SOBRE EL COMPORTAMIENTO DE LAS SOLUCIONES DE CIERTOS PROBLEMAS PARABOLICOS NO LINEALES

M. A. Herrero

Recibido: 21 febrero 1980

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. ALBERTO DOU MASDEXEXÁS

Let (P) be the following problem:

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} u_t - \Delta_p u + \beta(u) = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^N x (0, T) \\ u(0) = u_0(x) & \text{in} \quad \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Where $N \geqslant 1$, $0 < T \leqslant +\infty$, β is a continuous, non decreasing function such that $\beta(0) = 0$, and:

$$\Delta_p u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \quad 1 < p < +\infty$$

We say that problem (P) has the instantaneous shrinking of the support property (I. S. S.) if, for $u_0(x) \neq 0$ $a \cdot e$ in $\mathbb{R}^N$, the corresponding solution of (P) has compact support in x for each $t > 0$. We say that problem (P) has a finite extinction time (F. E. T.) if there is $t_0 > 0$ such that $u(x, t) = 0$ $a \cdot e$ for $t \geqslant t_0$, $u(x, t)$ being the solution of (P).

In this paper we give some conditions for obtaining (I. S. S.) and (F. E. T.) properties for problem (P). Our main result (Theorem 2.1) asserts, for non-negative initial data $u_0(x)$, that both properties hold provided that the following hypothesis are satisfied:

$$(\mathrm{H1}) \quad \int_0^1 \frac{ds}{(s\,\beta(s))^{1/p}} < +\infty$$

$$(\mathrm{H2}) \quad \int_0^1 \frac{ds}{\beta(s)} < +\infty$$

$$(\mathrm{H3}) \quad \begin{cases} u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \\ u_0(x) \to 0 \quad \text{uniformly when} \quad |x| \to \infty \end{cases}$$

We exhibit also some counteraxamples when the conditions listed above are removed.

0. Introducción

Es un hecho bien conocido que las soluciones de problemas asociados a ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden no lineales poseen propiedades muy diferentes de las correspondientes al caso lineal. Por ejemplo, es sabido (cf. [10], [14]) que las soluciones del problema:

$$(P_*)\begin{cases} u_t - \Delta u + \beta(u) = 0 & \text{en} \quad \mathbb{R}^N \times (0, T) \\ u(0) = u_0(x) & \text{en} \quad \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Donde $\beta(s)$ es una función no lineal, continua, no decreciente, con $\beta(0) = 0$ y un cierto comportamiento en el origen (cf. [14], (2.9), son tales que se cumple la condición de propagación finita (P. F.), donde (P. F.) significa lo siguiente: Si $u_0(x)$ es una función que se anula fuera de un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$, la solución del problema considerado se anula, para cada $t > 0$, fuera de un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$, que en general depende de t. Más aún, en [10] (y en [14] por otros medios) fue puesto de manifiesto un resultado más fuerte: Si $u_0(x)$ no tiene soporte compacto, pero satisface cierta condición de decrecimiento en el infinito (cf. [14], (2.8), y β satisface las condiciones anteriormente mencionadas, la solución $u(x, t)$ tiene soporte compacto en x para cada t. Aparece así el fenómeno de contracción instantánea del soporte («instantaneous shrinking of the support», (I. S. S.)), directamente relacionado con el carácter no lineal del problema. De hecho se tiene también el fenómeno de la existencia de un tiempo finito de extinción («finite extinction time», (F. E. T.)): existe un $t_0 > 0$ tal que $u(x, t)$ se anula para $t \geqslant t_0$.

La propiedad (P. F.) aparece frecuentemente en la literatura relacionada principalmente (pero no en exclusiva) con problemas de difusión en medios porosos (cf. [17], [8], [4], [10], [12], [14], [13], ...). Ejemplos de (F. E. T.) pueden encontrarse en [17], [10], [14], [11]. Por otra parte (I. S. S.) no ha sido estudiada tan intensamente: los únicos resultados previos que conocemos son [10], [14].

Nuestro objetivo en este trabajo es estudiar (I. S. S.) y (F. E. T.) para el problema:

$$(P)\begin{cases} u_t - \Delta_p n + \beta(u) = 0 & \text{en} \quad \mathbb{R}^N \times (0, T) \\ u(0) = u_0(x) & \text{en} \quad \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Donde:

$$\Delta_p u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \quad N \geq 1, \quad 1 < p < +\infty$$

β continua no decreciente con $\beta(0) = 0$

El caso $p = 2$ ha sido estudiado en [10], [14]. Consideraremos también en particular el problema no perturbado correspondiente a $\beta \equiv 0$

$$(P^*) \left\{ \begin{array}{lll} u_t - \Delta_p u = 0 & \text{en} & \mathbb{R}^N \times (0, T) \\ u(0) = u_0(x) & \text{en} & \mathbb{R}^N \end{array} \right.$$

El operador $\Delta_p u$ es un operador modelo, obtenido por una modificación «natural» no lineal de Δu, que ha sido ampliamente considerado en la literatura (cf. [16], [1], [13], [17], [19]). En dimensión espacial $N = 1$ es un modelo útil para el estudio de fluidos no newtonianos ([20], [21]).

