\varepsilon} \bar{f}(t)\, t^{n+1}\, d\, t |$$

son en cantidad finita, y por último

$$| \int_\Gamma \bar{f}(t)\, t^{n+2}\, P_{(n+2)}(t)\, d\, t | \leqslant \int_\Gamma | \bar{f}(t)\, t^{n+1} |\, | t |\, | P_{(n+2)}(t) |\, d\, t \leqslant$$
$$\leqslant \text{Cte.} \cdot \int_\Gamma | t |\, d\, t\, q_{K', (n+2)}(P).$$

Bibliografía

[1] MIRA, J. A. Espacios de funciones halomorfas con desarrollo asintótico. *Rev. R. Acad. Ciencias* (en prensa).
[2] VALDIVIA, M. (1965). Desarrollos asintóticos y familias compactas de funciones holomorfas. *Rev. R. Acad. Ciencias*. Tomo LIX, cuaderno 3, Madrid.

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias de Alicante