UNA GENERALIZACION DEL LEMA DE FARKAS, CON APLICACIONES AL ANALISIS CONVEXO Y A LA PROGRAMACION

M. A. Goberna y J. Pastor

Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Facultad de Matemáticas. Universidad de Valencia

Recibido: 15 octubre 1980

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. SIXTO RÍOS GARCÍA

In this paper we propose a new generalization of Farkas-Lemma for non-homogeneous infinite linear inequality systems in $\mathbb{R}^n$. This result gives rise to other generalizations including some already known. Finally we show the relation between these results and some fields of the Convex Analysis in finite dimensions and the Mathematical Programming.

En este trabajo proponemos una nueva generalización del lema de Farkas para sistemas de infinitas inecuaciones lineales de $\mathbb{R}^n$. Este resultado fundamental permite derivar otras generalizaciones, algunas de las cuales, ya conocidas, se encuentran dispersas en la literatura. Finalmente, ponemos de manifiesto las relaciones entre estos resultados, el análisis convexo y la programación.

Introducción

El clásico lema de Farkas (o de Farkas-Minkowski): «$a' x \geqslant 0$ es consecuencia de $A x \geqslant 0$ si y sólo si a es combinación lineal no negativa de las columnas de A» se puede generalizar en varias direcciones. Obtendremos una nueva a la que, por varias razones, nos referiremos como teorema de Farkas generalizado.

Análisis convexo en $\mathbb{R}^n$

La importancia que el lema de Farkas tiene en la teoría de los sistemas de finitas inecuaciones lineales en $\mathbb{R}^n$ se ve extendida al caso infinito a través de la mencionada generalización. De hecho, se llegan a caracterizar las relaciones consecuentes de un sistema lineal infinito en $\mathbb{R}^n$.

La conocida equivalencia entre el lema de Farkas y la proposición: «Todo cono convexo finitamente generado coincide con su bipolar» puede extenderse también, mediante dicha generalización, al enunciado: «Todo cono convexo es cerrado si y sólo si coincide con su bipolar». Este teorema, que puede demostrarse por otro camino, permite obtener importantes resultados, tales como los teoremas de Stiemke y Tucker (véase [10] y [11]).

Programación

La utilidad del lema de Farkas en la teoría de la Programación Lineal es bien conocida. De hecho, el teorema de dualidad, conjeturado por Von Neumann y probado por Gale, Khun y Tucker (1951), se demostró a partir de dicho lema, siendo válido el teorema recíproco.

Cuando se considera un conjunto infinito de restricciones lineales, se tiene el problema de Programación Semi-Infinita Lineal (PSI):

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & c'\,x \\ \text{s. a.} & a'_t\,x \geqq \beta_t,\ t \in T. \end{array}$$

Ocurre en PSI algo parecido al caso finito; de hecho, hemos demostrado en [5] el teorema de Dualidad Perfecta de [8] a partir de la generalización propuesta (teorema 2) y, como caso particular, el Teorema de Dualidad Extendido de Haar de [3]. Demostramos en este trabajo que este último permite obtener, a su vez, el lema de Farkas Generalizado (corolario 2.1 (i)).

Notación y definiciones

Denotaremos por $\{a'_t\,x \geqslant \beta_t,\ t \in T\}$ un sistema infinito de inecuaciones lineales en $\mathbb{R}^n$.

La relación lineal $a'\,x \geqslant \beta$ será consecuencia del sistema si es satisfecha por toda solución del mismo.

A cada relación $a'\,x \geqslant \beta$ se le asocia, de forma natural, el vector $\begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} \in R^{n+1}$.

Debilitar la relación $a' x \geqslant \beta$ consiste en hacer menor el término independiente. Toda relación debilitada es consecuencia de la inicial.

Un sistema se dice que es consistente si el conjunto de soluciones S es no vacío.

Un sistema consistente es de Farkas-Minkowski si toda relación consecuente del sistema lo es también de un subsistema finito.

Un sistema $\{a'_t x \geqslant \beta_t, t \in T\}$ es canónicamente cerrado si:

1) Existe función α_t: $T \longrightarrow R$, $\alpha_t > 0$ tal que

$$\left\{\alpha_t \begin{bmatrix} a_t \\ \beta_t \end{bmatrix}, t \in T\right\}$$

es compacto, y

2) Existe $x^0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $a'_t x^0 > \beta_t$, para todo $t \in T$.

