SOBRE SUMABILIDAD CESARO EN EL ESPACIO CS (I)

Miguel Florencio Lora y Pedro Pérez Carreras (*)

Recibido: 4 junio 1980

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

The authors give some properties of the convergence of the sections of elements of the sequence space CS of all those sequences which are summable in the sense of Cesáro.

1. Resultados previos

Dada una sucesión $x = (x_n)$ de escalares, escribimos

$$S_n(x) = x_1 + \dots + x_n \quad \text{y} \quad Z_n(x) = S_1(x) + \dots + S_n(x)/n, \quad n = 1, 2, \dots$$

La sucesión x se dice sumable en el sentido de Cesáro o C-sumable si converge la sucesión $(Z_n(x))$ y llamamos suma en el sentido de Cesáro o C-suma al límite (si existe) de esta sucesión que es denotado mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \,(C)$$

o bien $Z(x)$. Es bien conocido que si (x_n) y (y_n) son C-sumables y si b es un escalar, entonces $(x_n + y_n)$ y $(b \cdot x_n)$ son C-sumables. También es cierto que

$$\sum_{n=k}^{\infty} x_n \,(C) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \,(C) - S_{k-1}(x).$$

(*) Este trabajo ha sido realizado en el Departamento de Matemáticas de la E. S. I. I. de Sevilla, que dirige el profesor Dr. P. Pérez Carreras.

El siguiente resultado será utilizado en lo que sigue: a) para que una transformación lineal $T = (c_{m,n})$ sea regular es necesario y suficiente el que

$$\text{(i)} \qquad \sum_n |c_{m,n}| < H$$

con H independiente de m

$$\text{(ii)} \qquad \lim_m c_{m,n} = 0$$

para cada n

$$\lim_m \sum_n c_{m,n} = 1$$

LEMA 1.—Sea a el C-límite de la sucesión (a_n) y sea la sucesión

$$(t_k) \quad \text{con} \quad t_k = 2 \, . \, (a_1 + 2\,a_2 + \ldots + k\,a_k) / k^2.$$

Entonces, $\lim_k t_k = a$. En particular, si la sucesión (b_n) converge a a, entonces

$$\lim_n \left(\frac{(b_1 - a_1) + \ldots + n\,(b_n - a_n)}{n^2} \right) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea

$$\beta_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \, .$$

Entonces,

$$t_k = 2 \, . \left\{ - \frac{1}{k^2}\,\beta_1 - \frac{2}{k^2}\,\beta_2 - \ldots - \frac{k-1}{k^2}\,\beta_{k-1} + \beta_k \right\}, \qquad k = 1, 2, \ldots \, .$$

En efecto, sea

$$A_h = a_1 + \ldots + a_h \, , \quad h = 1, 2, \ldots$$

y consideremos la diferencia

$$k A_k - (A_1 + \ldots + A_{k-1})$$

que es

$$a_1 + 2 a_2 + \ldots + k a_k ,$$

así,

$$\frac{1}{2} t_k = \frac{-A_1 - A_2 - \ldots - A_{k-1} + k A_k}{k^2} = -$$

$$= - \frac{1}{k^2} \cdot \frac{A_1}{1} - \frac{2}{k^2} \cdot \frac{A_2}{2} - \ldots - \frac{k-1}{k^2} \cdot \frac{A_{k-1}}{k-1} + \frac{A_k}{k}$$

que implica lo deseado. Consideremos la transformación lineal que asocia a cada sucesión (x_n) la sucesión

$$\left(2\left(-\frac{1}{n^2} x_1 - \frac{2}{n^2} x_2 - \ldots - \frac{n-1}{n^2} x_{n-1} + x_n\right)\right) .$$

El lema quedará demostrado si probamos que tal transformación es regular, para lo que aplicaremos el resultado a). En efecto, como

$$c_{k,n} = \begin{cases} -2n/k^2 & \text{si} \quad n < k \\ 2 & \text{si} \quad n = k \\ 0 & \text{si} \quad n > k \end{cases} ,$$

siendo la transformación considerada $(c_{k,n})$, es claro que:

(i)

$$\sum_n |c_{k,n}| = [(k-1) \cdot k / k^2] + 2 < 3$$

(ii) Fijado n y si $k > n$, entonces

$$\lim_k c_{k,n} = \lim_k - 2n/k^2 = 0$$

(iii)

$$\sum_n c_{k,n} = 2.\,(1-(k-1)/2\,k) \quad \text{luego} \quad \lim_k \sum_n c_{k,n} = 1$$

q. e. d.

