CARACTERIZACION DE LOS SUB-RETICULOS K-COMPLEMENTADOS DE UN ESPACIO ESCALONADO DE KÖTHE

J. A. López Molina

Recibido: 27 noviembre 1979

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

We characterize the K-complemented sublattices of an echelon Köthe space of order $p \geqslant 1$, Λ^p. We show that, if G is a separable subset of Λ^p, there is a K-complemented, separable subspace F of Λ^p such that $G \subset F$ and F is K-isomorphic to an echelon Köthe space.

El objeto de este artículo es dar una caracterización de los sub-retículos cerrados K-complementados de un espacio escalonado de Köthe de orden $p \geqslant 1$. Este tema ha sido parcialmente estudiado en [4]. Vamos a establecer la notación y las definiciones que usaremos posteriormente.

Los conjuntos de los números naturales no nulos, racionales y reales se representarán por N, Q y R respectivamente. Los espacios vectoriales y de Lebesgue que manejemos serán siempre reales. Los espacios medida (E, $\mathcal{H}$, μ) que se considerarán serán siempre localizables y con la propiedad de los subconjuntos finitos (ver [7]). Dado tal espacio (E, $\mathcal{H}$, μ), Ω (E) será el conjunto de las funciones reales $\mathcal{H}$-medibles definidas en E y Ω_0 (E) el conjunto de sus clases de equivalencia frente a la relación de igualdad excepto en un conjunto de medida cero. Una función de Ω (E) y su clase en Ω_0 (E) se representarán con la misma letra cuando no haya lugar a confusión. La frase «casi por todas partes respecto a la medida μ» se abreviará poniendo μ-c. t. p. Si $A \in \mathcal{H}$, A se considera como espacio medida con la σ-álgebra y la medida inducida por $\mathcal{H}$ y μ, las cuales se representarán con las mismas letras $\mathcal{H}$ y μ. El soporte de $f \in \Omega(\mathrm{E})$ es el conjunto $\mathrm{S}(f) = \{t \in \mathrm{E}/f(t) \neq 0\}$. El soporte de de $f \in \Omega_0(\mathrm{E})$ es el soporte de un representante cualquiera de f. Por tanto si $f \in \Omega_0(\mathrm{E})$, el símbolo $\mathrm{S}(f)$ está bien definido salvo un conjunto de medida cero. La función característica de $\mathrm{A} \in \mathcal{H}$ se denotará por χ_{A}.

Sea $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión creciente en $\Omega(\mathrm{E})$, $g_k(t) \geqslant 0$ para todo $t \in \mathrm{E}$ y $k \in \mathrm{N}$ y tal que

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \{t \in \mathrm{E}/g_k(t) = 0\}\right) = 0.$$

Para cada $p \in \mathrm{R}$, $p \geqslant 1$ consideramos los espacios

$$\Lambda^p = \Lambda^p(\mathrm{E}, \mathrm{A}, \mu, g_k) = \{f \in \Omega_0(\mathrm{E})/(\|f\|_k)^p = \int_{\mathrm{E}} |f|^p g_k \, d\mu < \infty \quad \forall k \in \mathrm{N}\}$$

(espacio escalonado de Köthe de orden p), y

$$\Lambda^p{}_k = \{f \in \Omega_0(\mathrm{S}(g_k))/(\|f\|_k)^p = \int_{\mathrm{S}(g_k)} |f|^p g_k \, d\mu < \infty\}$$

Pondremos Λ y Λ_k en vez de Λ^1 y $\Lambda^1{}_k$. En Λ^p consideraremos la topología $\mathcal{T}$ definida por la familia de seminormas $\{\|f\|_k, k \in \mathrm{N}\}$ y en $\Lambda^p{}_k$ la topología $\mathcal{T}_k$ definida por la norma $\|f\|_k$.

En Λ^p y $\Lambda^p{}_k$ se introduce la relación de orden definida por $f \leqslant g$ si y sólo si $f(t) \leqslant g(t)$ μ-c. t. p. en E y en $\mathrm{S}(g_k)$ respectivamente. Con este orden y las topologías citadas, Λ^p y $\Lambda^p{}_k$ son retículos vectoriales topológicos orden completos. Λ^p es de Frechet y $\Lambda^p{}_k$ es isométrico a un espacio de Banach L^p de Lebesgue. Hay una relación sencilla entre ambos espacios: si $\mathrm{I}_k : \Lambda^p \longrightarrow \Lambda^p{}_k$ es la aplicación que hace corresponder a cada $f \in \Lambda^p$ su restricción a $\mathrm{S}(g_k)$ e $\mathrm{I}_{nm} : \Lambda^p{}_m \longrightarrow \Lambda^p{}_n$, $n \leqslant m$ es la que asocia a $f \in \Lambda^p{}_m$ su restricción a $\mathrm{S}(g_n)$, se verifica que $[\Lambda^p, \mathcal{T}]$ es el límite proyectivo del sistema $\mathrm{I}_{mn}(\Lambda^p{}_m, \mathcal{T}_m)$. Además $\mathrm{I}_k(\Lambda^p)$ es denso en $\Lambda^p{}_k$ (ver [3] para los detalles).

En un retículo vectorial F, las operaciones supremo e ínfimo se designan por $\vee$ y $\wedge$. Si $x \in \mathrm{F}$, se define

$$x^+ = x \vee 0, \quad x^- = (-x) \vee 0 \quad \text{y} \quad |x| = x^+ + x^-.$$

Se verifica que $x = x^+ - x^-$. Si $D \subset F$, el ortogonal en orden de D es

$$D^{\perp} = \{x \in F / |x| \wedge |y| = 0, \quad \forall y \in D\}.$$

Si F es orden completo, el teorema de Riesz afirma que $D^{\perp\perp} = (D^{\perp})^{\perp}$ es la banda engendrada por D y que existe una proyección J_D de F sobre $D^{\perp\perp}$. Si D consta de un solo elemento f, para abreviar, escribiremos $f^{\perp\perp}$ y J_f. En tal caso se cumple que

$$J_f(x) = \sup_n x^+ \wedge nf - \sup_n x^- \wedge nf$$

Si $F = \Lambda^p$, además se cumple

$$J_f(h) = \lim_n h^+ \wedge nf - \lim_n h^- \wedge nf.$$

Haremos uso también de esta propiedad: si $f_1 \wedge f_2 = 0$, entonces

$$J_{f_1 + f_2} = J_{f_1} + J_{f_2}$$

(para la demostración ver [5]).

1. Lemas necesarios

Definición 1.—Sea $\Lambda^p(E, \mathcal{H}, \mu, g_k)$ un espacio escalonado de Köthe de orden $p \geqslant 1$. Se dice que un subespacio $M \subset \Lambda^p$ es K-complementado en Λ^p si existe una proyección P de Λ^p sobre M tal que

$$\int_E |P(f)|^p g_k \, d\mu \leq \int_E |f|^p g_k \, d\mu \quad \forall k \in N, \quad \forall f \in \Lambda^p \tag{1}$$

Es claro que todo subespacio K-complementado es complementado. Es bien conocido que en un espacio L^p, todo sub-retículo cerrado es el rango de una proyección contractiva. Se plantea pues el problema de caracterizar los sub-retículos cerrados de un espacio escalonado de Köthe que son K-complementados.

En los espacios L^p se verifica el siguiente lema, cuya demostración figura en [2], págs. 115, 156 y 158. sg (f) es la función signo de f que vale 1 si $f(x) > 0$, -1 si $f(x) < 0$ y 0 si $f(x) = 0$. La composición de dos aplicaciones F y G se denota F G.

LEMA 1.—*Sea P una proyección contractiva en un espacio* L^p, $p \geqslant 1$, $p \neq 2$. *Entonces:*

1) *Si* f *y* g *pertenecen al rango de P, se tiene* $P J_g(f) = J_g(f)$.

2) *Si* $p = 1$ *y* f *pertenece al rango de P, se verifica:*

a) $P J_f = J_f P J_f$.

b) *Si* $0 \leqslant h \in L^1$, $P(h \cdot sg(f)) = |P(h \cdot sg(f))| \cdot sg(f)$.

c) $\| P(h \cdot sg(f)) \| = \| J_f(h) \|$ *si* $0 \leqslant h \in L^1$.

3) *Si* $p > 1$ *y* f *pertenece al rango de P, se verifica:*

a) *Si* g *pertenece al rango de P,* $|f|\, sg(g)$ *pertenece al rango de P.*

b) $P J_f = J_f P$.

c) *Si* $0 \leqslant h \in L^p$, $P(h \cdot sg(f)) = |P(h \cdot sg(f))|\, sg(f)$.

Es fácil probar que se tienen análogos resultados en el caso de un espacio escalonado de Köthe de orden $p \geqslant 1$, $p \neq 2$, y de un subespacio K-complementado.

LEMA 2.—*Sea M un subespacio K-complementado de un espacio escalonado de Köthe* $\Lambda^p(E, \mathcal{R}, \mu, g_k)$, $p \geqslant 1$, $p \neq 2$. *Sean* f *y* g *elementos de M y P una proyección que cumpla la relación (1). Entonces* $P J_g(f) = J_g(f)$.