Dado $B \subset \mathbb{R}^n$, B denotará su clausura, ri B su interior relativo y K (B) el cono convexo generado por B. Por B^* denotamos el conjunto polar de B, i. e. $B^* = \{y \in \mathbb{R}^n / b' y \geqslant 0, b \in B\}$.

Las columnas de una matriz real $m \times n$, A, se denotarán por $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Denotaremos por $\mathbb{R}_+$ el conjunto de los reales no negativos, por $\mathbb{R}$ el de los reales no positivos, y por $\mathbb{R}_+^{(T)}$ el conjunto de las sucesiones finitas generalizadas, formado por aquellos elementos de R_+^T que tienen, a lo más, un número finito de componentes no nulas.

Teorema de Farkas generalizado y consecuencias

TEOREMA 1.—Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cono convexo, y sea $a \notin K$, $a \in \mathbb{R}^n$. Existe un hiperplano $c' x = 0$ tal que: $c' a < 0$ y $c' v \geqq 0$, para todo $v \in K$.

DEMOSTRACIÓN.—Por un conocido teorema de separación, existe un hiperplano $c' x = \delta$ tal que $c' a = \delta$ y $c' v > \delta$, para todo $v \in K$. Se puede probar fácilmente que $\min\limits_{v \in K} c' v \geqq 0$. Por otra parte $0 \in K$, por lo que $\min\limits_{v \in K} c' v = 0$ y $c' 0 = 0 > \delta$. Por lo tanto, $c' x = 0$ es el hiperplano buscado.

TEOREMA 2. «De Farkas Generalizado».—Sea $\{a'_t x \geqq \beta_t, t \in T\}$

un sistema consistente. La relación $a' x \geqq \beta$ es consecuencia del sistema si y sólo si

$$\begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} \in \overline{K} \left\{ \begin{bmatrix} a_t \\ \gamma_t \end{bmatrix}, \gamma_t \leqq \beta_t, t \in T \right\}.$$

DEMOSTRACIÓN.—Llamaremos por comodidad, en lo sucesivo,

$$K_c = K \left\{ \begin{bmatrix} a_t \\ \gamma_t \end{bmatrix}, \gamma_t \leqq \beta_t, t \in T \right\}$$

al cono convexo generado por los vectores asociados a las relaciones que se obtienen por debilitación de las del sistema. Probaremos primero que si $\begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} \in \overline{K}_c$, entonces la relación $a' x \geqq \beta$ es consecuencia del sistema.

Sea

$$\begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} \in \overline{K}_c, \quad \text{i. e.} \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} = \lim_k \begin{bmatrix} b_k \\ \delta_k \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{bmatrix} b_k \\ \delta_k \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{r_k} \lambda_i^k \begin{bmatrix} a^k{}_{t_i} \\ \gamma^k{}_{t_i} \end{bmatrix}, \quad \gamma^k{}_{t_i} \leqq \beta^k{}_{t_i}, \quad \lambda_i^k \geqq 0, \quad i = 1, \ldots, r_k, \quad r_k \in N.$$

Obviamente $b'_k x \geqq \delta_k$ es una relación consecuente del sistema. Por lo tanto, si $x^0 \in S$, entonces $b'_k x^0 \geqq \delta_k$ y, tomando límites, $a' x^0 \geqq \beta$. Esto significa que $a' x \geqq \beta$ es consecuencia del sistema.

Demostraremos el recíproco por reducción al absurdo. Sea $a' x \geqq \beta$ una relación consecuente tal que $\begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} \notin \overline{K}_c$. Por aplicación del teorema 1 existe un hiperplano $\bar{c}' \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = 0$ tal que $\bar{c}' \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} < 0$ y $\bar{c}' \bar{v} \geqq 0$, para todo $\bar{v} \in \overline{K}_c$. Sea $\bar{c} = (c, c_{n+1})$.

Si $c_{n+1} > 0$, eligiendo un γ_t negativo y de módulo suficientemente grande, se tendrá:

$$[c' \; c_{n+1}] \begin{bmatrix} a_t \\ \gamma_t \end{bmatrix} = c' a_t + \gamma_t c_{n+1} < 0.$$

Por lo tanto, $c_{n+1} = 0$ ó $c_{n+1} < 0$. En ambos casos llegaremos a una contradicción.