LEMA 2.—Sea $x = (x_n)$ una sucesión C-sumable y sea a su suma. Entonces, la sucesión

$$\left(\sum_{n=k}^{\infty} x_n\ (\mathrm{C})\right), \quad k = 1, 2, \ldots ,$$

C-converge a cero.

DEMOSTRACIÓN.—Es inmediata, si se tiene en cuenta que

$$y_k = \sum_{n=k}^{\infty} x_n\ (\mathrm{C})$$

se puede escribir como $a - S_{k-1}(x)$ y que

$$|\,y_1 + \ldots + y_k / k\,| = \left|\frac{(a + (a - S_1(x)) + \ldots + (a - S_{k-1}(x)))}{k}\right| =$$

$$= \left|\frac{k-1}{k} \cdot Z_{k-1}(x) - Z(x)\right|$$

q. e. d.

2. Convergencia seccional en CS

Sea w el espacio vectorial de todas las sucesiones de escalares y sea CS el subespacio de w de todas aquellas sucesiones que son C-sumables. Es claro que CS contiene propiamente al espacio de todas las sucesiones sumables en el sentido ordinario y, por lo tanto, a l^1. Si proveemos a CS de la norma definida mediante

$$\|x\| = \sup_n |\,Z_n(x)\,| ,$$

resulta obvio que la aplicación F: CS $\longrightarrow c$, definida mediante

$$F(x) = (Z_n(x)),$$

es un isomorfismo isométrico sobre c, espacio de Banach de todas las sucesiones convergentes. Como la familia de vectores e, e_1, e_2, ... forman una base topológica de c, siendo $e = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$, entonces la familia $a_0 = (1, 0, 0, \ldots)$ y $a_n = (0, \ldots, 0, n, -2n, n, 0, \ldots)$ con $n = 1, 2, \ldots$, forman una base topológica de CS. Sea x un elemento de CS y sea $X_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ la n-sección del elemento x. La sucesión (X_n) no converge en general a x en CS: basta considerar $x = ((-1)^n)$ y observar que

$$X_k - X_{k-1} = (-1)^k e_k$$

tiene norma unidad. Si extendemos el concepto de C-convergencia y C-sumabilidad a un espacio de Banach de la forma natural, probaremos que (X_n) C-converge al elemento x, del que provienen, en CS. Sea $x = (x_n)$ un elemento de CS y llamemos $B_n(x)$ a la media

$$X_1 + \ldots + X_n / n = \left(x_1, \frac{n-1}{n} \cdot x_2, \ldots, \frac{1}{n} \cdot x_n, 0, 0, \ldots \right).$$

PROPOSICIÓN 1.—La sucesión (X_n) de las secciones de un elemento $x = (x_n)$ del espacio CS convergen, en el sentido de Cesáro, a x.

DEMOSTRACIÓN.—Como

$$\| x - B_n(x) \| = \sup_k \mid Z_k(x - B_n(x)) \mid = \sup_k \mid Z_k(x) - Z_k(B_n(x)) \mid$$

probaremos que, dado $\varepsilon > 0$, existe un natural n_0 tal que

$$\sup_k \mid Z_k(x) - Z_k(B_n(x)) \mid < 3\varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqq n_0 .$$

Como la sucesión $(Z_k(x))$ converge a $Z(x)$, existe un natural k_1 tal que si $k \geqslant k_1$ entonces

$$\mid Z_k(x) - Z(x) \mid < \varepsilon.$$

Probemos, de momento, que existen naturales n_1 y k_0 tales que

$$|Z(x) - Z_k(B_n(x))| < 2\varepsilon \quad \text{si} \quad n \geq n_1 \quad \text{y} \quad k \geq k_0 .$$

En efecto, como

$$S_h(B_n(x)) = x_1 + \frac{n-1}{n} x_2 + \ldots + \frac{n-h+1}{n} x_h \quad \text{si} \quad h \leq n$$

y como

$$S_h(B_n(x)) = x_1 + \frac{n-1}{n} x_2 + \ldots + \frac{1}{n} x_n = Z_n(x) \quad \text{si} \quad h \geq n$$

tenemos que:

(i)

$$S_h(B_n(x)) - S_h(x) = \sum_{i=1}^{h} \frac{n-i+1}{n} x_i - \sum_{i=1}^{h} x_i = - \sum_{i=1}^{h} \frac{i-1}{n} x_i$$