Un comentario sobre terminología. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 1)$, con frontera $\partial\Omega$. Denotaremos, como es usual, $L^p(\Omega)$, $W^{1,p}(\Omega)$ respectivamente los espacios de (clases de) funciones p-integrables y de (clases de) funciones de $L^p(\Omega)$ con derivadas generalizadas de primer orden en $L^p(\Omega)$. Si $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L^p(\Omega)$, $W^{1,p}(\Omega)$ son espacios de Banach con las normas usuales (ver p. ej. [16]). Representaremos por $W_0^{1,p}(\Omega)$ el cierre en la norma de $W^{1,p}(\Omega)$ del conjunto de las funciones indefinidamente derivables en Ω con soporte compacto en Ω (todas las funciones a las que se hace referencia en este trabajo son reales). Como es usual, $W^{1,p'}(\Omega)$ representa el dual (fuerte) de $W_0^{1,p}(\Omega)$, siendo

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Sea ahora V un espacio de Banach con norma $\| \; \|$. Escribiremos $L^p(0, T : V)$ para representar el conjunto de las aplicaciones medibles $f\,(0, T) \longrightarrow V$ tales que

$$\int_0^T \|f(s)\|^p \, ds < +\infty .$$

$L^p(0, T; V)$ es también un espacio de Banach para la norma (ver [6] para más detalles):

$$|||f||| = \left(\int_0^T \|f(s)\|^p \, ds \right)^{1/p}$$

Por otra parte, diremos que una propiedad se verifica casi para todo punto en Ω (ctp Ω), si se satisface en todo Ω salvo a lo sumo en un conjunto de medida nula.

Nos referiremos con frecuencia en este trabajo a una clase de operadores, llamados subdiferenciales, que pueden considerarse como gradientes generalizados de funciones convexas (cf. [7]). Por comodidad, repetimos aquí la definición: Sea H un espacio de Hilbert real, con producto interior $(,)$. Sea ϕ una función de H en $(-\infty, +\infty]$ convexa y semicontinua inferiormente (s. c. i.). Supongamos que $\phi \not\equiv +\infty$. Sea $D(\phi)$ definido así:

$$D(\phi) = \{ u \in H : \phi(u) < +\infty \}.$$

Si $u \in D(\phi)$, llamaremos subdiferencial de ϕ en u al conjunto:

$$\partial \phi(u) = \{ f \in H : \phi(v) - \phi(u) \geqslant (f, v-u), \quad \forall v \in D(\phi) \}.$$

Cuando ϕ es diferenciable Gâteaux, $\partial \phi(u)$ (que es cerrado, convexo y posiblemente vacío) se reduce a un solo elemento y coincide con la diferencial Gâteaux. Nótese que $D(\partial \phi) \subset D(\phi)$.

Una propiedad esencial de las subdiferenciales es la siguiente: $\partial \phi(u)$ es un operador maximal monótono en H. Esto significa que:

— $\forall v_1 \in D(\partial \phi(u_1))$, $\forall v_2 \in D(\partial \phi(u_2))$, $(v_1 - v_2, u_1 - u_2) \geqslant 0$ (monotonía).

— El rango de $I + \partial \phi$, donde I es el operador identidad, es todo H (maximalidad).

Procederemos a continuación del siguiente modo: En primer lugar (sección 1), estableceremos algunos resultados preliminares concernientes a los problemas aquí considerados. A continuación (sección 2), mostraremos los resultados principales de este trabajo, relativos a las propiedades (I. S. S.) y (F. E. T.). Finalmente (sección 3), reseñaremos algunos contraejemplos, cuando se alteran las hipótesis del teorema principal, de los que deduciremos, entre otras cosas, la inexistencia de (I. S. S.) para el problema (P*).

El autor está muy reconocido al profesor H. Brézis, quien propuso las cuestiones aquí estudiadas, que son una parte de su tesis doctoral en la Universidad de Madrid. Asimismo agradece a J. I. Díaz y J. L. Vázquez sus comentarios sobre el manuscrito y a L. C. Evans por haber suministrado material no publicado.

1. Resultados preliminares

Recopilamos aquí ciertos resultados (algunos conocidos) que serán de utilidad en lo que sigue.

PROPOSICIÓN 1.1.—Sea j función convexa s. c. i. de $\mathbb{R}$ en $(-\infty, \infty)$. Sea $j \not\equiv +\infty$, j diferenciable y tal que $j'(s) = \beta(s)$. Se define:

$$\phi(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} j(u)\, dx & \text{si } u \in L^2(\mathbb{R}^N),\ j(u) \in L^1(\mathbb{R}^N) \\ & \text{y grad } u \in L^p(\mathbb{R}^N) \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces ϕ es convexa, s. c. i. en $L^2(\mathbb{R}^N)$ y $\partial\phi(u) = -\Delta_p u + \beta(u)$ en el dominio correspondiente.

