CRITERIO R — ε PARA JUEGOS MATEMATICOS BIPERSONALES (*)

J. de la Horra Navarro

Recibido: 2 noviembre 1977

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. SIXTO RÍOS GARCÍA

The only criterion thoroughly studied and applied in game theory is the expected utility criterion. However it would be convenient to consider other criteria. For this reason, Walsh ([10] and [11]) proposed the median criterion. Further results on this criterion are to be found in [3], yet they do not appear in this paper.

In this paper we begin by studying the R — ε criterion under risk, proposed in [8]. In the first section an axiomatic characterization for the finite case is given along the lines of other utility criteria. In sections 2, 3 and 4 we define what is understood by «R — ε criterion for finite games», «optimal R — ε strategies» and give some results relating these concepts with the work of Walsh and the usual expected utility criterion. The methods are generalized in section 5. In section 6 we prove some usual simplifications (substitution of mixed strategies for pure ones, etc.). We end the finite case, in section 7, with the zero-sum games, for wich a convenient definition has been given perviously.

Most of the relevants results have been generalized in [3] to the case of infinite games on the unit square, and some of them are presented, whitout proofs, in the last section.

1. El criterio R — ε en ambiente de riesgo

Veamos, en primer lugar, algunas generalidades ya conocidas de la utilidad R — ε, o criterio **R** — ε en ambiente de riesgo, antes de comenzar con su axiomática.

Fijemos un valor ε, siendo $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, y consideremos una variable aleatoria ξ (en nuestro caso representará la ganancia aleatoria), con una función de distribución F (x).

Utilizamos entonces la siguiente definición:

(*) El presente trabajo es un resumen de la tesis doctoral [3].

1.1. DEFINICIÓN.—Llamaremos utilidad $R - \varepsilon$ de la función de distribución $F(x)$ a:

$$V_\varepsilon(F) = V_\varepsilon(\xi) = \sup \{ x / P(\xi \geqslant x) \geqslant 1 - \varepsilon \}$$

Ahora bien, tendremos:

$$P(\xi \geqslant x) = P(\xi = x) + P(\xi > x) = P(\xi = x) + 1 - P(\xi \leqslant x) =$$
$$= 1 + P(\xi = x) - F(x) \geqslant 1 - \varepsilon$$

de donde:

$$F(x) - P(\xi = x) \leqslant \varepsilon \qquad \lim_{x_i \to x^-} F(x_i) \leqslant \varepsilon$$

En definitiva, pondremos:

$$V_\varepsilon(F) = \sup \{ x / \lim_{x_i \to x^-} F(x_i) \leqslant \varepsilon \}$$

Llamemos ahora H a este supremo, y veamos que es alcanzable; para ello, hay que probar que:

$$\lim_{x_i \to H^-} F(x_i) \leqslant \varepsilon$$

O lo que es igual en este caso:

$$F(x_i) \leqslant \varepsilon, \quad \forall x_i < H$$

Tomemos para esto, $x_i < H$, y tomemos después x tal que:

$$x_i < x < H$$

Como sabemos que

$$\lim_{x_j \to x^-} F(x_j) \leqslant \varepsilon,$$

tendremos en particular:

$$F(x_i) \leqslant \varepsilon$$

y como esto ocurre $\forall\, x_i \leqslant H$, se tendrá:

$$\lim_{x_i \to H^-} F(x_i) \leqslant \varepsilon$$

Tenemos, por tanto:

$$V_\varepsilon(F) = \max \{ x \,/ \lim_{x_i \to x^-} F(x_i) \leqslant \varepsilon \}$$

1.2. Propiedad.—Sean ξ_1 y ξ_2 dos variables aleatorias, tales que sus funciones de distribución cumplen:

$$F_1(x) \geqslant F_2(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Entonces:

$$V_\varepsilon(\xi_2) \geqslant V_\varepsilon(\xi_1),$$

para cada ε fijado, resultado ya conocido.

El criterio R — ε en ambiente de riesgo, consistirá por tanto en comparar ξ_1 y ξ_2, mediante los valores $V_\varepsilon(\xi_1)$ y $V_\varepsilon(\xi_2)$.

Es decir:

$$\xi_1 \gtrsim \xi_2 \Longleftrightarrow V_\varepsilon(\xi_1) \geqslant V_\varepsilon(\xi_2)$$

En lo que sigue a continuación, trataremos todas estas cuestiones con más detalle.

1.3. Axiomática del criterio R — ε en ambiente de riesgo (caso finito).—Hemos visto que, en el apartado anterior, a cada función de distribución se le asociaba el valor $V_\varepsilon(F)$.

Sean $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$, una serie de resultados seguros o niveles de preferencia, ordenados en la forma $A_1 < A_2 \ldots < A_n$, y consideremos loterías sobre ellos:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

que representaremos por el vector $p = (p_1, \ldots, p_n)$.

A los niveles $A_1, \ldots, A_n$ les asignamos los números $1, \ldots, n$ para poder hablar de funciones de distribución, y sin que esto vaya a representar en ningún momento utilidad cardinal, sino solamente orden (igual les podíamos haber asignado los valores $2, 4, \ldots, 2n$).

Así, para cada p se tiene una función de distribución que en este apartado se seguirá representando con la letra p.

Por tanto, el criterio de decisión en ambiente de riesgo $R-\varepsilon$, consiste en tomar:

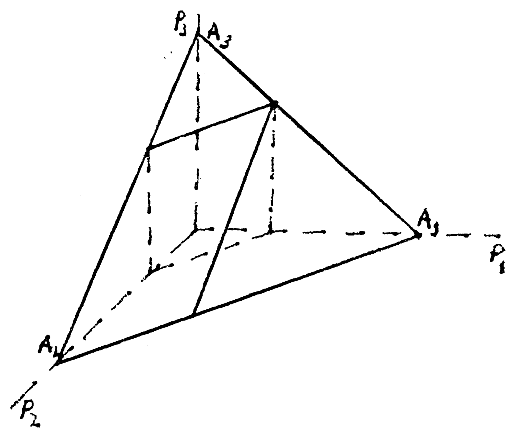
$$p \gtrsim q \Leftrightarrow V_\varepsilon(p) \geqslant V_\varepsilon(q)$$

y donde

$$V_\varepsilon(p) \in \}1, \ldots, n\{, \quad \forall p$$

siendo $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

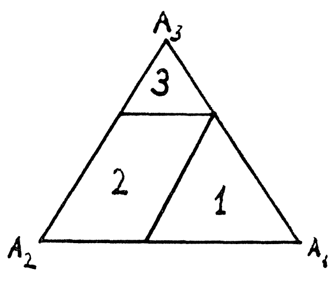
Gráficamente, y para el caso de tres resultados básicos A_1, A_2, A_3, las distintas funciones de distribución, representadas por los vectores p, en el simplex, nos darán las siguientes regiones de indiferencia:



Si $p_1 > \varepsilon \Rightarrow V_\varepsilon(p) = 1$

Si $\left.\begin{array}{l} p_1 \leqslant \varepsilon \\ \text{y} \\ p_1 + p_2 > \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow V_\varepsilon(p) = 2$

S $p_1 + p_2 \leqslant \varepsilon \Rightarrow V_\varepsilon(p) = 3$



Piénsese que si a los noveles $A_1, \ldots, A_n$, se les hubiera dado otros valores distintos de los $1, \ldots, n$, pero en el mismo orden creciente, los distintos tramos de las funciones de distribución hubieran avanzado, pero las comparaciones entre cuantiles seguirían dando la misma ordenación.