(ii)

$$S_h(x) - Z_h(x) = \sum_{i=1}^{h} x_i - \sum_{i=1}^{h} \frac{h-i+1}{h} x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{h} \frac{i-1}{h} x_i = \frac{n}{h} \sum_{i=1}^{h} \frac{i-1}{n} x_i$$

luego de (i) y (ii) se sigue que

$$S_h(B_n(x)) - S_h(x) = \frac{-h}{n} \{ S_h(x) - Z_n(x) \}$$

si $h < n$. Sea

$$y_k = \sum_{n=k}^{\infty} x_n \ (C).$$

Utilizando el lema 2, existirá un natural k_2 tal que

$$\left| \frac{y_2 + y_3 + \ldots + y_k}{k - 1} \right| < \varepsilon / 2 \quad \text{si} \quad k \geq k_2 .$$

Como x pertenece a CS, tenemos que $(S_k(x))$ C-converge a $Z(x)$ y $(Z_k(x))$ converge a $Z(x)$ en el sentido ordinario; luego, aplicando el lema 1, tenemos que existe un natural k_3 tal que

$$\left| \frac{(S_1(x) - Z_1(x)) + 2(S_2(x) - Z_2(x)) + \ldots + k(S_k(x) - Z_k(x))}{k^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

si $k \geqslant k_3$. Tomemos $k_0 = \max(k_1, k_2, k_3)$ y $n_1 = k_0 + 1$. Estudiemos $| Z_k(B_n(x)) - Z(x) |$ separando los casos $k < n$ y $k \geqslant n$. Si $k < n$,

$$| Z_k(B_n(x)) - Z(x) | = \left| \frac{S_1(B_n(x)) + \ldots + S_k(B_n(x))}{k} - Z(x) \right| =$$

$$= \left| \frac{(S_1(B_n(x)) - x_1) + \left(S_2(B_n(x)) - \sum_{i=1}^{2} x_i \right) + \ldots + \left(S_k(B_n(x)) - \sum_{i=1}^{k} x_i \right)}{k} - \right.$$

$$\left. - \frac{y_2 + y_3 + \ldots + y_{k+1}}{k} \right| \leq \left| \frac{\frac{1}{n}(S_1(x) - Z_1(x)) + \ldots + \frac{k}{n}(S_k(x) - Z_k(x))}{k} \right| +$$

$$+ \left| \frac{y_2 + \ldots + y_{k+1}}{k} \right| < \left| \frac{(S_1(x) - Z_1(x)) + \ldots + k(S_k(x) - Z_k(x))}{k^2} \right| +$$

$$+ \left| \frac{y_2 + \ldots + y_{k+1}}{k} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

si $k \geqslant k_0$. Tomemos ahora $k \geqslant n$. Entonces,

$$| Z_k(B_n(x)) - Z(x) | =$$

$$= \left| \frac{S_1(B_n(x)) + \ldots + S_{n-1}(B_n(x)) + S_n(B_n(x)) + \ldots + S_k(B_n(x))}{k} - Z(x) \right| =$$

$$= \left| \frac{S_1(B_n(x)) + \ldots + S_{n-1}(B_n(x))}{k} + \frac{(k - n + 1) Z_n(x)}{k} - \frac{k Z(x)}{k} \right| =$$

$$=\left|\frac{(S_1(B_n(x))-S_1(x))+\ldots+(S_{n-1}(B_n(x))-S_{n-1}(x))}{k}-\frac{y_2+y_3+\ldots+y_n}{k}+\right.$$

$$\left.+\frac{(k-n+1)(Z_n(x)-Z(x))}{k}\right|\leq$$

$$\leq\left|\frac{\frac{1}{n}(S_1(x)-Z_1(x))+\ldots+\frac{n-1}{n}(S_{n-1}(x)-Z_{n-1}(x))}{k}\right|+$$

$$+\left|\frac{y_2+\ldots+y_n}{k}\right|+\frac{k-n+1}{k}\,|Z_n(x)-Z(x)|<$$

$$<\left|\frac{(S_1(x)-Z_1(x))+\ldots+(n-1)(S_{n-1}(x)-Z_{n-1}(x))}{(n-1)^2}\right|+\left|\frac{y_2+y_3+\ldots+y_n}{n}\right|+$$

$$+|Z_n(x)-Z(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon=2\varepsilon$$

si $n \geqslant n_1$. Por lo tanto, si $n \geqslant n_1$ se tiene que

$$|Z_k(x)-Z_k(B_n(x))|\leq|Z_k(x)-Z(x)|+|Z(x)-Z_k(P_n(x))|<\varepsilon+2\varepsilon=3\varepsilon$$