DEMOSTRACIÓN.—Para cada $k \in N$ y $h \in I_k(\Lambda^p)$ definimos

$$P_k(h) = I_k P(h')$$

siendo h' cualquier función de Λ^p tal que $I_k(h') = h$. P_k está bien definida, pues si $I_k(h_1) = I_k(h_2)$, por (1) se tiene

$$0 \leq \int_E |P(h_1) - P(h_2)|^p g_k \, d\mu \leq \int_E |h_1 - h_2|^p g_k \, d\mu =$$
$$= \int_{S(g_k)} |h_1 - h_2|^p g_k \, d\mu = 0$$

luego $P(h_1) = P(h_2)$ c. t. p. en $S(g_k)$.

Si $h = I_k(h')$, para cada $k \in N$.

$$\int_{S(g_k)} |P_k(h)|^p g_k \, d\mu = \int_E |P(h')|^p g_k \, d\mu \leq \int_E |h'|^p g_k \, d\mu =$$
$$= \int_{S(g_k)} |h|^p g_k \, d\mu \tag{2}$$

luego P_k es lineal y continua de $I_k(\Lambda^p)$ en Λ^p_k. Por tanto se puede extender a una aplicación, aún denotada por P_k, lineal y continua de Λ^p_k en Λ^p_k. P_k es una proyección en Λ^p_k pues si $f = P_k(h)$, con $h \in \Lambda^p_k$, como existe una sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Lambda^p$ tal que $\lim_n I_k(h_n) = h$ en Λ^p_k, se tiene

$$P_k(f) = P_k(\lim_n P_k I_k(h_n)) = \lim_n P_k P_k I_k(h_n)) = \lim_n P_k I_k P(h_n) = \lim_n I_k P P(h_n) =$$
$$= \lim_n I_k P(h_n) = \lim_n P_k I_k(h_n) = P_k(\lim_n I_k(h_n)) = P_k(h) = f.$$

Es claro también que P_k es contractiva, por serlo en $I_k(\Lambda^p)$, por la fórmula (2), y que si $h \in M$,

$$P_k(I_k(h)) = I_k P(h) = I_k(h).$$

Entonces, si f y g están en M, $I_k(f)$ e $I_k(g)$ están en el rango de P_k. Por el lema 1, apartado 1, y por la definición de $J_g(f)$, tenemos

$$I_k P J_g(f) = P_k I_k J_g(f) = P_k J_{I_k(g)} I_k(f) = J_{I_k(g)} I_k(f) = I_k J_g(f)$$

luego, para cada $k \in N$, $P J_g(f)$ y $J_g(f)$ coinciden en $S(g_k)$. Por tanto $P J_g(f) = J_g(f)$, c. q. d.

LEMA 3.—*Sea M un subespacio K-complementado de un espacio escalonado de Köthe de orden 1* $\Lambda(E, \mathcal{R}, \mu, g_k)$. *Si* $f \in M$ *y P es una proyección que cumple (1), tenemos*

a) $P J_f = J_f P J_f$.

b) *Si* $0 \leqslant h \in \Lambda$, $P(h \cdot sg(f)) = |P(h \cdot sg(f))|\, sg(f)$.

c) *Para cada* $k \in N$, *y* $0 \leqslant h \in \Lambda$

$$\int_E |P(h \cdot sg(f))|\, g_k \, d\mu = \int_E |J_f(h)|\, g_k \, d\mu$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea, para cada $k \in N$, la proyección contractiva P_k del lema 2. Entonces $I_k(f)$ está en el rango de P_k. Por el lema 1, apartado 2, a) si $h \in \Lambda$ se verifica

$$I_k P J_f(h) = P_k I_k J_f(h) = P_k J_{I_k(f)} I_k(h) = J_{I_k(f)} P_k J_{I_k(f)} I_k(h) =$$
$$= J_{I_k(f)} I_k P J_f(h) = I_k J_f P J_f(h)$$

Como esto es cierto para cada $k \in N$, tenemos $P J_f(h) = J_f P J_f(h)$ y como h es arbitraria en Λ, se tiene probado el apartado a). Respecto al b), se tiene que $I_k(h) \in \Lambda_k$. Por el apartado 2, b) del lema 1, se verifica

$$\begin{aligned} I_k P(h \cdot sg(f)) &= P_k I_k(h \cdot sg(f)) = P_k(I_k(h) \cdot sg(I_k(f))) = \\ &= |P_k(I_k(h) \cdot sg(I_k(f)))| \cdot sg(I_k(f)) = |I_k P(h \cdot sg(f))| \cdot I_k(sg(f)) = \\ &= I_k(|P(h \cdot sg(f))| \cdot sg(f)) \end{aligned}$$

Esto es cierto para cada $k \in N$, luego se cumple b). Finalmente por el lema 1, apartado 2, c)

$$\begin{aligned} \int_E |P(h \cdot sg(f))| g_k \, d\mu &= \int_{S(g_k)} |P(h \cdot sg(f))| g_k \, d\mu = \\ = \int_{S(g_k)} |P_k(I_k(h) \cdot sg(I_k(f)))| g_k \, d\mu &= \int_{S(g_k)} |J_{I_k(f)} I_k(h)| g_k \, d\mu = \\ &= \int_E |J_f(h)| g_k \, d\mu \end{aligned}$$

LEMA 4.—*Sea M un subespacio K-complementado de un espacio escalonado de Köthe* $\Lambda^p(E, \mathcal{H}, \mu, g_k)$, $p > 1$, $p \neq 2$. *Sea* $f \in M$, *y P una proyección que cumple (1). Entonces:*

a) *Si* $g \in M$, *se verifica* $|f| \cdot sg(g) \in M$.

b) $P J_f = J_f P$.

c) *Si* $0 \leq h \in \Lambda^p$, *tenemos* $P(h \cdot sg(f)) = |P(h \cdot sg(f))| \, sg(f)$.

DEMOSTRACIÓN.—Se consideran las proyecciones contractivas P_k del lema 2. Parte a): si $f \in M$, $I_k(f)$ está en el rango de P_k. Por el lema 1, apartado 3, a), como $I_k(g)$ pertenece al rango de P_k se cumple

$$\begin{aligned} I_k P(|f| \, sg(g)) &= P_k(|I_k(f)| \cdot sg(I_k(g))) = |I_k(f)| \cdot sg(I_k(g)) = \\ &= I_k(|f| \cdot sg(g)) \end{aligned}$$

para cada $k \in N$. Luego $P(|f| \cdot sg(g)) = |f| \cdot sg(g)$ y se cumple a). Parte b): por el lema 1, apartado 3, b), para cada $k \in N$ y cada $h \in \Lambda^p$, $I_k(h) \in \Lambda^p{}_k$ y

$$\begin{aligned} I_k P J_f(h) &= P_k I_k J_f(h) = P_k J_{I_k(f)} I_k(h) = J_{I_k(f)} P_k I_k(h) = \\ &= J_{I_k(f)} I_k P(h) = I_k J_f P(h) \end{aligned}$$

Por tanto $P J_f(h) = J_f P(h)$ y en consecuencia $P J_f = J_f P$. Finalmente, el apartado c) se demuestra exactamente igual que el apartado b) del lema 3, usando esta vez el lema 1, apartado 3, c), c. q. d.

El lema siguiente ha sido demostrado en [4].

LEMA 5.—*Sea M un sub-retículo vectorial cerrado del espacio escalonado de Köthe $\Lambda^p(E, \mathcal{H}, \mu, g_k)$, $p \geqslant 1$. Sea $f \in M$ y sea $S(f)$ el soporte de uno cualquiera de los representantes de* f. *Sea $\mathcal{B}_f$ la familia de todos los conjuntos $A \subset S(f)$ tales que existe una función* h, *representante de un elemento de M con $S(h) = A$. Entonces $\mathcal{B}_f$ es una σ-álgebra de conjuntos $\mathcal{H}$-medibles en $S(f)$.*

En lo sucesivo, dadas dos funciones h y f, el símbolo $\dfrac{h}{f}$ designará la función que vale cero si $f(x) = 0$ y $\dfrac{h(x)}{f(x)}$ en otro caso.

LEMA 6.—*Sea M un sub-retículo K-complementado de un espacio escalonado de Köthe $\Lambda^p(E, \mathcal{H}, \mu, g_k)$, $p \geqslant 1$, $p \neq 2$ y P una proyección que cumple (1). Si $f \in M$ y $h \in f^{\perp\perp}$, la función $\dfrac{P(h)}{f}$ es $\mathcal{B}_f$-medible.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $w = \dfrac{P(h)}{f}$. Como $w^+ f \in \Lambda^p$, por los lemas 3 y 4

$$P(w^+ f) = P(w^+ \cdot |f|\, sg(f)) = |P(w^+ \cdot |f|\, sg(f))| \cdot sg(f) =$$
$$= |P(w^+ \cdot f)|\, sg(f)$$

luego debe ser

$$\frac{P(w^+ f)}{f} = \frac{|P(w^+ f)|}{|f|} = \frac{1}{f} J_f P(w^+ f) \geq 0$$

Análogamente se llega a

$$\frac{P(w^- f)}{f} = \frac{|P(w^- f)|}{|f|} = \frac{1}{f} \cdot J_f P(w^- f) \geq 0$$

Como $J_f P(w^+ f) \in f^{\perp\perp}$ y $J_f P(w^- f) \in f^{\perp\perp}$ y

$$\frac{P(w^+ f)}{f} - \frac{P(w^- f)}{f} = \frac{P(wf)}{f} = \frac{P(P(h))}{f} = \frac{P(h)}{f} = w$$

resulta que w es diferencia de dos funciones positivas de la misma estructura. Se puede, pues, suponer que $w \geqslant 0$ para probar que es $\mathcal{B}_f$-medible. Sea α real, $\alpha \leqslant 0$. Entonces

$$\{t \in S(f)/w(t) > \alpha\} = S(f).$$

Si $\alpha > 0$, sea $k = w \vee \alpha \chi_{S(f)} \geqslant 0$. Como

$$|kf| \leq |wf| \vee |f| \in \Lambda^p, \quad \text{es} \quad kf - wf \in \Lambda^p.$$