DEMOSTRACIÓN.—Consideramos las funciones $\phi_1(u)$, $\phi_2(u)$ dadas por

$$\phi_1(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx & \text{si } u \in L^2(\mathbb{R}^N), \text{grad } u \in L^p(\mathbb{R}^N) \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\phi_2(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} j(u)\, dx & \text{si } u \in L^2(\mathbb{R}^N),\ j(u) \in L^1(\mathbb{R}^N) \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

ϕ_1, ϕ_2 son funciones convexas, s. c. i. en $L^2(\mathbb{R}^N)$ y se tiene que:

$$u \in D(\partial\phi_1) \iff u \in L^2(\mathbb{R}^N), \text{ grad } u \in L^p(\mathbb{R}^N), \Delta_p u \in L^2(\mathbb{R}^N),$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta_p x \cdot h + \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0 \quad \text{si} \quad h \in D(\phi)$$

Por otra parte, $f \in \partial \phi_2 (u) \Longleftrightarrow f \in L^2 (\mathbb{R}^N)$, $f(x) \in j(u(x))$ ctp en $\mathbb{R}^N$. Se tiene también $\phi_1 ((I + \lambda \partial \phi_2)^{-1} u) \leqslant \phi_1 (u)$ para cada $u \in D(\phi_1)$, ya que $(I + \lambda j)^{-1}$ es una contracción monótona en $\mathbb{R}$. Basta utilizar ahora el teorema 9 de [7]: Finalmente, se tiene que $D(\partial \phi) = D(\partial \phi_1) \cap D(\partial \phi_2)$.

Como consecuencia de la proposición 1.1, se tiene el siguiente teorema de existencia.

Teorema 1.2.—Sean $f \in L^2 (0, T : L^2 (\mathbb{R}^N))$, $u_0 \in L^2 (\mathbb{R}^N)$. Existe una única solución $u \in C([0, T] : L^2 (\mathbb{R}^N))$ de:

$$(P_f) \begin{cases} u_t - \Delta_p u + \beta(u) = f & \text{en} \quad \mathbb{R}^N \times (0, T) \\ u(0) = u_0(x) & \text{en} \quad \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Además, esta solución verifica que $u(., t) \in D(\partial \phi)$ ctp en $(0, T)$ y $\beta(u(., T)) \in L^2 (\mathbb{R}^N)$ ctp en $(0, T)$.

Demostración.—Es consecuencia de la teoría general de problemas de evolución asociados a operadores subdiferenciales (ver [6], [7]).

Observación 1.—La proposición 1.1 y el teorema 1.2 se extienden fácilmente al caso en que $\beta = \partial j$ es multívoca.

Sea Ω un espacio de medida. Sea A un operador en $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Se dice que A es T-acretivo en $L^p(\Omega)$ si para cada $u_1, u_2 \in D(A)$, y para cada $\lambda > 0$, se tiene que:

$$\| (u_1 - u_2)_+ \|_{L^p} \leq \| ((I + \lambda A) u_1 - (I + \lambda A) u_2)_+ \|_{L^p}$$

(Hemos escrito $u_+ = \max(u, 0)$).

Los operadores T-acretivos tienen propiedades muy útiles desde el punto de vista del principio del máximo. En nuestro caso, se tiene explícitamente:

Proposición 1.3.—Sea $A u = \partial \phi (u)$, operador obtenido en la proposición 1.1. Se tiene que:

a) A es T-acretivo en $L^1(\mathbb{R}^N)$ y $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

b) Sea u la solución de (P) con dato inicial $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Entonces:

$$\| u(.,t) \|_{L^\infty} \leq \| u_0 \|_{L^\infty} \quad \text{para cada} \quad t > 0$$

DEMOSTRACIÓN.—La parte a) es consecuencia de la útil caracterización de operadores T-acretivos dada en [5]: Sea $A = \partial \phi$ en $L^2(\Omega)$, siendo Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $\forall\, T \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R})$ con $T(0) = 0$, $0 \leqslant T' \leqslant 1$, $\forall\, u$, $\forall\, \hat{u}$ en $D(\phi)$, se tiene que

$$\phi(u - T(u - \hat{u})) + \phi(\hat{u} + T(u - \hat{u})) \leqslant \phi(u) + \phi(\hat{u}).$$

ii) $\partial \phi$ es T-acretivo en $L^1(\Omega)$.

iii) $\partial \phi$ es T-acretivo en $L^\infty(\Omega)$.

Es inmediato comprobar que i) se verifica en nuestro caso.

La parte b) es una consecuencia de la T-acretividad aplicada al esquema implícito:

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} \dfrac{u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t - \varepsilon)}{\varepsilon} + A\, u_\varepsilon(t) = 0 \\ u_\varepsilon(0) = u_0 \end{cases}$$

Donde $A\,u = -\Delta_p u + \beta(u)$. Se tiene que

$$u_\varepsilon(t) = (I + \varepsilon A)^{-1} u \quad \text{con} \quad t \in](n-1)\varepsilon, n\varepsilon[, \quad n \geq 0$$

y también

$$\| u_\varepsilon \|_{L^\infty} \leq \| u_0 \|_{L^\infty}$$

Por medio del teorema de Crandall-Ligget (cf. [3]), existe una función (llamada habitualmente l-solución) tal que:

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{en} \quad C([0,T]: L^\infty(\mathbb{R}^N)) \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Por el teorema 1.2, existe una solución de (P) (cf. [3]), que es en particular una l-solución, y se sigue b).

Mostramos ahora un resultado que relaciona el crecimiento de las soluciones de (P) en un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N \times (0, T)$ y en su frontera parabólica. Este resultado puede ser utilizado para dar una demostración alternativa del teorema 2.1.