Supongamos $c_{n+1} = 0$. Entonces $c' a < 0$ y $c' v \geqq 0$, para todo $v \in \overline{K} \{a_t, t \in T\}$. En particular, $c' a_t \geqq 0$, $\forall\, t \in T$.

Sea $x^0 \in S$. Entonces $x^0 + \lambda c \in S$, $\forall\, \lambda \geqq 0$. Pero $x^0 + \lambda c$ no satisface la relación $a' x \geqq \beta$, para λ suficientemente grande, lo que contradice la hipótesis.

Supongamos finalmente $c_{n+1} < 0$. Llamando

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} b \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{|c_{n+1}|} \begin{bmatrix} c \\ c_{n+1} \end{bmatrix},$$

se obtiene:

$$[a', \beta]\, \bar{b} < 0 \quad \text{y} \quad \bar{v}'\, \bar{b} \geqq 0, \quad \text{para todo} \quad \bar{v} \in \overline{K}_c.$$

Hemos llegado a una nueva contradicción.

Corolario 2.1.—Se verifican las siguientes propiedades:

(i) Dado un sistema $\{a'_t\, x \geqq 0,\ t \in T\}$, la relación $a' x \geqq 0$ es consecuencia del sistema si y sólo si $a \in \overline{K} \{a_t, t \in T\}$.

(ii) El cono convexo K es cerrado si y sólo si $K^{**} = K$.

(iii) Dado un cono convexo K, una matriz $m \times n$, A, y un vector $b \in \mathbb{R}^m$, las siguientes sentencias son equivalentes:

(I) Existe sucesión $\{x^r\} \subset K$ tal que $\lim_r A\, x^r = b$, y

(II) $A' y \in K^*$ implica $b' y \geqq 0$.

(iv) La relación $b' x \geqq 0$ es consecuencia del sistema $a'_t\, x \geqq 0$, $t \in T\}$ si y sólo si existe un vector $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\forall\, \varepsilon > 0$ existe al menos un $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$, de manera que

$$\sum_{t \in T} \lambda_t\, a_t - b = \varepsilon\, v.$$

Demostración.—Demostraremos (i) a partir del teorema 2, mientras que las restantes proposiciones se obtendrán como consecuencia de (i).

(i) Por ser el sistema homogéneo, es consistente. Por ello la relación $a' x \geqq 0$ es consecuente si y sólo si

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \in \overline{K} \left\{ \begin{bmatrix} a_t \\ \gamma_t \end{bmatrix}, \gamma_t \leqq 0,\ t \in T \right\} = \bar{K} \{ a_t, t \in T \} \times \mathbb{R}_-.$$

Esto equivale a afirmar que $a \in \overline{K} \{a_t, t \in T\}$.

(ii) Supongamos que $K^{**} = K$. Atribuyendo índices a los elementos de K, sea $K = \{a_t, t \in T\}$. Probaremos que $a \in \overline{K}$ implica $a \in K$, i. e. K es cerrado.

Sea

$$a = \lim_{r} a_{t^r}, \quad t^r \in T, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Desde luego, $x' a_{t^r} \geqq 0$, $\forall x \in K^*$, por lo que $a' x \geqq 0$, $\forall x \in K^*$. Así pues, $a \in K^{**} = K$.

Supongamos ahora que K es cerrado. Probaremos que $K^{**} = \overline{K} = K$. Desde luego $\overline{K} \subset K^{**}$ por lo dicho arriba. Concluiremos probando que $K^{**} \subset \overline{K}$.

Sea $a \in K^{**}$, es decir $a' x \geqq 0$, $\forall x \in K^*$. Pero K^* es el conjunto factible del sistema $\{a'_t x \geqq 0, \ t \in T\}$, por lo que $a' x \geqq 0$ es consecuente y, por (i),

$$a \in \overline{K}\{a_t, t \in T\} = \overline{K}(K) = \overline{K}.$$

(iii) La condición (I) se puede reformular así: $b \in \overline{K}\{Az, z \in K\}$. Esto es consecuencia de que $\{Az, z \in K\}$ es un cono convexo en $\mathbb{R}^m$.

Por (i), la reformulación es, a su vez, equivalente a afirmar que la relación $b' y \geqq 0$ es consecuencia del sistema

$$\{(Az)' y \geqq 0, \quad z \in K\}.$$

Esto significa por la definición de K^*, que se cumple (II).