Por el lema 3 y 4, como $k \geqslant w$

$$P(kf - wf) = P(|kf - wf| \cdot sg(f)) = |P(kf - wf)|\, sg(f)$$

luego

$$\frac{P(kf - wf)}{f} = \frac{|P(kf - wf)|}{|f|} \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{P(kf)}{f} - \frac{P(wf)}{f} \geq 0$$

y como $wf \in M$ y w es nula en $E - S(f)$ tenemos

$$\frac{P(kf)}{f} \geq \frac{wf}{f} = w$$

Análogamente

$$\frac{P(kf)}{f} \geq \alpha \chi_{S(f)} \quad \text{y por tanto} \quad \frac{P(kf)}{f} \geq k.$$

Como M es K-complementado y $|P(kf)| \geqslant |kf|$, para cada $r \in N$ tenemos

$$\int_E |kf|^p g_r \, d\mu \geq \int_E |P(kf)|^p g_r \, d\mu \geq \int_E |kf|^p g_r \, d\mu \quad \forall r \in N$$

y por tanto $|P(kf)| = |kf|$. Como su cociente es positivo o nulo, es $P(kf) = kf \in M$. Ahora se puede escribir

$$\{t \in S(f)/w(t) > \alpha\} = \{t \in S(f)/(k - \alpha \chi_{S(f)})(t) \neq 0\} = S(kf - \alpha f)$$

y w es $\mathcal{B}_f$-medible, c. q. d.

El lema 7 y el 8 han sido demostrados, respectivamente, en [4] y [3].

LEMA 7.—*Sea* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio medida* σ*-finito y* M *un subespacio cerrado de un espacio escalonado de Köthe* $\Lambda^p(E, \mathcal{A}, \mu, g_k)$, $p \geqslant 1$, *o bien* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio medida y* M *un subespacio cerrado separable. Entonces, existe una función* $f \in M$ *tal que, para toda* $h \in M$, $S(h_1) \subset S(f_1)$ *c. t. p., siendo* h_1 *y* f_1 *representantes arbitrarios de* h *y* f.

LEMA 8.—*Sea* $[E, \mathcal{T}]$ *un retículo vectorial topológico de Frechet, cuya topología está definida por una familia creciente de seminormas de retículo* $\{q_k, k \in N\}$ *tales que, para algún* $p \geqslant 1$ *se verifica* $q_k(x+y)^p = q_k(x)^p + q_k(y)^p$ *siempre que* $x \wedge y = 0$, $k \in N$. *Entonces, si* M *es un sub-retículo vectorial cerrado,* $M \neq \{0\}$, *existe una familia* $\{u_i, i \in I\}$ *de elementos positivos de* M, *disjuntos dos a dos, tal que, para todo* $x \in M$

$$x = \sum_{i \in I} J_{u_i}(x) \tag{3}$$

siendo la familia $\{J_{u_i}(x), i \in I\}$ *sumable, y con sólo una cantidad numerable de sumandos no nulos en (3).*

Dado un espacio medida $(E, \mathcal{A}, \mu)$ con $\mu(E) < \infty$, se sabe que identificando los conjuntos A y B tales que

$$\mu((A-B) \cup (B-A)) = 0,$$

obtenemos un espacio métrico con la métrica

$$\rho(A, B) = \mu(A-B) + \mu(B-A).$$

Usaremos el siguiente lema:

LEMA 9.—*Sea* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio medida con* $\mu(E) < \infty$. *Sea* $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ *y sean* $\mathcal{M}_1$ *y* $\mathcal{M}_2$ *el álgebra y la* σ*-álgebras generadas por* $\mathcal{M}$. *Entonces* $\mathcal{M}_1$ *es denso en* $\mathcal{M}_2$ *respecto a la métrica* ρ.

DEMOSTRACIÓN.—Basta ver que la clausura $\bar{\mathcal{M}}_1$ de $\mathcal{M}_1$ es una σ-álgebra. Es claro que $E \in \mathcal{M}_1 \subset \bar{\mathcal{M}}_1$. Si $M_1 \in \bar{\mathcal{M}}_1$ y $M_2 \in \bar{\mathcal{M}}_1$, dado $\varepsilon > 0$ existen A_1 y A_2 en $\mathcal{M}_1$ tales que

$$\rho(A_1, M_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad y \quad \rho(A_2, M_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces

$$A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}_1 \quad y \quad \rho(M_1 \cup M_2, A_1 \cup A_2) < \varepsilon,$$

luego $M_1 \cup M_2 \in \bar{\mathcal{M}}_1$. Si $M \in \bar{\mathcal{M}}_1$ y $\varepsilon > 0$, existe $A \in \mathcal{M}_1$ con $\rho(A, M) < \varepsilon$. Como $E - A \in \mathcal{M}_1$ y

$$\rho(E - M, E - A) = \mu(A - M) + \mu(M - A) < \varepsilon.$$

se tiene que $E - M \in \bar{\mathcal{M}}_1$. Finalmente, si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos de $\bar{\mathcal{M}}_1$, para ver que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \bar{\mathcal{M}}_1,$$

se puede suponer que los A_n son disjuntos dos a dos, pues $\bar{\mathcal{M}}_1$ es un álgebra, tal como se acaba de probar. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in N$ tal que

$$\mu\left(\bigcup_{i=n_0+1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=n_0+1}^{\infty} (A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$$

También existen $T_i \in \mathcal{M}_1$, $i = 1, 2, \ldots, n_0$ tales que

$$\rho(A_i, T_i) < \frac{\varepsilon}{2 n_0}.$$

Entonces

$$\bigcup_{i=1}^{n_0} T_i \in \mathcal{M}_1$$

y

$$\rho\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcup_{i=1}^{n_0} T_i\right) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n_0} A_i - \bigcup_{i=1}^{n_0} T_i\right) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n_0} T_i - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \mu\left(\bigcup_{i=n_0+1}^{\infty} A_i\right) \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{2 n_0} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

luego

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \bar{\mathcal{M}}_1$$

y $\bar{\mathcal{M}}_1$ es una σ-álgebra. c. q. d.

Finalmente necesitaremos un resultado de los espacios L^p, cuya demostración figura en [2], pág. 155.

LEMA 10.—*Sea* $p > 1$ *y P una proyección contractiva en un espacio* L^p. *Si* f *está en el rango de P,* $|f|^{p-1} sg(f)$ *está en el rango de la adjunta* P^*.

2. Sub-retículos K-complementados

Se sabe que si $(E, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio medida σ-finito y $f \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ y $\mathcal{B}$ es una sub- σ-álgebra de $\mathcal{A}$, por el teorema de Radon-Nykodym existe una única función $\mathcal{B}$-medible (salvo un conjunto de μ-medida cero), denotada por $\mathcal{E}(\mathcal{B}, \mu)(f)$ y tal que

$$\int_A f \, d\mu = \int_A \mathcal{E}(\mathcal{B}, \mu)(f) \, d\mu \quad \forall A \in \mathcal{B}$$

La función $\mathcal{E}(\mathcal{B}, \mu)(f)$ se llama la esperanza condicional de f respecto a la medida μ y la σ-álgebra $\mathcal{B}$. Es fácil ver que $\mathcal{E}(\mathcal{B}, \mu)$ es un operador positivo, esto es, si $f \geqslant 0$, es $\mathcal{E}(\mathcal{B}, \mu)(f) \geqslant 0$. Si f es $\mathcal{B}$-medible se tiene $\mathcal{E}(\mathcal{B}, \mu)(f) = f$. También se verifica (ver [6]) que si $1/p + 1/q = 1$, $p > 1$, y $f \in L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ y $h \in L^q(E, \mathcal{A}, \mu)$, entonces

$$|\mathcal{E}(\mathcal{B}, \mu)(f \cdot h)| \leq (\mathcal{E}(\mathcal{B}, \mu)(|f|^p))^{1/p} (\mathcal{E}(\mathcal{B}, \mu)(|h|^q))^{1/q} \tag{4}$$

Observemos ahora que si $h \geqslant 0$, $f \geqslant 0$ son funciones de un espacio escalonado de Köthe $\Lambda^p(E, \mathcal{A}, \mu, g_k)$, tenemos

$$\nu_k(A) = \int_A \frac{h}{f} \cdot f^p g_k \, d\mu < \infty \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad \forall k \in N$$

En efecto, si $p = 1$ es trivial. Si $p > 1$ y $1/p + 1/q = 1$, por la desigualdad de Hölder

$$\nu_k(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A} \cap \mathrm{S}(f)} \frac{h}{f} g_k^{1/p} f^{1+\frac{p}{q}} g_k^{1/q} \, d\mu \leq \left(\int_{\mathrm{A} \cap \mathrm{S}(f)} \frac{h^p}{f^p} f^p \cdot g_k \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_{\mathrm{A} \cap \mathrm{S}(f)} f^p g_k \, d\mu \right)^{1/q} < \infty$$

Consideremos la medida

$$\beta_k(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f^p g_k \, d\mu \qquad \mathrm{A} \in \mathcal{A}$$

Si S (f) es el soporte de un representante de f, podemos considerar el espacio medida (S (f), $\mathcal{A}$, β_k) y la esperanza condicional

$$\mathcal{E}(\mathcal{B}_f, f^p g_k) \left(\frac{h}{f} \right)$$

de la restricción de la función $\dfrac{h}{f}$ a S (f), respecto a la σ-álgebra $\mathcal{B}_f$ y la medida β_k. Se prolongará la definición de esta función a E, haciendo que valga cero en E — S (f).