para $k \geqslant k_0$ y, por lo tanto,

$$\sup_{k\geq k_0}|Z_k(x)-Z_k(B_n(x))|\leq 3\varepsilon.$$

Sea $k \in \{1, 2, \ldots, k_0-1\}$. Sea $n \geqslant n_1 \geqslant k_0 > k$. Entonces, existen naturales $p_1, p_2, \ldots, p_{k_0-1}$ tales que si $n \geqslant p_k$, entonces

$$|Z_k(x)-Z_k(B_n(x))|=|Z_k(x-B_n(x))|=$$

$$=\left|Z_k\left(\left(0,\frac{1}{n}x_2,\frac{2}{n}x_3,\ldots,\frac{n-1}{n}x_n,x_{n+1},\ldots\right)\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{(k-1)\frac{1}{n}x_2+(k-2)\frac{2}{n}x_3+\ldots+2\frac{k-2}{n}x_{k-1}+\frac{k-1}{n}x_k}{k}\right|=$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\left|\frac{(k-1)x_2+(k-2)2x_3+\ldots+2(k-2)x_{k-1}+(k-1)x_k}{k}\right|<\varepsilon$$

Llamando n_0 al máximo de $n_1, p_1, \ldots, p_{k_0-1}$ tenemos que

$$\sup_k|Z_k(x)-Z_k(B_n(x))|<3\varepsilon$$

para $n \geqslant n_0$, q. e. d.

COROLARIO 1.1.—Los vectores unitarios e_n, $n = 1, 2, \ldots$ constituyen una C-base ([6], p. 46) del espacio CS, pero no una base de Schauder.

DEMOSTRACIÓN.—Debido a la proposición 1, todo elemento x de CS, $x = (x_n)$, admite la representación

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \ (C)$$

por lo que basta con demostrar la unicidad de tal representación. Si x se pudiera escribir como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \ (C),$$

como la sucesión

$$\left(\left(a_1, \frac{n-1}{n} a_2, \ldots, \frac{1}{n} a_n, \ldots\right)\right)$$

converge a x en CS y como la inyección CS $\hookrightarrow w$ es continua, la sucesión de escalares $[(n - i + 1)/n] \cdot a_i$ converge a x_i para cada i, luego $a_i = x_i$, $i = 1, 2, \ldots$ El elemento $x = ((-1)^n)$ no puede representarse como

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n .$$

q. e. d.

NOTA.—A todo espacio de Banach que posea una C-base se le puede asociar un espacio de Banach de sucesiones isomorfo a él (la prueba puede discurrir como en [3], p. 48) y siguiendo un proceso estándar se llega a una extensión del teorema de Schauder y a probar que todo espacio de Banach con C-base tiene la propiedad de aproximación acotada. Es obvio que toda base de Schauder en un espacio de Banach es una C-base. El siguiente problema, del que no conocemos su solución, parece de interés: Sea E un espacio de Banach con C-base. ¿Es cierto que E posee una base de Schauder?

En lo que sigue daremos algunas aplicaciones del corolario 1.1.

PROPOSICIÓN 2.—El dual de CS es el espacio vectorial L de todas aquellas sucesiones de escalares (u_n) tales que $(x_n u_n)$ es C-sumable para cada $x = (x_n)$ de CS.

DEMOSTRACIÓN.—Sea E el dual de CS. Debido a dos resultados de I. Schur [1], p. 248 y Bosanquet [2], L puede ser identificado con el espacio de las sucesiones (u_n) convergentes tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \mid \Delta^2 u_n \mid$$

es finito. Sea T la aplicación lineal de E en L, definida mediante $T(f) = (f(e_n))$. La aplicación T está bien definida; en efecto, dado x de CS, la proposición 1 asegura que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \, (C)$$

siendo $x = (x_n)$. Como

$$\left(\sum_{n=1}^{k} x_n e_n \right)$$

C-converge a x en CS y como f es una aplicación lineal sobre CS, se sigue que

$$\left(f \left(\sum_{n=1}^{k} x_n e_n \right) \right)$$

C-converge a $f(x)$, es decir, $(f(e_n))$ pertenece a L. Es claro que T es inyectiva. T es una aplicación sobre: Sea $u = (u_n)$ un elemento de L; así, (u_n) converge a un cierto

$$u^{\wedge} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \mid \Delta^2 u_n \mid < \infty$$

Como para cada $x = (x_n)$ de CS se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n u_n (C) = u^{\wedge} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n (C) + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n (x) n \cdot \Delta^2 u_n ,$$

en donde la última serie converge absolutamente, construimos la forma lineal sobre CS

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n (C)$$

que es tal que T $(f) = u$ y tal que es continua:

$$|f(x)| = \left| u^{\wedge} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n (C) + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n (x) n \cdot \Delta^2 u_n \right| \leq$$

$$\leq |u^{\wedge}| \cdot |Z(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |Z_n(x)| n |\Delta^2 u_n| = \left\{ |u^{\wedge}| + \sum_{n=1}^{\infty} n |\Delta^2 u_n| \right\} \cdot \|x\|$$

q. e. d.