(iv) La primera parte equivale a decir, por (i), que

$$b \in \overline{K}\{a_t, t \in T\}.$$

Dado

$$\varepsilon > 0, \frac{1}{\varepsilon} b \in \overline{K}\{a_t, t \in T\},$$

por ser un cono. Considerando $v \in \mathrm{ri}\, K\{a_t, t \in T\}$, y por el conocido lema de accesibilidad, se tiene que

$$\frac{\lambda}{\varepsilon} b + (1 - \lambda) v \in \mathrm{ri}\, K\{a_t, t \in T\}, \quad \forall \lambda \in [0, 1[.$$

En particular,

$$\frac{1}{2\varepsilon} b + \frac{1}{2} v \in K\{a_t, t \in T\},$$

por lo que $b + \varepsilon v \in K\{a_t, t \in T\}$.

Recíprocamente, si se cumple la segunda condición, por paso al límite, $b \in \bar{K}\{a_t, t \in T\}$, i. e. se cumple la primera.

La proposición (i) constituye la generalización del lema de Farkas a sistemas infinitos. Una demostración geométrica se encuentra en [9]. El interés de (ii) se ha comentado en la introducción.

La proposición (iii) mejora un resultado de Ben-Israel y Charnes [1] quienes, junto con Kortanek [2] han deducido, a partir de ella, una teoría de la Programación Lineal Infinita; (iv) se debe a Kortanek [8], quien la ha utilizado para elaborar una Teoría de la Dualidad en PSI Lineal.

Cada una de las proposiciones del corolario 2.1 constituye una generalización del lema de Farkas.

COROLARIO 2.2.—Dado un sistema consistente $\{a'_t x \geqq \beta_t, t \in T\}$, las dos condiciones siguientes son suficientes para que el sistema sea de Farkas-Minkowski:

(i) K_c es cerrado.

(ii) El sistema es canónicamente cerrado.

DEMOSTRACIÓN.

(i) Si K_c es cerrado veremos que el sistema es de Farkas-Minkowski.

Sea $a' x \geqq \beta$ una relación consecuente del sistema. Entonces, por el teorema 2, $\begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} \in K_c$, es decir,

$$\begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \begin{bmatrix} a_{t_i} \\ \gamma_{t_i} \end{bmatrix}, \quad \gamma_{t_i} \leqq \beta_{t_i}, \quad t_i \in T, \quad \lambda_i \geqq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

(Se puede tomar $r \leqq n + 1$, por el teorema de Carathéodory.)

Aplicando nuevamente el teorema 2, se concluye que $a' x \geqq \beta$ es consecuencia del subsistema finito

$$\{a'_{t_i} x \geqq \beta_{t_i}, \quad i = 1, \ldots, r\}.$$

Por lo tanto, el sistema es de Farkas-Minkowski.

(ii) El sistema inicial es equivalente al ampliado

$$\{a'_t x \geqq \beta_t,\ t \in T,\ \vec{0}' X \geqq -1\}$$

con la relación trivial. Ahora bien, por hipótesis existe función $\alpha(t)$: $T \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha(t) > 0$ tal que

$$\left\{\alpha(t)\begin{bmatrix} a_t \\ \beta_t \end{bmatrix},\quad t \in T\right\}$$

es compacto. También lo será si se le añade el punto $\begin{bmatrix} \vec{0} \\ -1 \end{bmatrix}$ por lo que

$$K\left\{\begin{bmatrix} a_t \\ \beta_t \end{bmatrix},\quad t \in T, \begin{bmatrix} \vec{0} \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

es el cono generado por un compacto, existiendo además un punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$a'_t x^0 > \beta_t,\quad \vec{0}' x^0 > -1.$$

Por un conocido resultado sobre conos ([7], pág. 203),

$$K\left\{\begin{bmatrix} a_t \\ \beta_t \end{bmatrix},\quad t \in T, \begin{bmatrix} \vec{0} \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

es cerrado, y por (i) el sistema ampliado es de Farkas-Minkowski, por lo que también lo es el dado, como puede observarse fácilmente.

Cuando se aplica la condición (i) a un sistema que contiene una relación trivial $\vec{0}' x \geqq \alpha$, $\alpha < 0$, se puede sustituir por esta otra:

$$K\left\{\begin{bmatrix} a_t \\ \beta_t \end{bmatrix},\quad t \in T\right\} \quad \text{es cerrado.}$$

Esta última condición es suficiente en general [4], lo que también se puede demostrar mediante el teorema 2.