TEOREMA 1.—*Sea* $\Lambda^p(E, \mathcal{A}, \mu, g_k)$ $p \geq 1$ *un espacio escalonado de Köthe. Un sub-retículo vectorial cerrado* M *de* Λ^p *es K-complementado en* Λ^p *si y sólo si para cada* $f \in M$, $f \geq 0$ *y cada* $h \in f^{\perp\perp}$, *cada función*

$$\mathcal{E}(\mathcal{B}_f, f^p g_{k+1}) \left(\frac{h}{f} \right)$$

coincide μ*-c. t. p. en* $S(g_k)$ *con*

$$\mathcal{E}(\mathcal{B}_f, f^p g_k) \left(\frac{h}{f} \right), \quad \forall k \in N.$$

DEMOSTRACIÓN.—Suficiencia. Sea M un sub-retículo vectorial cerrado que cumple las hipótesis del teorema. Por el lema 8 existe una familia $\{f_i, i \in \mathrm{I}\}$ de elementos positivos de M, disjuntos dos a dos, tales que para todo $h \in \mathrm{M}$

$$h = \sum_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{J}_{f_i}(h) \tag{5}$$

y sólo hay una familia numerable de sumandos no nulos en (5). Si S (f_i) es el soporte de un representante de f_i, se puede suponer además que, para cada i, existe una g_k distinta de cero en todo punto de S (f_i). En efecto: sea

$$\begin{aligned} K_{in} &= \{t \in S(f_i) / g_n(t) \neq 0, \quad g_{n-1}(t) = 0\} \qquad n = 2 \ldots \\ K_{i1} &= \{t \in S(f_i) / g_1(t) \neq 0\} \end{aligned}$$

y sea $f_{in} = f_i \cdot \chi_{K_{in}}$. Como los conjuntos K_{in}, $n \in N$ disjuntos dos a dos al variar n, para cada $r \in N$ tenemos

$$\int_E |J_{f_i}(h)|^p g_r \, d\mu = \int_{S(f_i)} |J_{f_i}(h)|^p g_r \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{K_{in}} |J_{f_i}(h)|^p g_r \, d\mu < \infty$$

luego

$$J_{f_i}(h) = \sum_{n=1}^{\infty} J_{f_i}(h) \chi_{K_{in}} = \sum_{n=1}^{\infty} J_{f_{in}}(h)$$

y por tanto se puede substituir cada f_i, $i \in I$, por la familia $\{f_{in}, n \in N\}$, y se obtiene así una nueva familia que cumple (5) y la condición adicional citada.

Veamos que para cada $i \in I$, existe una proyección P_i de $f_i^{\perp\perp}$ sobre el sub-retículo cerrado $M \cap f_i^{\perp\perp}$ tal que

$$\int_E |P_i(h)|^p g_k \, d\mu \leq \int_E |h|^p g_k \, d\mu \qquad \forall h \in f_i^{\perp\perp}, \quad \forall k \in N \tag{6}$$

Dado f_i, $i \in I$, existe $k \in N$, dependiente de i, tal que S $(f_i) \subset$ $\subset$ S (g_k). Sea $h \in f_i^{\perp\perp}$, $h \geqslant 0$. Definamos

$$T_1 = \left\{ t \in S(f_i) / \mathcal{E}(\mathcal{B}_{f_i}, f_i^p g_{k+1}) \left(\frac{h}{f_i}\right)(t) \neq \mathcal{E}(\mathcal{B}_{f_i}, f_i^p g_k) \left(\frac{h}{f_i}\right)(t) \right\}$$

y para $n \geqslant 2$

$$T_n = \left\{ t \in S(f_i) - \bigcup_{i=1}^{n-1} T_i / \mathcal{E}(\mathcal{B}_{f_i}, f_i^p g_{k+n}) \left(\frac{h}{f_i}\right)(t) \neq \mathcal{E}(\mathcal{B}_{f_i}, f_i^p g_{k+n-1}) \left(\frac{h}{f_i}\right)(t) \right\}$$

En virtud de la hipótesis, cada T_n es $\mathcal{B}_{f_i}$-medible y $\mu(T_n) = 0$.

Luego $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ es $\mathcal{B}_{f_i}$-medible, $\mu(T) = 0$ y por tanto, para cada $n \in N$, $\beta_{k+n}(T) = 0$. Entonces, cambiando la definición de

$$\mathcal{E}(\mathcal{B}_{f_i}, f_i^p g_{k+n}) \left(\frac{h}{f_i}\right)$$

en T, $n \in N$, dándole el valor cero por ejemplo, obtenemos una sucesión de funciones $\mathcal{B}_{f_i}$-medibles, con las propiedades de la esperanza condicional y tales que para todo $t \in S(f_i)$

$$\mathcal{E}(\mathcal{B}_{f_i}, f_i^p g_k) \left(\frac{h}{f_i}\right)(t) = \mathcal{E}(\mathcal{B}_{f_i}, f_i^p g_{k+n}) \left(\frac{h}{f_i}\right)(t) \tag{7}$$

Definamos

$$P_i(h) = f_i \mathcal{E}(\mathcal{B}_{f_i}, f_i^p g_k) \left(\frac{h}{f_i}\right) \qquad h \in f_i^{\perp\perp} \quad h \geq 0$$

Veamos que $P_i(h) \in \Lambda^p$. Para cada $r \in N$, $r \geqslant k$ tenemos si $p = 1$

$$\int_E |P_i(h)| g_r \, d\mu = \int_{S(f_i)} f_i \mathcal{E}(\mathcal{B}_{f_i}, f_i g_r) \left(\frac{h}{f_i}\right) g_r \, d\mu = \int_{S(f_i)} \frac{h}{f_i} f_i g_r \, d\mu < \infty \tag{8}$$

(por ser $\mathcal{E}$ un operador positivo y (7)) y si $p > 1$, por ser $\chi_{S(f_i)}$ $\mathcal{B}_{f_i}$-medible y las fórmulas (4) y (7), $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$

$$\int_E |P_i(h)|^p g_r \, d\mu = \int_{S(f_i)} f_i^p \left(\mathcal{E}(\mathcal{B}_{f_i}, f_i^p g_r) \left(\frac{h}{f_i}\right)\right)^p g_r \, d\mu \leq$$
$$\leq \int_{S(f_i)} f_i^p \mathcal{E}(\mathcal{B}_{f_i}, f_i^p g_r) \left(\left(\frac{h}{f_i}\right)^p\right) \left(\mathcal{E}(\mathcal{B}_{f_i}, f_i^p g_r)(\chi^q_{S(f_i)})\right)^{p/q} g_r \, d\mu =$$
$$= \int_{S(f_i)} f_i^p \mathcal{E}(\mathcal{B}_{f_i}, f_i^p g_r) \left(\left(\frac{h}{f_i}\right)^p\right) g_r \, d\mu = \int_{S(f_i)} \left(\frac{h}{f_i}\right)^p f_i^p g_r \, d\mu = \int_{S(f_i)} h^p g_r \, d\mu < \infty \tag{8}$$

luego $P_i(h) \in \Lambda^p$.

Veamos ahora que $P_i(h) \in M \cap f_i^{\perp\perp}$. Como M es sub-retículo cerrado, si $w \in M$ y $S(w)$ es el soporte de un representante de w tal que $S(w) \subset S(f_i)$, se tiene

$$f_i \chi_{S(w)} = J_w(f_i) = \lim_n f_i \wedge n \mid w \mid \in M \cap f_i^{\perp\perp}$$

Entonces, si s es una función simple $\mathcal{B}_{f_i}$-medible, también $s \cdot f_i \in \in M \cap f_i^{\perp\perp}$. Finalmente, existe una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples $\mathcal{B}_f$ -medibles, tales que, dándoles el valor cero en $E - S(f_i)$, se tiene

$$0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \leq \mathcal{E}(\mathcal{B}_{f_i}, f_i^p g_k)(h/f_i)$$

y

$$\lim_{n \to \infty} s_n(t) = \mathcal{E}(\mathcal{B}_{f_i}, f_i^p g_k)\left(\frac{h}{f_i}\right)(t).$$

Como

$$P_i(h) \in \Lambda^p \quad \text{y} \quad \mid P_i(h) - f_i s_n \mid^p \leqq \mid P_i(h) \mid^p$$

aplicando el teorema de la convergencia monótona de Lebesgue, tenemos

$$P_i(h) = \lim_{n \to \infty} f_i s_n \in M \cap f_i^{\perp\perp}$$

(pues este conjunto es cerrado).