1.4. Lista de axiomas de comportamiento.—Vamos a señalar a continuación unos axiomas de comportamiento en ambiente de riesgo (que en principio pueden ser compatibles con varios criterios, que se representan en general por $\lesssim$):

A1. *Axioma de orden.*—La relación de preferencia $\lesssim$, es un preorden completo.

A2. *Dominancia estocástica débil.*—Si p y q son tales que:

$$p_1 \leqslant q_1;\ p_1+p_2 \leqslant q_1+q_2; \ldots; p_1+\ldots p_{n-1} \leqslant q_1+\ldots q_{n-1}$$

entonces $p \gtrsim q$.

A3. Sea $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ una sucesión que converge a p, y tal que:

$$p_n \succ q, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

entonces $p > q$.

Es una variación del axioma de continuidad de Von Neumann.

A4. *Adición de estrategias.*—El preorden $\lesssim$ es invariante por la adición de nuevas estrategias.

A5. *Invarianza por transformaciones monótonas.*—Sea $A_{i_1} < < \ldots < A_{i_m}$ con $m < n$, y sean p y q dos distribuciones que asignan probabilidad nula a los premios no seguros de $\mathcal{H} - \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}\}$.

Sea h una aplicación monótona de $\{i_1, \ldots, i_m\} \longrightarrow \{j_1, \ldots, j_m\}$ y sean p' y q' las distribuciones que asignan las mismas probabilidades que p y q, pero a los premios $A_{j_1} < \ldots < A_{j_m}$.

Entonces:

$$p \gtrsim q \quad \text{si y sólo si} \quad p' \gtrsim q'$$

A6. Para todo p, $\exists\, A_i$, tal que $p \sim A_i$.

1.5. Caracterización del criterio R — ε.—Vamos a ver cómo el criterio de decisión en ambiente de riesgo R — ε, puede quedar caracterizado por los seis axiomas de comportamiento precedentes.

Consistencia del criterio con los axiomas y algunas observaciones

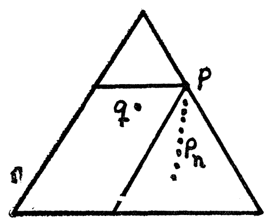
Es inmediato observar que el criterio R — ε, cumple los axiomas A1, A4 y A6.

Cumple también el axioma A2, como quedó demostrado en la propiedad vista al describir el criterio **R** — ε.

No tiene tampoco dificultad de comprobación el axioma A3, pero es interesante señalar que no verifica una variedad de éste, que suele acompañar al enunciado de A3:

Sea $p_1, \ldots, p_n, \ldots \longrightarrow p \;/\; p_n \lesssim q$; entonces: $p \lesssim q$.

Así, por ejemplo:



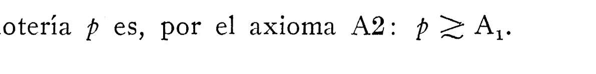
$p_n < q$, $\forall\, n$, y sin embargo: $p > q$.

Por último, el axioma A5, no sólo lo cumple el criterio R — ε, sino que va a desempeñar un papel fundamental en la caracterización (junto con el de dominancia estocástica débil).

Caracterización

Para la caracterización, se va a seguir el método inductivo sobre el número de resultados seguros $A_1, \ldots, A_n$.

$n = 2$. Veamos que queda caracterizado para dos resultados seguros: $A_1 < A_2$.



Toda lotería p es, por el axioma A2: $p \gtrsim A_1$.

Si $\forall\, p \sim A_1$, entonces se tiene el criterio R — ε, para $\varepsilon = 1$, y quedaría demostrado.

Pero supongamos que $\exists\, p_1 > A_1$; entonces, $\forall\, q$ situado gráficamente entre A_2 y p_1:

$$\left.\begin{array}{ll} q \gtrsim p_1 & \text{por A2} \\ p_1 > A_1 & \end{array}\right\} \Rightarrow \quad q > A_1$$

Luego el conjunto $\{p_1 \,/\, p_1 > A_1\}$ es gráficamente un intervalo. Veamos que es cerrado; es decir, que el extremo derecho es también preferido a A_1. Sea este extremo p; tenemos la sucesión:

$$p_1, \ldots, p_n, \ldots \to p$$

donde $p_n > A_1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Entonces, por el axioma A3: $p > A_1$.

Luego los puntos de $(p, A_1]$ son indiferentes a A_1.

Si $q \in [A_2, p] \,/\, q > p$, estaríamos en contradicción con A6.

Luego los puntos de $[A_2, p]$ son indiferentes a A_2.

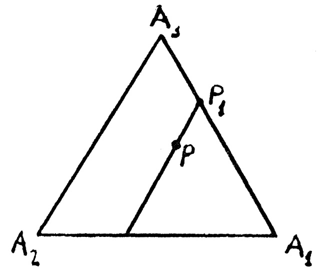
Así quedaría caracterizado el criterio R — ε con $\varepsilon \neq 1$.

$n = 3$. Vamos a ver cómo se pasa la ordenación de las loterías con A_1 y A_2, a las loterías con $A_1 < A_2 < A_3$; esto es fundamental, porque es lo que se va a hacer en general.

Hay dos casos:

a) Supongamos que las loterías representadas en el segmento $[A_2, A_1]$, son todas indiferentes; esta indiferencia se conserva al considerar todas las loterías de A_1, A_2 y A_3 por el axioma A4.

Por el axioma A5, las loterías del segmento $[A_1, A_3]$ serán también indiferentes, y por tener a A_1 en común con $[A_2, A_1]$, todas las loterías de $[A_2, A_1]$ y $[A_3, A_1]$ son indiferentes.



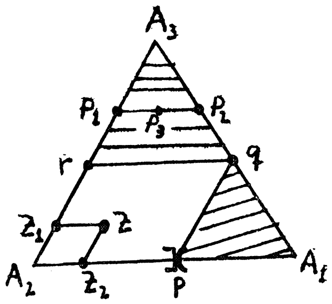
Sea ahora cualquier p del interior o del segmento $[A_3, A_2]$. Se puede encontrar entonces p_1 y p_2, tales que por el axioma A2, de dominancia estocástica débil, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 \gtrsim p \gtrsim p_2 \\ \text{Además} \quad p_1 \sim p_2 \sim A_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad p \sim p_1 \sim A_1$$

Luego todas las loterías son indiferentes, y se obtiene el criterio $R - \varepsilon$, para $\varepsilon = 1$.

b) Supongamos que las loterías del intervalo $[A_2, A_1]$ están divididas en dos segmentos de indiferencia: $[A_2, p]$ y $(p, A_1]$. Esta preferencia se mantendrá por A4, al considerar otras.