La suficiencia de (ii) fue establecida por Haar [6], y constituye la primera generalización conocida del lema de Farkas.

Una demostración alternativa del importante lema de Farkas Generalizado (corolario 2.1 (i)) se obtiene a partir del Teorema de Dualidad de Haar en PSI Lineal.

Consideremos el siguiente par de problemas:

Primal (P)	*Dual (D)*
Min $c' x$	Max $\sum_{t \in T} \lambda_t \beta_t$
s. a. $a'_t x \geqq \beta_t$, $t \in T$	s. a. $\sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$.

Supondremos que, si (P) es consistente, el sistema

$$\{a'_t x \geqq \beta_t, \ t \in T\}$$

es de Farkas-Minkowski.

El citado teorema establece que si (P) es consistente, entonces lo es (D), y además inf (P) = máx (D).

DEMOSTRACIÓN ALTERNATIVA DEL COROLARIO 2.1 (i).—Probaremos que, si $a' x \geqq 0$ es consecuencia de $\{a'_t x \geqq 0, \ t \in T\}$, entonces

$$a \in \overline{K}\{a_t, \ t \in T\} = \overline{K}.$$

(el recíproco es inmediato). Consideremos para ello el siguiente par de problemas:

$$(P) \ \text{Min } a' x \qquad \text{y} \qquad (D) \ \text{Max } 0$$

$$\text{s. a. } v' x \geqq 0, \ v \in \overline{K} \qquad\qquad \text{s. a. } \sum_{v \in \overline{K}} \lambda_v \cdot v = a, \ \lambda \in \mathbb{R}_+^{(\overline{K})}$$

Se observa que las restricciones de (P) forman un sistema de Farkas-Minkowski (corolario 2.2 (i)), ya que $K_c = \overline{K} \times R_-$. Además $a' x \geqq 0$ es también consecuente del siguiente sistema, que es equivalente al inicial: $\{v' x \geqq 0, \ v \in \overline{K}\}$. Por ello, $a' x \geqq 0$ para las soluciones factibles de (P). De aquí se sigue que inf $a' x = 0$, ya que $\vec{0}$ es factible. Aplicando el Teorema de Dualidad, (D) es consistente, y existe $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{(\overline{K})}$ tal que:

$$a = \sum_{v \in \overline{K}} \overline{\lambda}_v \cdot v \in K(\overline{K}) = \overline{K}.$$

Referencias

[1] BEN ISRAEL, A. y CHARNES, A. (1968). On the Intersections of Cones and Subspaces. *Bull. Am. Math. Soc.*, 74.

[2] BEN ISRAEL, A., CHARNES, A. y KORTANEK, K. O. (1969). Duality and Asymptotic Solvability over Cones. *Bull. Am. Math. Soc.*, 75.

[3] CHARNES, A., COOPER, W. W. y KORTANEK, K. O. (1963). Duality in Semi-Infinite Programs and some Works of Haar and Carathéodory. *Man. Science*, 9.

[4] GLASHOFF, K. (1979). Duality Theory of Semi-Infinite Programming. In Semi-Infinite Programming, ed. by R. Hettich. Lecture Notes in Control and Information Science No. 15. Springer-Verlag.

[5] GOBERNA, M. A., LÓPEZ, M. A. y PASTOR, J. Farkas-Minkowski systems in Semi-Infinite Programming. To appear in Applied Mathematics and Optimization.

[6] HAAR, A. (1924). Über lineare Ungleichungen. *Acta Math.* (Szeged), 2.

[7] HESTENESS, M. R. (1975). Optimization Theory. The Finite Dimensional Case. Wiley Interscience.

[8] KORTANEK, K. O. (1977). Constructing a Perfect Duality in Infinite Programming. *Applied Math. and Opt.*, Vol. 3, No. 4.

[9] KUN, I. (1975). A geometrical approach to the Theory of Linear Inequalities. IX Symposium on Math. Programming, Budapest.

[10] NIKAIDO, H. (1968). Convex Structures and Economic Theory. Academic Press.

[11] ROCKAFELLAR, R. T. (1970). Convex Analysis. Princenton Univ. Press.

Key words: Farkas-lemma, Haar's duality, infinite linear systems, consequence relations, Farkas-Minkowski systems.