Proposición 3.—El espacio L dotado de la norma

$$\|(u_n)\| = |u^{\wedge}| + \sum_{n=1}^{\infty} n |\Delta^2 u_n|$$

es el dual fuerte de CS.

Demostración.—No es difícil ver que $\| (u_n) \|$ se trata efectivamente de una norma. Definamos

$$\| f \|' = \sup \{ | f(x) | : x \in B \}$$

siendo f un elemento de L y siendo B la bola unidad cerrada de CS. De la proposición anterior se deduce que $\| f \|' \leqslant \| f \|$ para cada $f = (f_n)$ de L. Probaremos que $\| u \| \leqslant 2 \cdot \| u \|'$ para cada $u = (u_n)$ de L. Consideremos para cada natural k el vector $x^k = (x^k{}_n)$ definido mediante las siguientes expresiones, en donde sig (a) significa el signo de a en el caso real y $\bar{a}/|a|$ si $a \neq 0$ y 0 si $a = 0$, en el caso complejo.

$$x_1^k = \operatorname{sig} \Delta^2 u_1 ; \quad x_2^k = 2 \operatorname{sig} \Delta^2 u_2 - 2 \operatorname{sig} \Delta^2 u_1 ; \ldots \quad x_n^k = n \operatorname{sig} \Delta^2 u_n -$$

$$- 2(n-1) \operatorname{sig} \Delta^2 u_{n-1} + (n-2) \operatorname{sig} \Delta^2 u_{n-2} \quad \text{si} \quad 3 \leq n \leq k ;$$

$$x_{k+1}^k = -2k \operatorname{sig} \Delta^2 u_k + (k-1) \operatorname{sig} \Delta^2 u_{k-1} ; \quad x_{k+2}^k = k \operatorname{sig} \Delta^2 u_k ;$$

$$x_n^k = 0 \quad \text{si} \quad n > k+2$$

es claro que x^k pertenece a CS y que $\| x^k \| = 1$. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^k u_n = u^\wedge \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k (C) + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n (x^k) n \Delta^2 u_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\overline{\Delta^2 u_n}}{|\Delta^2 u_n|} \cdot \Delta^2 u_n$$

y como $\| x^k \| = 1$ se sigue que, para todo k,

$$\sum_{n=1}^{k} n \, | \Delta^2 \cdot u_n | \leq \| u \|' .$$

Como $u_n = u(e_n)$ y $\| e_n \| = 1$, tenemos que $| u_n | \leqslant \| u \|'$ por lo que $| u^\wedge | \leqslant \| u \|'$ por lo que

$$\| u \| = | u^\wedge + \sum_{n=1}^{\infty} n \, | \Delta^2 u_n | \leq 2 \, \| u \|' .$$

Nota.—(a) El corolario 1.1 permite caracterizar los compactos del espacio CS, lo que permite construir ciertos espacios de Schwartz a base de límites proyectivos de espacios transformados diagonales de CS. Este es el objeto de [5].

(b) Sea E un espacio de sucesiones que contiene a φ. Se define el C-dual, E^C, de E como aquel espacio de sucesiones $\{u = (u_n) : (u_n x_n)$ es C-sumable para todo $x = (x_n)$ de E$\}$. La pareja de espacios de Banach (CS, L) juegan en el estudio de la C-dualidad un papel similar al jugado por la pareja (l^1, l^∞) en el estudio de la α-dualidad de Köthe. En [4] se hace este estudio.

Referencias

[1] HARDY, G. H. (1973). Divergent Series, Oxford U. P.

[2] BOSANQUET, L. S. (1945). Note on convergence and summability factors. *J. London Math. Soc.*, **20**, 39-48.

[3] ROLEWICZ, S. (1972). *Metric Linear Spaces*, PWN, Warszawa.

[4] FLORENCIO, M. (1981). Sobre C-dualidad y espacios C-perfectos. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid*, **75**, 1221-1234.

[5] FLORENCIO, M. y PÉREZ CARRERAS, P. Sobre Sumabilidad Cesàro en el espacio CS (II). (Pendiente de publicación.)

[6] MARTI, J. T. (1969). Introduction to the theory of bases. Springer.