Por A5, serán indiferentes los elementos de $(q, A_1]$, y por tener a A_1 en común, los segmentos $(q, A_1]$ y $(p, A_1]$ serán indiferentes todos sus elementos.



Y por un razonamiento como el del apartado a), son indiferentes las mixturas de elementos de (q, A_1) con elementos de $(p, A_1]$, por A2.

Como los elementos de $[A_2, p]$ son indiferentes entre sí, también lo serán los de $[A_3, q]$ por un lado, y los de $[A_3, r]$ por otro. Estos dos últimos segmentos tienen a A_3 en común; luego, serán indiferentes entre sí los de $[A_3, q]$ y $[A_3, r]$. Para cualquier mixtura p_3 de elementos de $[A_3, r]$ y $[A_3, q]$, puedo tomar p_1 y p_2 como en el gráfico, de tal forma que por A2:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 \gtrsim p_3 \gtrsim p_2 \\ \text{Además} \quad p_1 \sim p_2 \sim A_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad p_3 \sim A_3$$

obteniendo así otra zona de indiferencia con las mixturas de $[A_3, r]$ y $[A_3, q]$.

Por otro lado por ser indiferentes los elementos de $(p, A_1]$, también lo serán, por A5, los elementos de $[A_2, r)$. Como $[A_2, r)$ y $[A_2, p]$ tienen a A_2 en común, se tiene que los elementos de $[A_2, r)$ y $[A_2, p)$ son todos indiferentes entre sí.

Sea entonces un z cualquiera (como en el gráfico); se toman z_1 y z_2 tales que por A2:

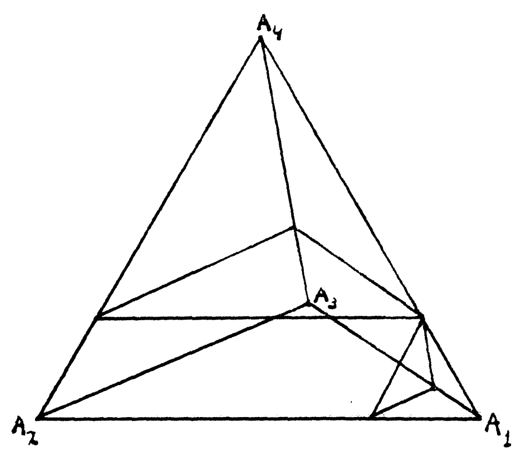
$$\left.\begin{array}{l} z_1 \gtrsim z \gtrsim z_2 \\ \text{Además} \quad z_1 \sim z_2 \sim A_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad z \sim A_2$$

obteniendo así la última región de indiferencia.

Las tres zonas de indiferencia son las dadas por el criterio $R - \varepsilon$, que queda así caracterizado con los seis axiomas, para el caso de tres resultados seguros: $A_1 < A_2 < A_3$.

Si no se hubiese considerado el axioma A5, las ordenaciones en las aristas se hubieran producido (por ser cierto para $n = 2$), pero podrían corresponder a distintos valores de ε, y el criterio $R - \varepsilon$ no hubiera quedado caracterizado.

$n = 4$. Para cuatro resultados seguros: $A_1 < A_2 < A_3 < A_4$, se van a obtener cuatro regiones de indiferencia, a partir de los resultados ya conocidos para $n = 3$ (las cuatro regiones del $R - \varepsilon$). Gráficamente:



Los axiomas se aplican de la misma forma.

n *cualquiera*. Veamos esquemáticamente los pasos para un n cualquiera. Suponemos ya hecha la ordenación $R-\varepsilon$ para $A_1 < < \ldots < A_{n-1}$.

Se consideran las $\binom{n-1}{n-2}$ combinaciones de elementos de $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ tomados de $n-2$ en $n-2$, y se forman las cápsulas convexas de estas combinaciones con A_n. En total tenemos las $\binom{n-1}{n-2}$ caras de orden $n-2$, que junto con la formada por $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$, nos dan las

$$\binom{n-1}{n-2}+1=\frac{(n-1)!}{(n-2)!}+1=(n-1)+1=n$$

caras de orden $n-2$ del simplex formado por $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

La ordenación $R-\varepsilon$ de la cara formada por $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ se conserva por A4, y se transmite a las nuevas caras formadas, por A5.

Las regiones de indiferencia de cada cara, coinciden de $n-1$ en $n-1$, en cada vértice. Las que coinciden son, por tanto, indiferentes.

Cualquier lotería, que no esté en ninguna de las caras, será indiferente, por medio de A2, a alguno de los vértices $A_1, \ldots, A_n$. Por la estructura de los conos de dominancia, las regiones de indiferencia, son las dadas para el criterio $R-\varepsilon$.

Podría, quizás, sustituirse el axioma A6 por un axioma de convexidad.

2. Criterio R — ε para juegos finitos y relación con el criterio de la mediana

Una vez adoptado el criterio $R-\varepsilon$ en ambiente de riesgo, veamos su influencia y utilización para un juego bipersonal finito.

Para cada par de estrategias puras, J_I y J_{II} obtienen un resultado seguro cada uno (y si no es seguro, les asignamos su utilidad $R-\varepsilon$, de momento) que serán $A_1, \ldots, A_k$, y $A^*_1, \ldots, A^*_{k'}$, respectivamente.

Entonces, cuando J_I utilice una estrategia mixta p y J_{II} utilice una estrategia mixta q, la ganancia aleatoria ξ_{pq} para J_I, será una lotería sobre 1, ..., k que representaremos por su función de distribución F_{pq}, y la ganancia aleatoria ξ^*_{pq} para J_{II}, será una lotería sobre 1, ..., k' que representaremos por su función de distribución F^*_{pq}.

$\forall\, p, q$ se considera:

$$\xi_{pq} : (\Omega = \Sigma_1 \times \Sigma_2,\ p(\Omega),\ p \times q) \longrightarrow (\mathbb{R}, B)$$
$$\xi_{pq}(i, j) = V_\varepsilon(F_{ij}) = V_\varepsilon(i, j)$$
$$\xi^*_{pq} : (\Omega = \Sigma_1 \times \Sigma_2,\ p(\Omega),\ p \times q) \longrightarrow (\mathbb{R}, B)$$
$$\xi^*_{pq}(i, j) = V_\varepsilon(F^*_{ij}) = V^*_\varepsilon(i, j)$$

2.1. DEFINICIÓN.—Se definen entonces:

Valor defensivo R — ε para J_I (o simplemente valor R — ε para J_I) =

$$= P^\varepsilon_I = \max_{p \in S_m} \min_{q \in S_n} V_\varepsilon(F_{pq}) = \max_{p \in S_m} \min_{q \in S_n} [\max \{ x \mid \lim_{x_i \to x^-} F_{pq}(x_i) \leq \varepsilon \}]$$

Valor defensivo R — ε para J_{II} (o simplemente valor R — ε para J_{II}) =

$$= P^\varepsilon_{II} = \max_{q \in S_n} \min_{p \in S_m} [\max \{ x \mid \lim_{x_i \to x^-} F^*_{pq}(x_i) \leq \varepsilon \}]$$

En lo sucesivo no se indicará ε como subíndice ni superíndice, bien entendido que está fijado en cada caso.