TEOREMA 1.4.—Sean u, w soluciones (en el sentido del teorema 1.2) de los problemas:

$$(\mathrm{P}; u_0)\begin{cases} u_t - \Delta_p u + \beta(u) = 0 & \text{en} \quad \mathbb{R}^N \times (0, \mathrm{T}) \\ u(0) = u_0 & \text{en} \quad \mathbb{R}^N \end{cases}$$

$$(\mathrm{P}; w_0)\begin{cases} w_t - \Delta_p w + \beta(w) = 0 & \text{en} \quad \mathbb{R}^N \times (0, \mathrm{T}) \\ w(0) = w_0 & \text{en} \quad \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Donde β, u_0, w_0, p, N son como en la proposición 1.1. Sea B una bola abierta acotada en $\mathbb{R}^N$. Entonces, si:

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{array}{l} \text{i)} \quad \sup\limits_{\partial_p \mathrm{B}} (u - w) \geq 0 \\ \text{ó} \\ \text{ii)} \quad \sup\limits_{\mathrm{B}\times(0,\mathrm{T})} (u - w) > 0 \end{array}$$

donde $\partial_p \mathrm{B} = \partial \mathrm{B} \times [0, \mathrm{T}] \cup \overline{\mathrm{B}} \times \{0\}$.

Se sigue que:

$$\sup_{\mathrm{B} \times (0, \mathrm{T})} (u - w) \leq \sup_{\partial_p \mathrm{B}} (u - w).$$

DEMOSTRACIÓN.—Supóngase que el resultado es falso; existirán entonces una bola B y un número real k tales que:

$$\text{(1.2)} \qquad \sup_{\partial_p \mathrm{B}} (u - w) < k < \sup_{\mathrm{B} \times (0, \mathrm{T})} (u - w)$$

En virtud de (1.1), $k \geqslant 0$. Sea ahora $t \in (0, \mathrm{T})$ fijo. Restando las ecuaciones de evolución correspondientes a $(\mathrm{P}; u_0)$, $(\mathrm{P}; w_0)$, multiplicando por $(u - w - k)_+ (t)$ e integrando en B, se tiene:

$$\int_{\mathrm{B}} (u_t - w_t)(u - w - k)_+ (t) - \int_{\mathrm{B}} (\Delta_p u - \Delta_p w)(u - w - k)_+ (t) +$$

$$\text{(1.3)} \qquad + \int_{\mathrm{B}} (\beta(u) - \beta(w))(u - w - k)_+ (t) = 0$$

Si t es tal que $(u - w)(t) \in D(\partial \phi)$ (ver proposición 1.1), podemos integrar por partes en (1.3) y se obtiene:

$$\int_B \frac{d}{dt} |(u - w - k)_+(t)|^2 + \sum_{i=1}^{N} \int_B \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) \cdot$$

$$(1.4) \quad \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) \operatorname{sgn}_+ (u - w - k)(t) + \int_B (\beta(u) - \beta(w))(u - w - k)_+(t) = 0$$

Ahora, por la monotonía de β y la no negatividad de k, el último término en (1.4) es mayor o igual que cero; lo mismo es cierto para el segundo sumando, y se tiene que:

$$(1.5) \qquad \frac{1}{2} \int_B \frac{d}{dt} |(u - w - k)_+(t)|^2 \leq 0$$

Finalmente, integrando en (δ, T) con $\delta > 0$, $\delta < t \leqslant T$, usando el teorema de Fubini y la continuidad de u y w de $[0, T]$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$, se tiene:

$$(1.6) \qquad \int_B (u - w - k)_+^2 (t) \leq \int_B (u - w - k)_+^2 (0) = 0, \quad \forall t \in (0, T)$$

De donde $u(x, t) - w(x, t) \leqslant k$ ctp $x \in B$, $\forall t \in (0, T)$, lo que contradice (1.2). $\#$

Sea ahora el problema con condiciones de frontera no homogéneas:

$$(\tilde{P}) \begin{cases} u_t - \Delta_p u + \beta(u) = f & \text{en} \quad \Omega \times (0, T) \\ u = g & \text{en} \quad \partial \Omega \times (0, T) \\ u(0) = u_0 & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Siendo Ω abierto en $\mathbb{R}^N$,

$$f \in L^2(0, T : L^2(\mathbb{R}^N)), \; u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N) \quad \text{y} \quad g \in L^\infty(]0, T[\times \partial \Omega)$$

Se tiene el siguiente resultado de comparación:

Lema 1.5.—Sean u, w soluciones de $(\tilde{P})$, correspondientes respectivamente a datos (f, g, u_0) y (h, i, v_0), con la regularidad indicada en el teorema 1.2. Entonces, si

$$f(x,t) \leqslant h(x,t) \text{ ctp } x \in \Omega, \quad \forall t \in (0,T), \; g(x,t) \leqslant i(x,t) \text{ ctp}$$

en $\partial\Omega \times]0, T[$ y $u_0(x) \leqslant v_0(x)$ ctp Ω, se tiene que

$$\forall t > 0, \; u(x,t) \leqslant v(x,t) \text{ ctp } x \in \Omega.$$

DEMOSTRACIÓN.—Procedemos como en el teorema anterior, multiplicando por $(u - w)_+(t)$. Se tiene ahora:

$$\text{(1.7)} \qquad \int_{\mathbb{R}^N} (u_t - w_t)(u - w)_+(t) - \int_{\mathbb{R}^N} (\Delta_p u - \Delta_p w)(u - w)_+(t) + \\ + \int_{\mathbb{R}^N} (\beta(u) - \beta(w)(u - w)_+(t) = \int_{\mathbb{R}^N} (f - g)(u - w)_+(t)$$

Y razonando como en el resultado anterior, se llega a:

$$\text{(1.8)} \qquad \int_{\mathbb{R}^N} (u_t - w_t)(u - w)_+(t) \leq 0$$

De donde $u(x,t) \leqslant w(x,t)$ ctp $x \in \Omega$, $\forall t$. Diversas variantes de este resultado pueden verse en [15].