Como el operador esperanza condicional es lineal es fácil ver que si h_1 y h_2 son funciones positivas de $f_i^{\perp\perp}$ y $\alpha \geqslant 0$ tenemos

$$P_i(h_1 + h_2) = P(h_1) + P(h_2); \quad P_i(\alpha h_1) = \alpha P_i(h_1).$$

Por un resultado bien conocido de teoría de retículos, P_i se puede extender a una aplicación lineal de $f_i^{\perp\perp}$ en $M \cap f_i^{\perp\perp}$, definiendo

$$P_i(h) = P_i(h^+) - P_i(h^-)$$

P_i es una proyección de $f_i^{\perp\perp}$ sobre $M \cap f_i^{\perp\perp}$: en efecto, si $h \in M \cap f_i^{\perp\perp}$, $h \geqslant 0$, dado α real

$$\left\{t \in S(f_i) / \frac{h}{f_i}(t) > \alpha\right\} = \begin{cases} \{t \in S(f_i)/h(t) > \alpha f_i(t)\} = S((h - \alpha f_i)^+) \in \mathcal{B}_{f_i} & \text{si } \alpha > 0 \\ S(h) \cap S(f_i) \in \mathcal{B}_{f_i} \quad \text{si } \alpha = 0 \\ S(f_i) \in \mathcal{B}_{f_i} \quad \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Entonces $\dfrac{h}{f_i}$ es $\mathcal{B}_{f_i}$-medible. Lo mismo sucede para $h \in \mathrm{M} \cap f_i^{\perp\perp}$ arbitraria, pues $h = h^+ - h^-$. Por tanto

$$\mathrm{P}_i(h) = f_i\, \mathcal{E}(\mathcal{B}_{f_i}, f_i^p g_k) \left(\frac{h}{f_i}\right) = f_i \cdot \frac{h}{f_i} = h$$

Finalmente, observemos que P_i es un operador positivo y que por (8), para $h \in f_i^{\perp\perp}$

$$\int_{\mathrm{E}} |\mathrm{P}_i(h)|^p g_r \, d\mu \leq \int_{\mathrm{E}} (\mathrm{P}_i(h^+) + \mathrm{P}_i(h^-))^p g_r \, d\mu = \int_{\mathrm{E}} \mathrm{P}_i(|h|)^p g_r \, d\mu \leq$$
$$\leq \int_{\mathrm{E}} |h|^p g_r \, d\mu$$

si $r \geqslant k$ (pues $\mathrm{S}(h) \subset \mathrm{S}(f_i)$). Si $r < k$, por hipótesis, tenemos

$$\mathcal{E}(\mathcal{B}_{f_i}, f_i^p g_r) \left(\frac{h}{f_i}\right) = \mathcal{E}(\mathcal{B}_{f_i}, f_i^p g_k) \left(\frac{h}{f_i}\right)$$

μ-c. t. p. en $\mathrm{S}(f_i) \cap \mathrm{S}(g_r)$, luego, razonando como en (8),

$$\int_{\mathrm{E}} |\mathrm{P}_i(h)|^p g_r \, d\mu \leq \int_{\mathrm{E}} \mathrm{P}_i(|h|)^p g_r \, d\mu = \int_{\mathrm{S}(g_r)} f_i^p \left(\mathcal{E}(\mathcal{B}_{f_i}, f_i^p g_r) \left(\frac{|h|}{f_i}\right)\right)^p g_r \, d\mu \leq$$
$$\leq \int_{\mathrm{S}(f_i)} f_i^p \left(\mathcal{E}(\mathcal{B}_{f_i}, f_i^p g_r) \left(\frac{|h|}{f_i}\right)\right)^p g_r \, d\mu \leq \int_{\mathrm{S}(f_i)} |h|^p g_r \, d\mu = \int_{\mathrm{E}} |h|^p g_r \, d\mu$$

y por tanto se cumple (6).

Por último veamos que M es K-complementado. Consideremos la banda $\mathrm{M}^{\perp\perp}$, que es cerrada en Λ^p, por el teorema de Riesz, al ser Λ^p orden completo. Probemos previamente que, para todo $h \in \mathrm{M}^{\perp\perp}$

$$h = \sum_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{J}_{f_i}(h) \tag{9}$$

Basta hacer la demostración para $h \geqslant 0$, pues para h arbitrario en $\mathrm{M}^{\perp\perp}$, $h = h^+ - h^-$. Sea pues $h \geqslant 0$, $h \in \mathrm{M}^{\perp\perp}$. Como los elementos

$f_i \in$ M son disjuntos dos a dos, para cada parte finita $\mathrm{F} \subset \mathrm{I}$

$$\sum_{i \in \mathrm{F}} \mathrm{J}_{f_i}(h) = \mathrm{J}_{\sum\limits_{i \in \mathrm{F}} f_i}(h) \leq h$$

y como las funciones $\mathrm{J}_{f_i}(h)$ son elementos disjuntos de Λ^p, para todo $k \in \mathrm{N}$

$$\sum_{i \in \mathrm{F}} \int_{\mathrm{E}} |\mathrm{J}_{f_i}(h)|^p g_k \, d\mu = \int_{\mathrm{E}} \left| \sum_{i \in \mathrm{F}} \mathrm{J}_{f_i}(h) \right|^p g_k \, d\mu \leq \int_{\mathrm{E}} |h|^p g_k \, d\mu$$

luego la familia $\{\mathrm{J}_{f_i}(h),\ i \in \mathrm{I}\}$ es sumable en Λ^p y la red

$$\left\{ \sum_{i \in \mathrm{F}} \mathrm{J}_{f_i}(h), \quad \mathrm{F} \subset \mathrm{I}, \quad \mathrm{F} \text{ finito} \right\} \subset \mathrm{M}^{\perp\perp}$$

es convergente. Veamos que su límite $\sum\limits_{i \in \mathrm{F}} \mathrm{J}_f(h)$ es igual a h. Por ser Λ^p metrizable, existe una sucesión expansiva $\{\mathrm{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de partes finitas de I, tales que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i \in \mathrm{F}_n} \mathrm{J}_{f_i}(h) = \sum_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{J}_{f_i}(h) \leq h$$

(pues la convergencia en Λ^p, implica la convergencia puntual μ-c. t. p. de una subsucesión). Sea

$$z = h - \sum_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{J}_{f_i}(h) \geq 0.$$

Para cada $i \in \mathrm{I}$,

$$0 \leq z \wedge f_i = \left(h - \sum_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{J}_{f_i}(h) \right) \wedge f_i \leq (h - \mathrm{J}_{f_i}(h)) \wedge f_i \leq \mathrm{J}_{f_i}(h - \mathrm{J}_{f_i}(h)) = 0$$

Entonces, los representantes de z tienen soportes disjuntos de los soportes de los representantes de f_i, cualquiera que sea $i \in \mathrm{I}$ (excepto un conjunto de medida cero); por (5), los representantes de z tienen soportes disjuntos (salvo un conjunto de medida cero) de los soportes de los representantes de cualquier $h \in M$, luego $z \in M^{\perp}$ y como, por definición de z, $z \in M^{\perp\perp}$, se tiene $z = 0$. Por tanto (9) queda probada.

Vamos a definir una proyección de Λ^p sobre M que cumplirá (1). Por el teorema de Riesz, existe una proyección $J : \Lambda^p \longrightarrow M^{\perp\perp}$ tal que si $h \geqslant 0$,

$$J(h) = \sup \{ z \in M / 0 \leq z \leq h \} \leq h$$

Entonces, para $h \in \Lambda^p$ definimos

$$P(h) = \sum_{i \in I} P_i J_{f_i} J(h)$$

Como los representantes de las funciones $P_i J_{f_i} J(h)$, $(J_{f_i}(h))$, $i \in I$, tienen soportes disjuntos dos a dos, salvo un conjunto de medida cero, por la propia definición de P_i (de J_{f_i}), y como cada operador P_i, J_{f_i} y J es positivo, usando (6) y (9), se tiene para cada $k \in N$, cada parte finita $F \subset I$ y cada $h \in \Lambda^p$, $h \geqslant 0$

$$\begin{aligned}\int_E \left| \sum_{i \in F} (P_i J_{f_i} J)(h) \right|^p g_k \, d\mu &= \sum_{i \in F} \int_E |(P_i J_{f_i} J)(h)|^p g_k \, d\mu \leq \\ \leq \sum_{i \in F} \int_E |(J_{f_i} J)(h)|^p g_k \, d\mu &= \int_E \left| \sum_{i \in F} (J_{f_i} J)(h) \right|^p g_k \, d\mu \leq \\ \leq \int_E \left| \sum_{i \in I} (J_{f_i} J)(h) \right|^p g_k \, d\mu &= \int_E |J(h)|^p g \, d\mu \leq \int_E |h|^p{}_k g_k \, d\mu \end{aligned} \tag{10}$$

Se tiene la misma acotación para una función h arbitraria ya que como $P_i J_{f_i} J$ es operador positivo

$$\begin{aligned}\int_E \left| \sum_{i \in F} (P_i J_{f_i} J)(h) \right|^p g_k \, d\mu &\leqq \int_E \left(\sum_{i \in F} ((P_i J_{f_i} J)(h^+) + (P_i J_{f_i} J)(h^-)) \right)^p g_k \, d\mu = \\ = \int_E \left| \sum_{i \in F} (P_i J_{f_i} J)(|h|) \right|^p g_k \, d\mu &\leqq \int_E |h|^p g_k \, d\mu \end{aligned} \tag{10}$$

Entonces, la familia $\{P_i J_{f_i} J(h),\ i \in I\}$ es sumable y por tanto $P(h)$ está bien definida. Como $J_{f_i} J(h) \in f_i^{\perp\perp}$ cada sumando que interviene en la definición de $P(h)$ está en M; como M es cerrado,

$P(h) \in M$. Si $h \in M$,

$$J_{f_i} J(h) = J_{f_i}(h) \in M \cap f_i^{\perp\perp}$$

luego

$$P(h) = \sum_{i \in I} (P_i J_{f_i} J)(h) = \sum_{i \in I} (P_i J_{f_i})(h) = \sum_{i \in I} J_{f_i}(h) = h$$

(por (9)). Por tanto P es una proyección de Λ^p sobre M. Tomando límites en (10) al variar $F \subset I$, F parte finita, vemos que se cumple (1). Luego M es K-complementado.