Se ha empleado la notación P_I y P_{II} de los trabajos de Walsh. Este empleo se va a justificar, mediante la demostración de unas proposiciones que relacionan los conceptos presentes con los de Walsh.

2.2. PROPOSICIÓN.

$$A = \max \{ x \mid \min_{p \in S_m} \max_{q \in S_n} \lim_{x_i \to x^-} F_{pq}(x_i) \leq \varepsilon \}$$

y

$$B = \max_{p \in S_m} \min_{q \in S_n} [\max \{ x \mid \lim_{x_i \to x^-} F_{pq}(x_i) \leq \varepsilon \}]$$

son iguales.

Entonces ambas coinciden con P_I, que recibirá el nombre de valor defensivo R — ε del juego para J_I, o simplemente *valor R — ε para J_I*.

DEMOSTRACIÓN.—$A \leqslant B$

$$\forall x_0 \,/\, \min_{p \in S_m} \max_{q \in S_n} \lim_{x_i \to x_0^-} F_{pq}(x_i) \leq \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, p_0 \in S_m \,/\, \max_{q \in S_n} \lim_{x_i \to x_0^-} F_{p_0 q}(x_i) \leq \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, p_0 \in S_m \,/\, \forall q \in S_n : \lim_{x_i \to x_0^-} F_{p_0 q}(x_i) \leq \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max \{ x \,/\, \lim_{x_i \to x^-} F_{p_0 q}(x_i) \leq \varepsilon \} \geq x_0, \quad \forall q \in S_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min_{q \in S_n} [\max \{ x \,/\, \lim_{x_i \to x^-} F_{p_0 q}(x_i) \leq \varepsilon \}] \geq x_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\max_{p \in S_m} \min_{q \in S_n} [\max \{ x \,/\, \lim_{x_i \to x^-} F_{pq}(x_i) \leq \varepsilon \}]}_{B} \geq x_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \geq \max \{ x_0 \,/\, \min_{p \in S_m} \max_{q \in S_n} \lim_{x_i \to x^-} F_{pq}(x_i) \leq \varepsilon \} = A$$

$B \leqslant A$ Se sabe que:

$$\exists\, p_0 \in S_m \,/\, \min_{q \in S_n} [\max \{ x \,/\, \lim_{x_i \to x^-} F_{p_0 q}(x_i) \leq \varepsilon \}] = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, p_0 \in S_m \,/\, \forall q \in S_n : \max \{ x \,/\, \lim_{x_i \to x^-} F_{p_0 q}(x_i) \leq \varepsilon \} \geq B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, p_0 \in S_m \,/\, \forall q \in S_n : \lim_{x_i \to B^-} F_{p_0 q}(x_i) \leq \varepsilon \text{ por ser intervalos} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, p_0 \in S_m \,/\, \max_{q \in S_n} \lim_{x_i \to B^-} F_{p_0 q}(x_i) \leq \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min_{p \in S_m} \max_{q \in S_n} \lim_{x_i \to B^-} F_{pq}(x_i) \leq \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \leq \max \{ x \,/\, \min_{p \in S_m} \max_{q \in S_n} \lim_{x_i \to x^-} F_{pq}(x_i) \leq \varepsilon \} = A$$

c. q d.

En primer lugar, debe señalarse que no hay problemas (en este tipo de juegos) con la existencia de los máximos y mínimos de las definiciones.

Para P_{II} tendríamos un resultado análogo con la única diferencia de que las funciones de distribución $F^*_{pq}(x)$ consideradas, estarían definidas sobre los niveles 1, ..., h' para J_{II}.

Así:

$$P_{II} = \max \{ x \mid \min_{q \in S_n} \max_{p \in S_m} \lim_{x_i \to x^-} F^*_{pq}(x_i) \leq \varepsilon \} =$$

$$= \max_{q \in S_n} \min_{p \in S_m} [\max \{ x \mid \lim_{x_i \to x^-} F^*_{pq}(x_i) \leq \varepsilon \}]$$

es el valor R — ε del juego para J_{II}.

2.3. Consecuencias.—Vemos que:

$$\min_{p \in S_m} \max_{q \in S_n} \lim_{x_i \to x^-} F_{pq}(x_i) = \min_{p \in S_m} \max_{q \in S_n} [1 - P(\xi_{pq} \geq x)] =$$

$$= 1 - \max_{p \in S_m} \min_{q \in S_n} P(\xi_{pq} \geq x) \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \max_{p \in S_m} \min_{q \in S_n} P(\xi_{pq} \geq x) \geq 1 - \varepsilon;$$

con esto queda:

$$P_I = \max \{ x \mid \max_{p \in S_m} \min_{q \in S_n} P(\xi_{pq} \geq x) \geq 1 - \varepsilon \}$$

lo cual es muy útil para aplicar un algoritmo utilizando matrices de unos y ceros, análogo al considerado en el criterio de la mediana, y así se calculará P_I.

Análogamente:

$$P_{II} = \max \{ x \mid \max_{q \in S_n} \min_{p \in S_m} P(\xi^*_{pq} \geq x) \geq 1 - \varepsilon \}$$

La forma en que han quedado P_I y P_{II} son los correspondientes a los valores defensivos utilizando un cuantil de orden ε generalizando el procedimiento de Walsh a los cuantiles; hasta aquí hay gran semejanza en los dos procedimientos.

3. Estrategias óptimas R — ε y comparación con el criterio de la mediana

En resumen, tenemos definidos para los dos jugadores los valores R — ε, que representamos por P_I y P_{II}, y que se pueden calcular por el algoritmo deducido de la proposición demostrada antes.