2. Resultados principales

A lo largo de esta sección consideraremos problemas con datos iniciales f, u_0 no negativos, si bien los resultados aquí expuestos se extienden inmediatamente al caso general. Supondremos en lo que sigue que β es una función continua no decreciente con $\beta(0) = 0$, y emplearemos las hipótesis que reseñamos a continuación.

$$\text{(H1)} \qquad \int_0^1 \frac{ds}{(s\,\beta(s))^{1/p}} < +\infty$$

$$\text{(H2)} \qquad \int_0^1 \frac{ds}{\beta(s)} < +\infty$$

$$\text{(H3)} \qquad \begin{cases} u_0(x) \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \\ u_0(x) \longrightarrow 0 \quad \text{uniformemente si } |x| \to \infty \end{cases}$$

Escribiremos abreviadamente S (t) en lugar de soporte de $u(., t)$. Se tiene ahora el siguiente resultado.

TEOREMA 2.1.—Sea u la solución de (P) dada por el teorema 1.2. Entonces:

a) Sea $p > 2$; si se verifican (H2) y (H3), para cada $t > 0$ S (t) es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$. Existe además un $t_0 > 0$ tal que $u(x, t) = 0$ ctp en $\mathbb{R}^N$ si $t \geqslant t_0$.

b) Sea $1 < p \leqslant 2$; si se verifican (H1) y (H3), se obtienen los mismos resultados que en a).

DEMOSTRACIÓN.—a) En primer lugar, podemos suponer β acotada sin pérdida de generalidad, ya que $u(x, t)$ está acotada (por (H3) y el principio del máximo dado en la proposición 1.3). Por tanto, podemos suponer:

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{\beta(s)} = +\infty$$

Definimos ahora las funciones $g(t)$ y $f(x)$ dadas por:

$$\int_0^{g(t)} \frac{ds}{\beta(s)} = \frac{t}{N+1}, \quad t \geq 0 \tag{2.1}$$

$$\int_0^{f(x)} c\left[\int_0^s \beta(\xi)\, d\xi\right]^{-1/p} = x \quad \text{si} \quad x \geq 0, \quad \text{con} \quad c = (N+1)^{1/p} \tag{2.2}$$

$$f(-x) = f(x)$$

Nótese que si $p > 2$, (H2) $\Longrightarrow$ (H1) y se tiene que

$$\int_0^1 \frac{ds}{\left(\int_0^s \beta(\xi)\, d\xi\right)^{1/p}} < +\infty$$

Las funciones $g(t)$ y $f(x)$ tienen las siguientes propiedades:

$$\left\{\begin{array}{l} g(t) \text{ es continua para } t \geq 0, \quad g(0) = 0, \quad g(t) > 0 \text{ si } t > 0 \\ g(t) \to \infty \quad \text{si} \quad t \to \infty \\ g'(t) = \dfrac{\beta(g(t))}{N+1} \end{array}\right. \tag{2.3}$$

$$(2.4)\qquad \begin{cases} f(x) \text{ es dos veces diferenciable en } \mathbb{R}^N;\ f(0) = f'(0) = 0 \\ f(x) \to \infty \quad \text{si} \quad |x| \to \infty \\ (|f'(x)|^{p-2} f'(x))' = \dfrac{\beta(f(x))}{N+1} \end{cases}$$

Sea $t_0 > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Si $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0N})$ y $x = (x_1, \ldots, x_N)$, definimos $w(x, t)$ del siguiente modo:

$$(2.5)\qquad w(x,t) = \tilde{g}(t_0 - t) + \sum_{i=1}^{N} f(x_i - x_{0i}), \quad \text{con} \quad \tilde{g}(s) = \begin{cases} g(s) & \text{si } s \geq 0 \\ 0 & \text{si } s < 0 \end{cases}$$

De (2.3) y (2.4) se deduce:

$$(2.6)\qquad w_t - \Delta_p w + \beta(w) = -\tilde{g}'(t_0 - t) - \sum_{i=1}^{N} (|f'(x_i - x_{0i})|^{p-2} f'(x_i - x_{0i}))' +$$
$$+ \beta\Big(\tilde{g}(t_0 - t) + \sum_{i=1}^{N} f(x_i - x_{0i})\Big) \geq -\tilde{g}'(t_0 - t) -$$
$$- \sum_{i=1}^{N} (|f'(x_i - x_{0i})|^{p-2} f'(x_i - x_{0i}))' + \frac{1}{N+1}\beta(\tilde{g}(t_0 - t)) +$$
$$+ \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N} \beta(f(a_i - x_{0i})) \geq 0$$

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $g(t_0) \geqslant \varepsilon$. Por (H3), existe $\delta > 0$ tal que $u_0(x) < \varepsilon$ si $|x| > \delta$. Por otra parte, por (2.4), existe $r > 0$ tal que:

$$(2.7)\qquad \sum_{i=1}^{N} f(x_i - x_{0i}) \geq \|u_0\|_{L^\infty} \quad \text{si} \quad |x - x_0| \geq r$$

Supongamos ahora que x_0 está suficientemente lejos del origen. Explícitamente, impongamos que:

$$(2.8)\qquad B(x_0; r) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < r\} \subset \{x \in \mathbb{R}^N : u_0(x) < \varepsilon\}$$