Necesidad. Veamos primeramente el caso $p \neq 2$. Sea M un sub-retículo K-complementado y sea P una proyección de Λ^p sobre M que cumple (1). Sea $f \in M$, $f \geqslant 0$, $h \in f^{\perp\perp}$. Por el lema 6, $\dfrac{P(h)}{f}$ es $\mathcal{B}_f$-medible. Si demostramos que para cada $k \in N$,

$$\int_A \frac{P(h)}{f} f^p g_k \, d\mu = \int_A \frac{h}{f} f^p g_k \, d\mu \quad \forall A \in \mathcal{B}_f \tag{11}$$

entonces, por la unicidad de la esperanza condicional, será

$$\mathcal{E}(\mathcal{B}_f, f^p g_k)\left(\frac{h}{f}\right) = \frac{P(h)}{f} \qquad \beta_k - \text{c. t. p. en } S(f)$$

Entonces, si

$$T = \left\{ t \in S(f) / \mathcal{E}(\mathcal{B}_f, f^p g_k)\left(\frac{h}{f}\right)(t) \neq \frac{P(h)}{f}(t) \right\},$$

T es $\mathcal{B}_f$-medible y

$$0 = \int_T f^p g_k \, d\mu \geq \int_{T \cap S(f) \cap S(g_k)} f^p g_k \, d\mu \geq 0$$

Por tanto

$$\mu(T \cap S(f) \cap S(g_k)) = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{E}(\mathcal{B}_f, f^p g_k)\left(\frac{h}{f}\right) = \frac{P(h)}{f}$$

μ-c. t. p. en $S(g_k)$, pues en $E - S(f)$ ambas son nulas. De esta igualdad se deduce la condición necesaria.

Para probar (11), dado $A \in \mathcal{B}_f$, sea $g \in M$ con un representante cuyo soporte $S(g) = A \subset S(f)$. Por el lema 2, $u = J_g(f) = P\, J_g(f) \in M$.

Supongamos primero $p = 1$. Sea $z \in \Lambda$, $z \geqslant 0$. Por definición de $J_g(f)$, u es nula en $E - A$ e igual a f en A. La función $v = f - u$ será cero en A e igual a f en $E - A$. Entonces, por el lema 3, apartados b) y c)

$$\int_A z g_k \, d\mu = \int_A |J_u(z)| g_k \, d\mu = \int_E | \quad {}_u z)| g_k \, d\mu = \int_E |P(z \cdot sg(u))| g_k \, d\mu =$$
$$= \int_E P(z \cdot sg(u)) \cdot sg(u) g_k \, d\mu = \int_A P(z \cdot sg(u)) g_k \, d\mu = \int_A P\, J_g(z \cdot sg(f)) g_k \, d\mu$$

ya que $u \geqslant 0$ y $z \cdot \mathrm{sg}(u) = J_g(z \cdot \mathrm{sg}(f))$, como es fácil de comprobar. Ahora por el lema 3, apartado a)

$$J_u P J_u(z \cdot sg(f)) + J_v P J_v(z \cdot sg(f)) = (P J_u + P J_v)(z \cdot sg(f)) = P(z \cdot sg(f))$$

ya que $(J_u + J_v)(z \cdot \mathrm{sg}(f)) = z \cdot \mathrm{sg}(f)$. Por tanto

$$\int_A P(z \cdot sg(f)) g \quad d\mu = \int_A J_u P J_u(z \cdot sg(f)) g_k \, d\mu + \int_A J_v P J_v(z \cdot sg(f)) g_k \, d\mu =$$
$$= \int_A J_u P J_u(z \cdot sg(f)) g_k \, d\mu = \int_A P J_u(z \cdot sg(f)) g_k \, d\mu = \int_A P J_g(z \cdot sg(f)) g_k \, d\mu$$

luego,

$$\int_A z g_k \, d\mu = \int_A P(z \cdot sg(f)) g_k \, d\mu \tag{12}$$

Si $h \geqslant 0$, tomando $z = h$ en (12), como $S(h) \subset S(f)$ c. t. p. para el soporte de cualquier representante de h, se tiene

$$\int_A h g_k \, d\mu = \int_A \frac{h}{f} f g \quad d\mu = \int_A P(h \cdot sg(f)) g_k \, d\mu = \int_A \frac{P(h)}{f} \cdot f g_k \, d\mu$$

y se cumple (11). Si $h \in f^{\perp\perp}$ es arbitraria, también h^+ y h^- están en $f^{\perp\perp}$, y por tanto también se cumple (11).

Veamos ahora el caso $p > 1$. Como $J_g(h)$ es igual a h en A y nula en E — A tenemos

$$\int_A \frac{h}{f} f^p g_k \, d\mu = \int_E J_g(h) \cdot f^{p-1} g_k \, d\mu = \int_{S(g_k)} J_{I_k} (I_k(h)) I_k(f)^{p-1} g_k \, d\mu \qquad (13)$$

Por el lema 10, como $I_k(f)$ pertenece al rango de la proyección contractiva P_k del espacio $\Lambda^p{}_k$ (construida como en el lema 2), $|f|^{p-1} \cdot \mathrm{sg}(f)$ está en el rango de la adjunta $P^*{}_k$. Por la dualidad entre un espacio L^p y su dual, la integral de (13) es igual a

$$= \int_{S(g_k)} J_{I_k(g)} (I_k(h)) P_k{}^* ((I_k(f))^{p-1}) g_k \, d\mu =$$

$$= \int_{S(g_k)} P_k J_{I_k(g)} (I_k(h) \cdot (I_k(f))^{p-1}) g_k \, d\mu = \text{(por el lema 1, apartado 3, b))} =$$

$$= \int_{S(g_k)} J_{I_k(g)} P_k I_k(h) \cdot (I_k(f))^{p-1} g_k \, d\mu = \int_{S(g_k) \cap A} P_k I_k(h) \cdot (I_k(f))^{p-1} g_k \, d\mu =$$

$$= \int_{S(g_k) \cap A} \frac{P(h)}{f} \cdot f^p g_k \, d\mu = \int_A \frac{P(h)}{f} f^p g_k \, d\mu$$

con lo que queda probada la necesidad en el caso $p \neq 2$.

Veamos ahora el caso $p = 2$. Sea P una proyección de Λ^2 sobre M que cumple (1) y sea $f \geqslant 0$, $f \in M$. Sea $S(f)$ el soporte de un representante de f y

$$S(I_k(f)) = S(g_k) \cap S(f)$$

para $k \in N$. Construimos para cada $k \in N$, según la técnica del lema 2, una proyección contractiva

$$P_k : \Lambda^2{}_k \longrightarrow M_k = \overline{I_k(M)}$$

(clausura en $[\Lambda^2{}_k, \mathcal{T}_k]$). En efecto, es claro por definición de P_k que el rango de P_k, $R(P_k) \subset M_k$ y si $h \in M_k$, existe $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ tal que

$$h = \lim_n I_k(h_n),$$

y

$$P_k(h) = \lim_n P_k I_k(h_n) = \lim_n I_k P(h_n) = \lim_n I_k(h_n) = h \in M_k$$

Si $I_k(f)^{\perp\perp}$ es la banda engendrada por $I_k(f)$ en Λ^2_k, consideremos la aplicación

$$H_k = J_{I_k(f)} P_k : I_k(f)^{\perp\perp} \longrightarrow M_k \cap I_k(f)^{\perp\perp}$$

En efecto, dado $h \in I_k(f)^{\perp\perp}$, como $P_k(h) \in M_k$ (que es un retículo cerrado en Λ^2_k) e $I_k(f) \in M_k$ tenemos

$$J_{I_k(f)} P_k(h) = \lim_n ((P_k(h))^+ \wedge n I_k(f) - (P_k(h))^- \wedge n I_k(f)) \in M_k \cap I_k(f)^{\perp\perp}$$

y si

$$h \in M_k \cap I_k(f)^{\perp\perp}, \quad H_k(h) = J_{I_k(f)}(h) = h,$$

luego H_k está bien definida y es una proyección contractiva del espacio de Hilbert $I_k(f)^{\perp\perp}$ sobre $M_k \cap I_k(f)^{\perp\perp}$.

Observemos ahora que la clausura en Λ^2_k

$$\overline{I_k(f)^{\perp\perp} \cap I_k(\Lambda^2)} = I_k(f)^{\perp\perp}$$

pues si $h \in I_k(f)^{\perp\perp}$, existe $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Lambda^2$ tal que

$$h = \lim_n I_k(h_n) = \lim_n I_k(h_n) \chi_{S(I_k(f))} = \lim_n I_k(h_n \chi_{S(I_k(f))}) \in \overline{I_k(f)^{\perp\perp} \cap I_k(\Lambda^2)}$$

También se verifica que

$$\overline{I_k(M \cap f^{\perp\perp})} = M_k \cap I_k(f)^{\perp\perp}$$

En efecto: si $h \in M_k(f)^{\perp\perp}$, los representantes de h tienen soportes contenidos c. t. p. en $S(I_k(f))$ y existe $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ tal que

$$h = \lim_n I_k(h_n) = \lim_n I_k(h_n) \chi_{S(I_k(f))} = \lim_n I_k(h_n \chi_{S(f)}) = \lim_n I_k J_f(h_n) \in \overline{I_k(M \cap f^{\perp\perp})}$$

pues $J_f(h_n) \in M \cap f^{\perp\perp}$; la inclusión opuesta es evidente.