Definimos a continuación lo que entendemos por estrategias óptimas:

3.1. Definición.—Como conjuntos de estrategias óptimas R — ε del juego Γ se definen entonces:

Para J_I:

$$T_I(\Gamma) = \{ p_0 \in S_m \ / \ \min_{q \in S_n} V_\varepsilon (F_{p_0 q}) = P_I \} =$$

$$= \{ p_0 \in S_m \ / \ \min_{q \in S_n} [\max \{ x \ / \ \lim_{x_i \to x^-} F_{p_0 q} (x_i) \leq \varepsilon \}] = P_I \}$$

Para J_{II}:

$$T_{II}(\Gamma) = \{ q_0 \in S_n \ / \ \min_{p \in S_m} V_\varepsilon (F^*_{p q_0}) = P_{II} \} =$$

$$= \{ q_0 \in S_n \ / \ \min_{p \in S_m} [\max \{ x \ / \ \lim_{x_i \to x^-} F^*_{p q_0} (x_i) \leq \varepsilon \}] = P_{II} \}$$

Veamos a continuación una proposición que va a tener también una doble utilidad:

3.2. Proposición.—Los conjuntos:

$$T_I(\Gamma) = (1) = \{ p_0 \in S_m \ / \ \min_{q \in S_n} [\max \{ x \ / \ \lim_{x_i \to x^-} F_{p_0 q} (x_i) \leq \varepsilon \}] = P_I \}$$

y

$$(2) = \{ p_0 \in S_m \ / \ \max_{q \in S_n} \lim_{x_i \to x^-} F_{p_0 q} (x_i) \leq \varepsilon \}$$

son iguales.

Demostración.—(1) $\subset$ (2):

$$\forall p_0 \in (1) \Rightarrow \min_{q \in S_n} [\max \{ x \ / \ \lim_{x_i \to x^-} F_{p_0 q} (x_i) \leq \varepsilon \}] = P_I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall q \in S_n : \max \{ x \ / \ \lim_{x_i \to x^-} F_{p_0 q} (x_i) \leq \varepsilon \} \geq P_I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall q \in S_n : \lim_{x_i \to P_I^-} F_{p_0 q} (x_i) \leq \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_{q \in S_n} \lim_{x_i \to P_I^-} F_{p_0 q} (x_i) \leq \varepsilon \Rightarrow p_0 \in (2)$$

(2) ⊂ (1):

$$\forall\ p_0 \in (2) \Rightarrow \max_{q \in S_n} \lim_{x_i \to P_I^-} F_{p_0 q}(x_i) \leq \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall\ q \in S_n ;\ \lim_{x_i \to P_I^-} F_{p_0 q}(x_i) \leq \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall\ q \in S_n : \max \{ x \mid \lim_{x_i \to x^-} F_{p_0 q}(x_i) \leq \varepsilon \} \geq P_I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \min_{q \in S_n} [\max \{ x \mid \lim_{x_i \to x^-} F_{p_0 q}(x_i) \leq \varepsilon \}] \geq P_I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \min_{q \in S_n} [\max \{ x \mid \lim_{x_i \to x^-} F_{p_0 q}(x_i) \leq \varepsilon \}] = P_I$$

por ser P_I el máximo, c. q. d.

3.3. Cálculo de estas estrategias.—Esta proposición será muy útil, para poder aplicar un algoritmo al cálculo de estrategias óptimas.

En efecto, tenemos:

$$T_I(\Gamma) = \{ p_0 \in S_m \mid \max_{q \in S_n} \lim_{x_i \to P_I^-} F_{p_0 q}(x_i) \leq \varepsilon \}$$

Pero:

$$\max_{q \in S_n} \lim_{x_i \to P_I^-} F_{p_0 q}(x_i) \leq \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \max_{q \in S_n} \lim_{x_i \to P_I^-} F_{p_0 q}(x_i) \geq 1 - \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \min_{q \in S_n} [1 - \lim_{x_i \to P_I^-} F_{p_0 q}(x_i)] \geq 1 - \varepsilon \Leftrightarrow \min_{q \in S_n} P(\xi_{p_0 q} \geq P_I) \geq 1 - \varepsilon$$

Luego:

$$T_I(\Gamma) = \{ p_0 \in S_m \mid \min_{q \in S_n} P(\xi_{p_0 q} \geq P_I) \geq 1 - \varepsilon \}$$

Ahora bien, $P(\xi_{p_0 q} \geqslant P_I)$ es la esperanza de pago, en un juego cuya matriz conste de *unos* en las posiciones con nivel superior o igual a P_I, y *ceros* en las restantes posiciones; tenemos por tanto:

$$\min_{q \in S_n} P(\xi_{p_0 q} \geq P_I) = \min_{j=1 \dots n} P(\xi_{p_0 j} \geq P_I)$$
$$T_I(\Gamma) = \{ p_0 \in S_m \mid \min_{j=1 \dots n} P(\xi_{p_0 j} \geq P_I) \geq 1 - \varepsilon \} =$$
$$= \{ p_0 \in S_m \mid P(\xi_{p_0 j} \geq P_I) \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall\ j = 1, \dots, n \}$$

Sea entonces:

$$\begin{array}{c} p_{01} \\ \vdots \\ p_{0m} \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

la matriz de *unos* y *ceros* antes mencionada.

Se trata entonces de encontrar los $p_0 = (p_{01}, \ldots, p_{0m})$ tales que:

$$\begin{array}{ll} a_{11}\, p_{01} + \cdots + a_{m1}\, p_{0m} & \geqslant 1 - \varepsilon \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{1n}\, p_{01} + \cdots + a_{mn}\, p_{0m} & \geqslant 1 - \varepsilon \\ p_{01} + \cdots + p_{0m} & = 1 \\ p_{01}, \ldots, p_{0m} & \geqslant 0 \end{array}$$

Se puede resolver mediante el algoritmo del simlex, haciendo:

$$\left.\begin{array}{l} p_{01}, \ldots, p_{0m} \geqslant 0 \\ a_{11}\, p_{01} + \cdots + a_{m1}\, p_{0m} \geqslant 1 - \varepsilon \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}\, p_{01} + \cdots + a_{mn}\, p_{0m} \geqslant 1 - \varepsilon \\ p_{01} + \cdots + p_{0m} = 1 \\ \max\, (p_{01} + \cdots + p_{0m}) \end{array}\right\}$$

aunque no nos ocupemos de procedimientos óptimos para el cálculo de estas estrategias.

3.4. COMPARACIÓN CON EL CRITERIO DE LA MEDIANA.—Veamos que la proposición demostrada tiene también otra utilidad. Si hubiésemos generalizados el procedimiento de la mediana a un cuantil de orden ε, hubiéramos tenido como estrategias óptimas defensivas para J_I aquellas p_0 que cumplieran que:

$$\max_{q \in S_n} \lim_{x_i \to P_I^-} F_{p_0 q}(x_i) \quad \text{se hacía mínimo}$$

mientras que para las estrategias óptimas $R - \varepsilon$ para J_I sólo se pedía que:

$$\max_{q \in S_n} \lim_{x_i \to P_I^-} F_{p_0 q}(x_i) \quad \text{fuera menor o igual que } \varepsilon.$$

con lo cual el conjunto $T_I(\Gamma)$ obtenido es más amplio.

Lo mismo ocurre con $T_{II}(\Gamma)$.

4. Relación del criterio R — ε con el criterio de la esperanza matemática

Veamos esta relación para juegos bipersonales finitos.