De (2.7) y las consideraciones anteriores se deduce que, si $t_1 > t_0$:

$$(2.9)\qquad \begin{cases} w_t - \Delta_p w + \beta(w) \geq 0 & \text{en} \quad B(x_0; r) \times (0, t_1) \\ w \geq \|u_0\|_{L^\infty} & \text{en} \quad \partial B(x_0; r) \times (0, t_1) \\ w(0) \geq \varepsilon & \text{en} \quad B(x_0; r) \end{cases}$$

Por otra parte, es claro que la solución u de (P) verifica:

$$(2.10)\qquad \begin{cases} u_t - \Delta_p u + \beta(u) = 0 & \text{en } \mathrm{B}(x_0, r) \times (0, t_1) \\ u \leq \| u_0 \|_{L^\infty} & \text{en } \partial \mathrm{B}(x_0, r) \times (0, t_1) \\ u(0) \leq \varepsilon & \text{en } \mathrm{B}(x_0, r) \end{cases}$$

De (2.9) y (2.10) se deduce, en virtud del lema 1.5,

$$(2.11)\qquad 0 \leq u(x, t_0) \leq w(x, t_0) \quad \text{ctp } \mathrm{B}(x_0; r)$$

Por otra parte, para cada $\gamma > 0$ existe $\mathrm{V}(x_0)$, entorno de x_0, tal que $w(x, t_0) \leqslant \gamma$ si $x \in \mathrm{V}(x_0)$. Si escribimos ahora:

$$(2.12)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{D}^\varepsilon(u_0) = \{x \in \mathbb{R}^N : u_0(x) \geq \varepsilon\} \\ &\mathrm{D}^\varepsilon(u_0) + r = \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, \mathrm{D}^\varepsilon(u_0)) \leq r\} \end{aligned}$$

Se tiene que el complementario de $\mathrm{D}^\varepsilon(u_0) + r$ puede recubrirse con una familia de entornos $(\mathrm{V}(x_i))_{i \in \mathrm{I}}$, de modo que en cada uno de ellos $w^i(x^i, t) \leqslant \gamma$, siendo

$$w^i(x^i, t) = \bar{g}(t_0 - t) + \sum_{j=1}^{N} f(x_j - x^i_j).$$

Así pues, $\forall \gamma > 0$, $u(x, t_0) \leqslant \gamma$ ctp x fuera de $\mathrm{D}^\varepsilon(u_0) + r$. Se deduce finalmente que $u(x, t_0) = 0$ ctp $x \notin \mathrm{D}^\varepsilon(u_0) + r$. Podemos concluir la parte a) observando que, en virtud de (2.3), existe un $t_0 > 0$ tal que $g(t_0) \geqslant \| u_0 \|_{L^\infty}$. En este caso:

$$w(x, 0) = g(t_0) + \sum_{i=1}^{N} f(x_i - x_{0i}) \geq g(t_0) \geq = u_0 \|_{L^\infty}$$

Y podemos usar el razonamiento precedente sin la restricción explicitada en (2.8). Se obtiene así la anulación de soluciones para $t \geqslant t_0$.

b) Si $1 < p \leqslant 2$, (H1) implica (H2). Las funciones (2.3) y (2.4) satisfacen las mismas propiedades que en la parte a), y se obtienen los resultados correspondientes.

OBSERVACIÓN 2.—Si $p = 2$, (H1) queda:

$$\int_0^1 \frac{ds}{(s\,\beta(s))^{1/2}} < +\infty$$

En este caso los resultados anteriores coinciden con los obtenidos en [10], [14].

OBSERVACIÓN 3.—Si

$$\frac{2N}{N+2} < p < 2 \quad \text{y} \quad \beta(s) = 0,$$

la existencia de un tiempo finito de extinción para dominios acotados ha sido obtenida en [1].

El método utilizado nos permite demostrar la compacidad de $S(t)$ para $t > 0$, si $S(0)$ es compacto (propiedad (P. F.)). En concreto, se tiene:

PROPOSICIÓN 2.2.—Sea $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ con soporte compacto; entonces, si u es solución de (P), se tiene:

a) Sea $p > 2$. Si $S(0) \subset B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$, existe una constante $M(T)$ (que depende de N, p, T) tal que, para cada $t > 0$, $S(t) \subset B_{R(t)}$, donde $R(t) = R + M(T)\, t^{1/p}$.

b) Sea $1 < p \leqslant 2$; si (H1) se verifica, $S(t)$ es compacto para cada $t > 0$.

c) En ambos casos $p > 2$ ó $1 < p \leqslant 2$, si (H1) se verifica, el soporte $S(t)$ está acotado independientemente de t, y se tiene la estimación:

$$S(t) \subset B_{R_0} \quad \text{con} \quad R_0 = R + r.$$

Siendo R dado en a), r dado en (2.7).

DEMOSTRACIÓN.—La parte a) es consecuencia del resultado obtenido en [13] para el problema sin perturbar. Basta observar que las soluciones de (P) pueden cosiderarse subsoluciones de (P*), gracias a lemas de comparación del tipo del lema 1.5. Las partes b) y c) son consecuencias inmediatas de la demostración del teorema 2.1.

OBSERVACIÓN 5.—El caso $p = 2$ figura en [10], [14]. Referencias sobre problemas que satisfacen (P. F.) son, p. ej., [17], [8], [4], [10], [12].