Entonces, para $h \geqslant 0$, $h \in I_k(f)^{\perp\perp} \cap I_k(\Lambda^2)$, si $h' \in f^{\perp\perp}$ es tal que $I_k(h') = h$, definimos

$$G_k(h) = I_k\left(f \cdot \mathcal{E}(\mathcal{B}_f, f^2 g_k)\left(\frac{h'}{f}\right)\right)$$

Repitiendo los cálculos de (8) y siguientes con $r = k$, vemos que G_k contrae la seminorma derivada de g_k y por tanto está bien definida independientemente de h' (ver lema 2). Además $G_k(h) \in M_k \cap \cap I_k(f)^{\perp\perp}$ e igual que entonces G_k se extiende a $I_k(f)^{\perp\perp} \cap I_k(\Lambda^2)$ y, por continuidad, conservando la misma notación, se extiende a una proyección contractiva de $I_k(f)^{\perp\perp}$ con rango $M_k \cap I_k(f)^{\perp\perp}$: En efecto, si $h \in I_k(M \cap f^{\perp\perp})$, se prueba igual que en el caso $p \neq 2$, que $G_k(h) = h$. Por tanto $G_k(h) = h$ para todo $h \in M_k \cap I_k(f)^{\perp\perp}$. Por otra parte, de la definición de G_k se deduce que su rango $R(G_k) \subset M_k \cap I_k(f)^{\perp\perp}$.

Tenemos entonces dos proyecciones contractivas H_k y G_k en el espacio de Hilbert $I_k(f)^{\perp\perp}$ con el mismo rango $M_k \cap I_k(f)^{\perp\perp}$. Entonces ambas deben coincidir con el proyector sobre $M_k \cap I_k(f)^{\perp\perp}$. Luego, para cada $k \in N$ y cada $h \in f^{\perp\perp}$,

$$J_{I_k(f)} P(h) = I_k\left(f \cdot \mathcal{E}(\mathcal{B}_f, f^2 g_k)\left(\frac{h}{f}\right)\right)$$

Como $S(g_k) \subset S(g_{k+1})$, en $S(g_k) \cap S(f)$

$$\mathcal{E}(\mathcal{B}_f, f^2 g_k)\left(\frac{h}{f}\right) = \mathcal{E}(\mathcal{B}_f, f^2 g_{k+1})\left(\frac{h}{f}\right)$$

c. t. p. y por tanto también coinciden c. t. p. en $S(g_k)$, c. q. d.

Ejemplo.—Existen sub-retículos cerrados no K-complementados. Consideremos una sucesión doble $a^k = (a_n^k)$, $k, n \in N$ tal que $a_n^k > 0$ para todo k y n tal que $a_n^k \leqslant a_n^{k+1}$. Consideremos el espacio escalonado de sucesiones

$$\lambda = \left\{ x = (x_n) / \sum_{n \in N} | x_n a_n^k | < \infty \quad \forall k \in N \right\}$$

Sea $y = (y_n)$ un elemento positivo no nulo de λ. Sea

$$T = \{n \in N / y_n \neq 0\}.$$

Es claro que $M = \{\alpha \cdot y, \alpha \in R\}$ es un sub-retículo cerrado de λ. La σ-álgebra $\mathcal{B}_y$ consta de dos conjuntos: T y $\varnothing$. Para cada $h \in y^{\perp\perp}$, la función $\mathcal{E}(\mathcal{B}_y, y \cdot a^k)\left(\frac{h}{y}\right)$ debe ser una constante $\alpha_k\left(\frac{h}{y}\right) \neq 0$ (si $h \neq 0$), pues en otro caso no podría ser $\mathcal{B}_y$-medible. Si M fuera K-complementado, por el teorema 1 sería

$$\alpha_k\left(\frac{h}{y}\right) = \alpha_{k+1}\left(\frac{h}{y}\right) \quad \forall k \in N$$

y por la definición de esperanza condicional

$$\sum_{n \in T} \alpha_k\left(\frac{h}{y}\right) y_n a_n^k = \sum_{n \in T} \frac{h_n}{y_n} y_n a_n^k = \sum_{n \in T} h_n a_n^k \quad \forall h \in y^{\perp\perp}, \quad \forall k \in N$$

En particular, tomando como función h la sucesión e^i, $i \in T$, tal que tiene todas sus componentes nulas, excepto la i-sima que vale 1, se llegaría a

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_k\left(\frac{e^i}{y}\right) = \alpha_{k+1}\left(\frac{e^i}{y}\right) \quad \forall i \in T, \ k \in N \\ \alpha_k\left(\frac{e^i}{y}\right) \sum_{n \in T} y_n a_n^k = a_i^k \\ \qquad\qquad \forall k \in N \quad \forall i \in T \\ \alpha_{k+1}\left(\frac{e^i}{y}\right) \sum_{n \in T} y_n a_n^{k+1} = a_i^{k+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_i^k}{\sum_{n \in T} y_n a_n^k} = \frac{a_i^{k+1}}{\sum_{n \in T} y_n a_n^{k+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_i^{k+1} = \left(\frac{\sum_{n \in T} y_n a_n^{k+}}{\sum_{n \in T} y_n a_n^k}\right) a_i^k \quad \forall i \in T \quad \forall k \in N$$

Luego las restricciones de a^k a T serían múltiplos de la restricción de a^1. Entonces la sección por T de λ,

$$\lambda(T) = \{x = (x_n) \in \lambda / x_n = 0 \quad \text{si} \quad n \notin T\}$$

sería un espacio normado con la topología inducida por λ. Tomando por ejemplo λ = espacio de las sucesiones rápidamente decrecientes e y una sucesión con $y_n \neq 0$ para todo $n \in N$, se tiene $\lambda(T) = \lambda$ y se llega a una contradicción. Luego en este caso M no es K-complementado, c. q. d.

TEOREMA 2.—*Sea* $\Lambda^p(E, \mathcal{H}, \mu, g_k)$, $p \geqslant 1$, *un espacio escalonado de Köthe. Sea M un sub-retículo vectorial cerrado de* Λ^p. *Si para cada* f $\in$ *M,* f $\geqslant 0$ *y cada* k $\in$ *N las restricciones de* $\dfrac{g_k}{g_{k+1}}$ *al soporte S* (f) *de un representante de* f, *son* $\mathcal{B}_f$*-medibles, M es K-complementado.*

DEMOSTRACIÓN.—Para $h \in f^{\perp\perp}$, $f \in$ M, $f \geqslant 0$, en virtud de la hipótesis, para cada B $\in \mathcal{B}_f$

$$\int_B \mathcal{E}(\mathcal{B}_f, f^p g_{k+1})\left(\frac{h}{f}\right) f^p g_k \, d\mu = \int_B \frac{g_k}{g_{k+1}} \mathcal{E}(\mathcal{B}_f, f^p g_{k+1})\left(\frac{h}{f}\right) f^p g_{k+1} \, d\mu =$$
$$= \int_B \frac{g_k}{g_{k+1}} \frac{h}{f} f^p g_{k+1} \, d\mu = \int_B \frac{h}{f} \cdot f^p g_k \, d\mu$$

y por la unicidad de la esperanza condicional, se tiene

$$\mathcal{E}(\mathcal{B}_f, f^p g_k)\left(\frac{h}{f}\right) = \mathcal{E}(\mathcal{B}_f, f^p g_{k+1})\left(\frac{h}{f}\right) \tag{14}$$

excepto en un conjunto T $\mathcal{B}_f$-medible en el que

$$0 = \int_T f^p g_k \, d\mu \geq \int_{T \cap S(f) \cap S(g_k)} f^p g_k \, d\mu \geq 0$$

luego (14) se cumple en S $(f) \cap$ S (g_k) excepto en un conjunto de μ-medida cero. Por el teorema 1, M es K-complementado, c. q. d.

DEFINICIÓN 2.—Se dice que un subespacio M de un espacio escalonado de Köthe $\Lambda^p(E, \mathcal{H}, \mu, g_k)$, $p \geqslant 1$, es K-isomorfo a un espacio escalonado de Köthe, si existe un espacio escalonado de Köthe Γ^p (T, $\mathcal{M}$, ν, h_k) y un isomorfismo φ de Γ^p sobre M tal que

$$\int_E |\varphi(f)|^p g_k \, d\mu = \int_T |f|^p h_k \, d\nu \quad \forall f \in \Gamma^p, \quad \forall k \in N$$

Se tiene el siguiente teorema de existencia:

TEOREMA 3.—*Sea* Λ^p $(E, \mathcal{H}, \mu, g_k)$ $p \geqslant 1$ *un espacio escalonado de Köthe. Sea G un subconjunto separable de* Λ^p. *Entonces existe un subespacio separable F de* Λ^p, *K-complementado en* Λ^p, *K-isomorfo a un espacio escalonado de Köthe y tal que* $\dot{G} \subset F$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión densa en G. Si S (f_n) es el soporte de un representante de f_n, $n \in$ N, se sabe que

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S(f_n)$$

es un conjunto σ-finito (ver [3]). Como

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r=1}^{\infty} \{t \in S / |f_n(t)|^p > 1/r\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r=1}^{\infty} B_{rn}$$

y como

$$\int_{B_{rn}} g_k \, d\mu \leq r \int_{B_{rn}} |f_n|^p g_k \, d\mu < \infty$$

existe una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos disjuntos dos a dos, tales que cada g_k es integrable en cada B_n, k, $n \in$ N, μ $(B_n) < \infty$ y

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Sea

$$\left\{ f_n^m = \sum_{i=1}^{k(m,n)} a_i \chi_{A_{mni}} \right\}_{m=1}^{\infty}$$

una sucesión de funciones simples en Λ^p tales que

$$\lim_{m \to \infty} f_n^m = f_n$$

en $[\Lambda^p, \mathcal{C}]$ y

$$\lim_{m \to \infty} f_n^m(t) = f_n(t)$$

para todo $t \in S$ y $f_n^m(t) = 0$ si $t \in E - S$.