Con el criterio R — ε para juegos, cada jugador tiende a alcanzar:

$$\left.\begin{aligned} P_I &= \max_{p \in S_m} \min_{q \in S_n} V_\varepsilon(F_{pq}) \\ P_{II} &= \max_{q \in S_n} \min_{p \in S_m} V_\varepsilon(F^*_{pq}) \end{aligned}\right\}$$

Sin embargo, con el criterio de la esperanza matemática se tendería a alcanzar:

$$\left.\begin{aligned} &\max_{p \in S_m} \min_{q \in S_n} E[F_{pq}] \\ &\max_{q \in S_n} \min_{p \in S_m} E[F^*_{pq}] \end{aligned}\right\}$$

Con el estudio anterior es fácil comparar los dos criterios. Para esto hay que tener en cuenta que se van a utilizar dos criterios por jugador, en cada caso. Un criterio de decisión en ambiente de riesgo, y otro en ambiente de incertidumbre.

En el criterio en ambiente de riesgo es en el que van a diferir los dos criterios comparados:

— En el criterio de la esperanza:

Se asigna a F_{pq} su esperanza $E[F_{pq}]$, lo cual equivale a admitir la utilidad de Von Neumann, o lo que es igual, los siguientes axiomas de comportamiento en ambiente de riesgo:

Axioma de orden

La relación de preferencia $\lesssim$, es un preorden completo.

Axioma de continuidad

$$\text{Si } p_n \longrightarrow p \text{ y } p_n \gtrsim q, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow p \gtrsim q$$

$$\text{Si } p_n \longrightarrow p \text{ y } p_n \lesssim q, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow p \lesssim q$$

Axioma de sustitución

$\forall\, p, q, r$:

$$p \gtrsim q \iff \lambda p + (1-\lambda) r \gtrsim \lambda q + (1-\lambda) r$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$.

— En el criterio $R - \varepsilon$:

Se asigna a F_{pq} el valor V_{ε} (F_{pq}), lo cual equivale a admitir la utilidad $R - \varepsilon$, o lo que es igual, los seis axiomas de comportamiento en ambiente de riesgo que se han definido en el capítulo presente.

Después, en los dos casos, se aplica el criterio maximin en ambiente de incertidumbre.

Por tanto, la diferencia estará en el criterio de decisión en ambiente de riesgo utilizado por el jugador.

5. Algoritmos de cálculo en un caso más general

Se van a calcular P_{I} y $T_{\mathrm{I}}(\Gamma)$ (y análogamente se haría con P_{II} y $T_{\mathrm{II}}(\Gamma)$, para un juego Γ cuya matriz es de la forma:

$$\begin{array}{c|c}
 & 1 \;\cdots\cdots\; j \;\cdots\cdots\; n \\ \hline
1 & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
i & \cdots \begin{pmatrix} r^{1}_{ij} & \cdots & r^{k}_{ij} \\ A_1 & \cdots & A_k \end{pmatrix} = r_{ij} \;\cdot\;\cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
m & \cdot
\end{array}$$

y donde no se van a sustituir las loterías por sus utilidades $R - \varepsilon$.

Lo fundamental es señalar que los teoremas demostrados antes, y que servían para obtener algoritmos de cálculo, siguen sirviendo.

Así, se tiene que:

$$P_I = \max \{ x \mid \max_{p \in S_m} \min_{q \in S_n} P(\xi_{pq} \geqslant x) \geqslant 1 - \varepsilon \}$$

$$T_I(\Gamma) = \{ p_0 \in S_m \mid P(\xi_{p_0 j} \geqslant P_I) \geqslant 1 - \varepsilon, \quad \forall\, j = 1, \ldots, n \}$$

Lo que ha cambiado es ξ_{pq} (y también ξ^*_{pq}). Ahora se toma:

$$\xi_{pq} : (\Omega = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \mathcal{A},\ P(\Omega),\ p \times q \times r_{i_j}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$
$$\xi_{pq}(i, j, A_h) = h$$

con lo cual, la probabilidad de cada posición, se asocia a su nivel correspondiente, en vez de asociar la probabilidad de toda la lotería al nivel $V_\varepsilon(i, j) = V_\varepsilon(F_{ij})$.

Entonces, para saber si un nivel h, es tal que:

$$\max_{p \in S_m} \min_{q \in S_n} P(\xi_{pq} \geq h) \geq 1 - \varepsilon$$

lo que habrá que hacer en definitiva, es comprobar si el valor del juego cuya matriz es:

	1	j	n
1	$r^h_{11} + \cdots + r^k_{11}$		
.	....		
i	....	$r^h_{ij} + \cdot\ \cdot + r^k_{ij}$	
.			
m	....		

es mayor o igual que $1 - \varepsilon$.

Como se busca el máximo, se irá tomando sucesivamente:

$$h = k, \quad k - 1, \ldots$$

hasta encontrar uno que cumpla la condición, y que será P_I.

Para encontrar los $p_0 \in T_I(\Gamma)$, se aplicará también el algoritmo mencionado con anterioridad, pero por supuesto la matriz no estaría formada por *unos* y *ceros*, sino que sería:

$$\begin{pmatrix} r_{11}^{P_I} + \cdots r_{11}^{k} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots r_{ij}^{P_J} + \cdots + r_{ij}^{k} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}$$

Para homogeneizar los dos procedimientos seguidos hasta ahora, basta considerar que si vamos a utilizar el procedimiento reducido (con matrices de unos y ceros), lo que se hace en realidad es sustituir las loterías:

$$\begin{pmatrix} r_{ij}^{1} \ldots r_{ij}^{k} \\ A_1 \ldots A_k \end{pmatrix} \quad \text{por} \quad \begin{pmatrix} 0 \ldots 1 \ldots 0 \\ A_1 \ldots A_h \ldots A_k \end{pmatrix}$$

donde $V_\varepsilon(F_{ij}) = V_\varepsilon(i, j) = h$.

Análogamente, se tendría para J_{II}:

$$\xi_{pq}^{*} : (\Omega^{*} = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \mathcal{A}^{*}, \; P(\Omega^{*}), \; p \times q \times r_{ij}^{*}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$
$$\xi_{pq}^{*}(i, j, A_h^{*}) = h$$

Así, de ahora en adelante, en la posición (i, j) consideraremos las loterías:

$$\begin{pmatrix} r_{ij}^{1} \ldots r_{ij}^{k} \\ A_1 \ldots A_k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_{ij}^{*1} \ldots r_{ij}^{*k'} \\ A_1^{*} \ldots A_{k'}^{*} \end{pmatrix}$$

que podrán ser las loterías iniciales, o las obtenidas como acabamos de decir.

Pero el proceso a partir de ellas será el mismo.

6. Algunas simplificaciones en el criterio R — ε

Volvamos entonces a las definiciones de valores R — ε del juego, P_I y P_{II}:

$$P_I = \max_{p \in S_m} \min_{q \in S_n} V_\varepsilon(F_{pq}) = \max_{p \in S_m} \min_{q \in S_n} V_\varepsilon(p, q)$$

$$P_{II} = \max_{q \in S_n} \min_{p \in S_m} V_\varepsilon(F_{pq}^{*}) = \max_{q \in S_n} \min_{p \in S_m} V_\varepsilon^{*}(p, q)$$

Cuando se puedan restringir los conjuntos en que se hallan los mínimos, habremos dado un paso importante (proceso análogo al efectuado para el criterio de la esperanza).