3. Contraejemplos. El problema sin perturbar

Nuestro propósito en esta sección es mostrar que las conclusiones del teorema 2.1 no son válidas en general si se prescinde de la hipótesis (H1). Necesitamos para ello algún trabajo previo, reunido en los dos siguientes lemas:

LEMA 3.1.—Sea $\mathbb{R}^+ \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$. Sea $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^+)$ $(p > 1)$ tal que

$$u \in L^2(\mathbb{R}^+), (|u'|^{p-2} u')' \in L^2(\mathbb{R}^+).$$

Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^+} (|u'|^{p-2} u')' \cdot u_+ = \int_{\mathbb{R}^+} |u'|^p \operatorname{sgn}_+ u \tag{3.1}$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones tales que para cada n,

$$S_n \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^+), \; S_n = 1 \text{ si } x \leqslant n, \; S_n = 0 \text{ si } x \geqslant n + 2, \; |S'_n| < M < +\infty,$$

para algún M real, independiente de n. Entonces

$$u_+ \cdot S_n \in W^{1,p}(I_n) \quad \text{con} \quad I_n = [0, n + 2]$$

y es claro que:

$$\int_{\mathbb{R}^+} (|u'|^{p-2} u')' u_+ S_n = \int_{\mathbb{R}^+} (|u'|^{p-2} u') u_+ S'_n + \int_{\mathbb{R}^+} |u'|^{p-2} u' (u_+)' S_n \tag{3.2}$$

Concluimos el resultado, recordando que $(u_+)' = u' \cdot \operatorname{sgn}_+ u$ (cf. [22]) y usando el teorema de la convergencia dominada cuando $n \longrightarrow \infty$. #

Sean (P_1) y (P_2) los siguientes problemas con condiciones de contorno no homogéneas:

$$(P_1) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + |u|^{q-2} u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^+ \times (0, T) \\ u(0, t) = f(t) & \text{en } (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

$$(P_2) \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\left|\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|^{p-2} \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + |v|^{q-2} v = 0 & \text{en } \mathbb{R}^+ \times (0, T) \\ v(0, t) = g(t) & \text{en } (0, T) \\ v(x, 0) = v_0 & \text{en } \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Supondremos que $f(t)$, $g(t)$ están en L^∞] 0, T [.

LEMA 3.2.—Sean u_0, v_0 pertenecientes a $L^2(\mathbb{R}^+)$, y sean u, v soluciones de (P_1) y (P_2) respectivamente, con condiciones de regularidad como las especificadas en el teorema 1.2. Entonces si $u_0(x) \leqslant v_0(x)$ ctp en $\mathbb{R}^+$, y $f(t) \leqslant g(t)$ ctp $t \in]0, T[$, se tiene que $u(x, t) \leqslant v(x, t)$ ctp en $\mathbb{R}^+$ $\forall t \in (0, T)$.

DEMOSTRACIÓN.—Es enteramente similar a la del lema 1.5.

Sea ahora $q > p > 2$. Entonces $\beta(s) = |s|^{q-2} s$ verifica:

$$\int_0^1 \frac{ds}{(s\,\beta(s))^{1/p}} = +\infty$$

Se define la siguiente función:

$$(3.5)\qquad \begin{cases} \phi(x) = \left(\dfrac{c}{c+x}\right)^{\frac{p}{q-p}} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \text{con } c = \left(\dfrac{(q-p)^p}{p^{p-1}\, q\,(p-1)}\right)^{-1/p} \end{cases}$$

Es claro que:

$$(3.6)\qquad \begin{cases} \phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+) \\ \phi(0) = 1, \ \phi(x) > 0 \quad \text{si} \quad x > 0 \\ \phi(x) \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad x \longrightarrow \infty \end{cases}$$

y también

$$(|\phi'(x)|^{p-2}\phi'(x))' = |\phi(x)|^{q-2}\phi(x).$$

Podemos establecer ahora el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 3.3.—Sea $u_0(x) \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ con $u_0^{\frac{m-1}{m}}$ Lipschitz satisfaciendo (H3) y tal que

$$(3.6)\qquad \begin{cases} u_0(0) \geq 2 \\ u_0(x) \geq \phi(x), \ \phi \ \text{dada en} \ (3.5) \end{cases}$$

Existe entonces $T > 0$ tal que el problema:

$$(3.9)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + |u|^{q-2}u = 0 && \text{en} \quad \mathbb{R}\times(0,T) \\ &u(x,0) = u_0(x) && \text{en} \quad \mathbb{R}, \end{aligned}$$

admite una subsolución estrictamente positiva para $x > 0$.

DEMOSTRACIÓN.—Comenzamos por notar que $u(x, t)$ solución en (3.9) es continua (por razonamientos similares a los expuestos en [19]; ver también [17]). Por tanto, si $u_0(0) \geqslant 2 > \phi(0)$, existe $T > 0$ tal que:

$$u(0, t) > \phi(0) \quad \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.10}$$

Sea $\tilde{u}$ la restricción de la solución u de (3.9) a $\mathbb{R}^+ \times (0, T)$. Es claro que $\tilde{u}$ satisface:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left| \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right|^{p-2} \cdot \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) + |\tilde{u}|^{q-2}\tilde{u} = 0 & \text{en} & \mathbb{R}^+ \times (0, T) \\ \tilde{u}(0, t) \geqslant \phi(0) & \text{en} & (0, T) \\ \tilde{u}(x, 0) \geqslant \phi(x) & \text{en} & \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \tag{3.11}$$

Por otra parte, $v(x, t) = \phi(x)$ satisface:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left| \dfrac{\partial v}{\partial x} \right|^{p-2} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} \right) + |v|^{q-2} v = 0 & \text{en} & \mathbb{R}^+ \times (0, T) \\ v(0, t) = \phi(0) & \text{en} & (0, T) \\ v(x, 0) = \phi(x) & \text{en} & \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \tag{3.12}$$

Y se concluye gracias al lema 3.2.