Sea

$$\mathcal{B}_{1n} = \{B_n \cap A_{rmi};\quad i = 1, 2, \ldots k(r, m),\quad r, m \in N\}$$

y para cada racional r y cada $k \in N$ sea

$$M_{krn} = \left\{ t \in B_n / \frac{g_k(t)}{g_{k+1}(t)} > r \right\}$$

Sea

$$\mathcal{B}_{2n} = \{M_{krn},\quad k \in N,\quad r \in Q\}$$

y sea $\mathcal{B}_n$ la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{B}_{1n} \cup \mathcal{B}_{2n}$ en el conjunto B_n. Finalmente sea

$$\mathcal{B} = \left\{ A / A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\quad A_n \in \mathcal{B}_n \right\}$$

Es claro que $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra en S y que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Por el teorema de Radon-Nykodym, existe una función φ_{kn} $\mathcal{B}_n$-medible tal que

$$\int_B g_k \, d\mu = \int_B \varphi_{kn} \, d\mu \quad \forall B \in \mathcal{B}_n$$

Definamos φ_k tal que $\varphi_k(t) = \varphi_{kn}(t)$ si $t \in B_n$. Entonces φ_k es $\mathcal{B}$-medible, $k \in N$. El conjunto

$$T = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{t \in S / \varphi_k(t) = 0\}$$

es $\mathcal{B}$-medible y para todo $k \in N$

$$0 = \int_{B_n \cap T} \varphi_k \, d\mu = \int_{B_n \cap T} \varphi_{kn} \, d\mu = \int_{B_n \cap T} g_k \, d\mu.$$

Si fuese $\mu(B_n \cap T) > 0$, debería ser para todo $k \in N$, $g_k = 0$ μ-c. t. p. en $B_n \cap T$, luego

$$B_n \cap T \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \{t \in S/g_k(t) = 0\}$$

μ-c. t. p. Como este último conjunto es de medida cero, se llegaría a una contradicción. Luego $\mu(B_n \cap T) = 0$ para todo $n \in N$ y por tanto $\mu(T) = 0$.

Consideremos entonces el espacio escalonado de Köthe Γ^p (S, $\mathcal{B}$, μ, φ_k) y la aplicación i: $\Gamma^p \longrightarrow \Lambda^p$ tal que si $f \in \Gamma^p$, $i(f) = f$ en S e $i(f) = 0$ en E — S. La aplicación i está bien definida, pues si $f \in \Gamma^p$, f es $\mathcal{B}$-medible y por tanto $i(f)$ es $\mathcal{H}$-medible y

$$\int_S |f|^p \varphi_k \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} |f|^p \varphi_{kn} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} |f|^p g_k \, d\mu =$$
$$= \int_E |i(f)|^p g_k \, d\mu \tag{15}$$

Por tanto $i(f) \in \Lambda^p$, i es lineal, inyectiva y la imagen $F = i(\Gamma^p)$ es un sub-retículo cerrado de Λ^p, K-isomorfo a Γ^p.

Veamos que $F \supset G$. Como f_n^m es nula en E — S y $\mathcal{B}$-medible, y además $f_n^m \in \Lambda^p$, por (15) vemos que $f_n^m \in F$. Como F es cerrado, $f_n \in F$ y por tanto $G \subset F$.

Para ver que F es separable basta ver que Γ^p lo es. Como $\mathcal{B}_{1n} \cup \mathcal{B}_{2n}$ es numerable, por un resultado bien conocido (ver [1]) el álgebra $\mathcal{H}_n$ generada por $\mathcal{B}_{1n} \cup \mathcal{B}_{2n}$ en B_n es numerable. El conjunto de las funciones simples

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m(i)} \alpha_{ij} \chi_{A_{ij}}, \quad \alpha_{ij} \in Q, \quad A_{ij} \in \mathcal{H}_j \right\}$$

es numerable y $\mathcal{P} \subset \Gamma^p$. Vamos a ver que $\mathcal{P}$ es denso en Γ^p. Sea $f \in \Gamma^p$. Como dado $\varepsilon > 0$, $k \in N$ existe n_0 tal que

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \int_{B_n} |f|^p \varphi_k \, d\mu \leq \varepsilon,$$

es suficiente aproximar $f \cdot \chi_{B_n}$, $n = 1, 2, \ldots, n_0$ por elementos del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \quad \alpha_i \in Q, \quad A_i \in \mathcal{A}_n.$$

Pero $f \cdot \chi_{B_n}$ es el límite en Γ^p de una sucesión de funciones simples nulas en $S - B_n$. Entonces basta aproximar las funciones $\alpha \chi_M$, $\alpha \neq 0$, $M \in \mathcal{B}_n$. Dado $\varepsilon > 0$ y $k \in N$, como φ_k es integrable en B_n (por la definición de φ_{kn}) existe un racional $\beta \neq 0$ tal que

$$|\beta - \alpha|^p < \frac{\varepsilon}{3 \int_{B_n} \varphi_k d\mu}.$$

($|\beta - \alpha|^p < \varepsilon/3$ si el denominador anterior fuera cero). También existe $\delta > 0$ tal que si $\mu(T) < \delta$ se tiene

$$\int_T \varphi_k d\mu < \text{MAX}\left(\frac{\varepsilon}{3|\beta|^p}; \frac{\varepsilon}{3|\alpha|^p}\right)$$

Por el lema 9 existe $A \in \mathcal{A}_n$ tal que

$$\mu(A - M) + \mu(M - A) < \delta.$$

Entonces $\beta \chi_A \in \mathcal{P}$ y

$$\int_{B_n} |\beta \chi_A - \alpha \chi_M|^p \varphi_k d\mu = |\beta|^p \int_{A-M} \varphi_k d\mu + |\alpha|^p \int_{M-A} \varphi_k d\mu +$$
$$+ |\beta - \alpha|^p \int_{A \cap M} \varphi_k d\mu < \varepsilon$$

y F es separable, c. q. d.

Finalmente veamos que F es K-complementado. Por el lema 7, al ser F separable, existe una función $f_0 \in F$ tal que si $S(f_0)$ es el soporte de un representante de f_0 y $S(h)$ es el soporte de un representante de $h \in F$, tenemos $S(h) \subset S(f_0)$ c. t. p. cualquiera que sea $h \in F$. Se puede tomar f_0 tal que $S(f_0) = S$, pues si

$$\mu(S - S(f_0)) > 0.$$

existiría $n \in$ N tal que

$$\mu(H) = \mu((S - S(f_0)) \cap B_n) > 0$$

Como cada φ_k es integrable en B_n por definición de φ_{kn}, se tendría $i(\chi_H) \in$ F con un soporte de medida no nula disjunto de S (f_0), lo cual es una contradicción.

Por consideraciones sobre los soportes, es claro que $F \subset f_0^{\perp\perp}$ en Λ^p. Por el teorema 2 y la demostración de la condición suficiente del teorema 1, para probar que F es K-complementado en Λ^p basta ver que las restricciones a S de las funciones $\dfrac{g_k}{g_{k+1}}$ son B_{f_0}-medibles. Si $\alpha \in$ R y $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de racionales con $\lim\limits_n r_n = \alpha$, tenemos

$$A = \left\{ t \in S / \frac{g_k(t)}{g_{k+1}(t)} > \alpha \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ t \in B_n / \frac{g_k(t)}{g_{k+1}(t)} > \alpha \right\} =$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ t \in B_n / \frac{g_k(t)}{g_{k+1}(t)} > r_m \right\} \in \mathcal{B}$$

por definición de $\mathcal{B}$. Como

$$f_0 \in F, \quad i^{-1}(f_0) \in \Gamma^p, \quad i^{-1}(f_0)\chi_A \in \Gamma^p$$

y entonces $\chi_A f_0 \in$ F y tiene un representante cuyo soporte es A. Por tanto $A \in \mathcal{B}_{f_0}$ y la restricción de $\dfrac{g_k}{g_{k+1}}$, $k \in$ N a S es $\mathcal{B}_{f_0}$-medible. c. q. d.

Bibliografía

[1] DUNFORD, N. y SCHWARTZ, J. T. (1958). Linear operators. Part I. New York.

[2] LACEY, E. (1974). The isometric theory of classical Banach spaces. Springer.

[3] LÓPEZ MOLINA, J. A. (1980). The dual and bidual of an echelon Köthe space. *Collec. Math.*, **31**, 2.º, 159-191.

[4] LÓPEZ MOLINA, J. A. Subespacios de un espacio escalonado de Köthe. Pendiente de publicar.

[5] MARTI, J. T. (1970). Topological representation of abstract L^p spaces. *Math. Ann.*, **185**, 315-321.
[6] ROTA, G. c. (1961). On the eigenvalues of positive operators. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **67**, 556-558.
[7] ZAANEN, A. C. (1967). Integration. North Holland.

J. A. López Molina
E. T. S. I. A., Córdoba
Cátedra de Matemáticas