Las siguientes proposiciones irán encaminadas a eso.

6.1. LEMA.—Sea $p \in S_m$ fijo, y sea j recorriendo todos los valores de $\{1, ..., n\}$. Entonces:

$$A = \min_{j=1\dots n} [\max \} x \,/\, \lim_{x_i \to x^-} F_{pj}(x_i) \leq \varepsilon \{]$$

y

$$B = \max \} x \,/\, \max_{j=1\dots n} \lim_{x_i \to x^-} F_{pj}(x_i) \leq \varepsilon \{$$

coinciden.

DEMOSTRACIÓN.—$B \geqslant A$

$$\forall\, j = 1, \dots, n: \ \max \} x \,/\, \lim_{x_i \to x^-} F_{pj}(x_i) \leq \varepsilon \{ \geq A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall\, j = 1, \dots, n: \ \lim_{x_i \to A^-} F_{pj}(x_i) \leq \varepsilon \Rightarrow \max_{j=1\dots n} \lim_{x_i \to A^-} F_{pj}(x_i) \leq \varepsilon$$

Luego:

$$\max \} x \,/\, \max_{j=1\dots n} \lim_{x_i \to x^-} F_{pj}(x_i) \leq \varepsilon \{ \geq A$$

y así: $B \geqslant A$.

$A \geqslant B$

$$\max_{j=1\dots n} \lim_{x_i \to B^-} F_{pj}(x_i) \leq \varepsilon \Rightarrow \forall\, j = 1, \dots, n: \ \lim_{x_i \to B^-} F_{pj}(x_i) \leq \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall\, j = 1, \dots, n: \ \max \} x \,/\, \lim_{x_i \to x^-} F_{pj}(x_i) \leq \varepsilon \{ \geq B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min_{j=1\dots n} [\max \} x \,/\, \lim_{x_i \to x^-} F_{pj}(x_i) \leq \varepsilon \{] \geq B$$

y por tanto: $A \geqslant B$, c. q. d.

Aplicando este lema obtendremos los siguientes resultados:

6.2. PROPOSICIÓN.—Sea $p \in S_m$ fijo; entonces:

$$\min_{q \in S_n} V_\varepsilon(p, q) = \min_{j=1\dots n} V_\varepsilon(p, q)$$

DEMOSTRACIÓN.—La desigualdad

$$\min_{q \in S_n} V_\varepsilon(p, q) \leq \min_{j=1\dots n} V_\varepsilon(p, q)$$

es evidente; veamos la otra:

$$V_\varepsilon(p, q) = \max \{ x \,/\, \lim_{x_i \to x-} F_{pq}(x_i) \leq \varepsilon \} =$$

$$= \max \{ x \,/\, \lim_{x_i \to x-} [q_1 F_{p1}(x_i) + \dots + q_n F_{pn}(x_i)] \leq \varepsilon \} =$$

$$= \max \{ x \,/\, q_1 \lim_{x_i \to x-} F_{p1}(x_i) + \dots + q_n \lim_{x_i \to x-} F_{pn}(x_i) \leq \varepsilon \} \geq (*)$$

$$\geq \max \{ x \,/\, \lim_{x_i \to x-} F_{p1}(x_i) \leq \varepsilon ; \dots : \lim_{x_i \to x-} F_{pn}(x_i) \leq \varepsilon \} =$$

$$= \max \{ x \,/\, \max_{j=1\dots n} \lim_{x_i \to x-} F_{pj}(x_i) \leq \varepsilon \} \text{ por el lema } =$$

$$= \min_{j=1\dots n} [\max \{ x \,/\, \lim_{x_i \to x-} F_{pj}(x_i) \leq \varepsilon \}] = \min_{j=1\dots n} V_\varepsilon(p, j)$$

Así tenemos:

$$V_\varepsilon(p, q) \geq \min_{j=1\dots n} V_\varepsilon(p, j), \quad \forall q \in S_n \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \min_{q \in S_n} V_\varepsilon(p, q) \geq \min_{j=1\dots n} V_\varepsilon(p, j)$$

c. q. d.

6.3. PROPOSICIÓN (análoga).—Sea $q \in S_n$ fijo; entonces:

$$\min_{p \in S_m} V^*_\varepsilon(p, q) = \min_{i=1\dots m} V^*(p, q)$$

(*) Se verifica por contener el 1.er conjunto al 2.°:

$$\forall x \,/\, \lim_{x_i \to x-} F_{p1}(x_i) \leq \varepsilon ; \dots ; \lim_{x_i \to x-} F_{pn}(x_i) \leq \varepsilon \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow q_1 \lim_{x_i \to x-} F_{p1}(x_i) + \dots + q_n \lim_{x_i \to x-} F_{pn}(x_i) \leq$$

$$\leq q_1 \varepsilon + \dots + q_n \varepsilon = \varepsilon$$

6.4. Corolario.—La situación de los dos jugadores mejora, o al menos, no empeora, al considerar estrategias mixtas.

En efecto:

$$P_I = \max_{p \in S_m} [\min_{q \in S_n} V_\varepsilon (p, q)] =$$

$$= \max_{p \in S_m} [\min_{j=1 \ldots n} V_\varepsilon (p, j)] \geq \max_{i=1 \ldots m} [\min_{j=1 \ldots n} V_\varepsilon (i, j)]$$

y lo mismo ocurre para J_{II}.

6.5. Definición.—El par $(\bar{p}, \bar{q})$, ($\bar{p} \in S_m$ y $\bar{q} \in S_n$), se dice que es de equilibrio si se cumple que:

$$\begin{cases} V_\varepsilon (\bar{p}, \bar{q}) = \max\limits_{p \in S_m} V_\varepsilon (p, \bar{q}) \\ V_\varepsilon^* (\bar{p}, \bar{q}) = \max\limits_{q \in S_n} V_\varepsilon^* (\bar{p}, q) \end{cases}$$

Las siguientes proposiciones serán de interés en relación con esta definición. Las demostraciones son semejantes a las anteriores y pueden verse en [3].

6.6. Lema.—Sea $p \in S_m$ fijo, y sea j recorriendo todos los valores de $\{1, ..., n\}$. Entonces:

$$A = \max_{j=1 \ldots n} [\max \} x / \lim_{x_i \to x-} F^*_{pj} (x_i) \leq \varepsilon \{]$$

y

$$B = \max \} x / \min_{j=1 \ldots n} \lim_{x_i \to x-} F^*_{pj} (x_i) \leq \varepsilon \{$$

coinciden.