Como consecuencia de la proposición 3.3, se obtiene el siguiente reslultado para el problema sin perturbar:

PROPOSICIÓN 3.4.—Sean $p > 1$; $u_0(x)$, T como en la proposición 3.3. El problema

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left| \dfrac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 & \text{en} & \mathbb{R}^+ \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0 & \text{en} & \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Tiene una subsolución estrictamente positiva cuando $x > 0$.

DEMOSTRACIÓN.—Basta observar que las soluciones de (3.9) son de hecho subsoluciones de (3.13). Si $u(x, t)$ es solución de (3.9), u es solución de:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left| \dfrac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x, t) & \text{en} & \mathbb{R} \times (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en} & \mathbb{R} \end{array} \right.$$

con $f(x, t) = -|u|^{q-2} u \leqslant 0$.

Basta ahora utilizar el lema 1.5 con $\Omega = \mathbb{R}$, $\beta(s) = 0$.

Referencias

[1] BAMBERGER, A. (1977). Étude d'une équation doublement non linéaire. *Journal of Functional Analysis*, **24**, 148-155.

[2] BENILAN, PH. (1972). Équations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications. Thése d'Etat, Orsay.

[3] BENILAN, PH. (1975). Cours de 3eme cycle, Paris.

[4] BENILAN, PH., BREZIS, H. y CRANDALL, M. (1975). A semilinear equation in $L^1(\mathbb{R}^N)$. *Ann. Ecuola Normale Superiore di Pisa*, serie IV, vol. II, **4**, 523-555.

[5] BENILAN, PH. y PICARD, C. (1974). Quelques aspects non linéaires de la theorie du potentiel. Seminaire Theorie du potential, Paris VI.

[6] BREZIS, H. (1973). Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. Notas de Matemática, North Holland.

[7] BREZIS, H. (1971). Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations, en Contributions to nonlinear functional analysis. E. Zarantonello, ed.

[8] BREZIS, H. (1974). Solutions of variational inequalities with compact support. *Uspekhi Mat. Nauk.*, **129**, 103-108.

[9] BREZIS, H. (1974). Monotone operators, nonlinear semi-groups and applications. Proc. Int. Congress. Math. Vancouver, Canadá.

[10] BREZIS, H. y FRIEDMAN, A. (1976). Estimates on the support of solutions of parabolic variational inequalities. III. *Journal of Math.*, **20**, 82-99.

[11] DÍAZ, G. y DÍAZ, J. I. (1979). Finite extinction time for a class of nonlinear parabolic equations. *Comm. in Partial Differential Equations*, 4, **11**, 1213-1231.

[12] DÍAZ, J. I. (1979). Solutions with compact support of some degenerate parabolic problems. *Nonlinear Analysis. Theory and Applications*, vol. 3, **6**, 831-847.

[13] DÍAZ, J. I. y HERRERO, M. A. Estimates on the support of the solutions of some nonlinear elliptic and parabolic problems (aparecerá en *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*).

[14] EVANS, L. C. y KNERR, B. F. (1979). Instantaneous shrinking of the support of non-negative solutions to certain nonlinear parabolic equations and variational inequalities. III. *J. of Math.*, 23, **1**, 153-166.

[15] HERRERO, M. A. (1979). Comportamiento de las soluciones de ciertos problemas no lineales sobre dominios no acotados. Tesis doctoral, Universidad Complutense, Madrid.

[16] Lions, J. L. (1969). Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Ed. Dunod.

[17] Kalashnikov, A. S. (1973). On the Cauchy problem in the class of increasing functions for certain quasilinear degenerate parabolic equations of the second order. *Differentialnye urav.* Tom. IX, n.° 4, 682-691 (en ruso).

[18] Kalashnikov, A. S. (1974). The propagation of disturbances in problems of nonlinear heat conduction with absorption. *Zh. vychisl. Mat mat. Fiz.*, 14, **4**, 891-905.

[19] Kalashnikov, A. S. (1978). On a nonlinear equation arising in the theory of nonstationary filtration. Sem. I. G. Petrovski, en ruso.

[20] Martinson, L. K. y Paulov, K. B. (1966). The effect of magnetic plasticity in non-newtonian fluids. *Magnitaya Gidrodinamika*, vol. 2, **3**, 69-75.

[21] Martinson, L. K. y Paulov, K. B. (1971). Unsteady shear flows of a conducting fluid with a rheological power law. *Magnitaya Gidrodinamika*, **2**, 50-58.

[22] Stampacchia, G. (1966). Equations elliptiques du second ordre a coefficients discontinus. Presses de l'Université de Montreal.

Departamento de Ecuaciones Funcionales
Facultad de Ciencias Matemáticas
Departamento de Métodos Matemáticos de la Física
Facultad de Ciencias Físicas
Universidad Complutense, Madrid-3