6.7. Proposición.—Sea $p \in S_m$ fijo; entonces:

$$\max_{q \in S_n} V_\varepsilon^* (p, q) = \max_{j=1 \ldots u} V_\varepsilon^* (p, j)$$

6.8. Proposición (análoga).—Sea $q \in S_n$ fijo; entonces:

$$\max_{p \in S_m} V_\varepsilon (p, q) = \max_{i=1 \ldots m} V_\varepsilon (i, q)$$

A continuación generalizamos un resultado útil de [9]:

6.9. LEMA.—Sea un juego bipersonal finito, que para cada par de estrategias puras i, j, proporciona un par de loterías:

$$\begin{pmatrix} r_{ij}^{1} & \dots & r_{ij}^{k} \\ A_1 & \dots & A_k \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} r_{ij}^{*1} & \dots & r_{ij}^{*k'} \\ A_1^* & \dots & A_{k'}^* \end{pmatrix}$$

en el sentido dicho anteriormente; entonces:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \max_{p \in S_m} \min_{q \in S_n} P(\xi_{pq} \geq x) = 1 - \max_{q \in S_n} \min_{p \in S_m} P(\xi_{pq} < x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \max_{q \in S_n} \min_{p \in S_m} P(\xi_{pq}^* \geq x) = 1 - \max_{p \in S_m} \min_{q \in S_n} P(\xi_{pq}^* < x)$$

7. Caso particular de suma nula

Dirigiremos ahora nuestros esfuerzos a la situación más concreta de suma nula. Veamos en primer lugar qué entendemos por juegos de suma nula.

7.1. DEFINICIÓN.—Un juego bipersonal finito será de *suma nula* si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}^*$ tienen el mismo número de resultados seguros k y además:

$$\forall i, j, \quad \text{y} \quad \forall h = 1, \dots, k \quad \text{se tiene:} \quad r_{ij}^{*h} = r_{ij}^{k+1-h}$$

7.2. OBSERVACIONES.—La definición de suma nula tiene sentido para otros criterios. No tenía sentido definirla por la condición:

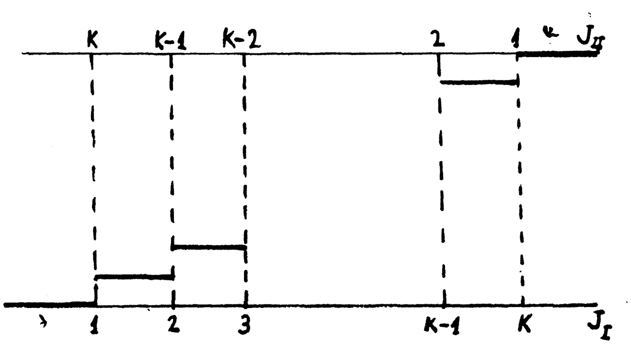
$$V_\varepsilon(p, q) + V_\varepsilon^*(p, q) = k + 1, \quad \forall p, q$$

que es irrelevante para las utilidades R — ε (a diferencia de la esperanza).

Conviene destacar que no se ha hecho hasta ahora ninguna precisión sobre el ε tomado. Ni siquiera se ha exigido que fuera el mismo para los dos jugadores.

En este caso de suma cero, las funciones de distribución F_{pq} y

F^*_{pq} resultantes para cada par p, q se pueden representar gráficamente así:



A continuación vamos a hacer hipótesis sobre los valores tomados para ε. Representaremos por ε_1 y ε_2 los valores tomados por J_I y J_{II} respectivamente. Según las relaciones entre ellos tendremos distintos resultados.

7.3. Proposición.—Sea un juego bipersonal de suma nula; entonces:

Si $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 1$:

a) $V_{\varepsilon_1}(p, q) + V^*_{\varepsilon_2}(p, q) \leq k + 1, \quad \forall p \in S_m, \quad \forall q \in S_n$

b) $P_I + P_{II} \leq k + 1$

Si $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geqslant 1$:

a') $V_{\varepsilon_1}(p, q) + V^*_{\varepsilon_2}(p, q) \geqq k + 1, \quad \forall p \in S_m, \quad \forall q \in S_n$

b') $P_I + P_{II} \geqq k + 1$

Demostración.—a) y a') se deducen inmediatamente de la figura anterior y de las definiciones de $V_{\varepsilon_1}(p, q)$ y $V^*_{\varepsilon_2}(p, q)$.

b)

$$\max_{p \in S_m} \min_{q \in S_n} P(\xi_{pq} \geqq P_I) \geqq 1 - \varepsilon;$$

entonces:

$$\max_{q\in S_n}\ \min_{p\in S_m} P(\xi_{pq} \leqq P_I - 1) = 1 - \max_{p\in S_m}\ \min_{q\in S_n} P(\xi_{pq} \geqq P_I) \leqq$$

$$\leqq 1 - (1 - \varepsilon_1) = \varepsilon_1 < 1 - \varepsilon_2 \Rightarrow P'_I \geqq P_I \Rightarrow k + 1 - P_{II} \geqq P_I$$

Luego: $P_I + P_{II} \leqslant k + 1$.

b′)

$$\max_{p\in S_m}\ \min_{q\in S_n} P(\xi_{pq} \geqq P_I + 1) < 1 - \varepsilon_1;$$

entonces:

$$\max_{q\in S_n}\ \min_{p\in S_m} P(\xi_{pq} \leqq P_I) = 1 - \max_{p\in S_m}\ \min_{q\in S_n} P(\xi_{pq} \geqq P_I + 1) >$$

$$> 1 - (1 - \varepsilon_1) = \varepsilon_1 \geqq 1 - \varepsilon_2 \Rightarrow P'_I \leqq P_I \Rightarrow k + 1 - P_{II} \leqq P_I$$

Luego: $P_I + P_{II} \geqslant k + 1$, c. q. d.

Pensamos que el caso más corriente corresponderá a $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}$ y $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}$ (caso particular de $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 1$).

Es decir, se tendrán muy en cuenta los resultados menos favorables, salvo cuando vayan afectados por probabilidades pequeñas.

Las siguientes proposiciones van a llevar la hipótesis de $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 1$, pero no creemos que por esto van a perder importancia. Para más detalle, véase [3].

7.4. Proposición.—Sea un juego bipersonal finito de suma nula con $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 1$. Entonces:

$$P_I + P_{II} = k + 1 \Rightarrow \exists \text{ punto de equilibrio.}$$

7.5. Proposición.—Sea un juego bipersonal finito de suma nula con $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 1$.

Si $P_I + P_{II} = k + 1$, entonces: para todo par de equilibrio (p, q) se tiene:

$$V_{\varepsilon_1}(p, q) + V^*_{\varepsilon_2}(p, q) = k + 1$$

7.6. Corolario.—Sea un juego bipersonal finito de suma nula con $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 1$.

Si $P_I + P_{II} = k + 1$, entonces: para todo par de equilibrio se tiene:

$$\begin{cases} V_{\varepsilon_1}(p, q) = P_I \\ V^*_{\varepsilon_2}(p, q) = P_{II} \end{cases}$$

8. Juegos infinitos continuos

A continuación vamos a tratar de generalizar los conceptos y resultados fundamentales, expuestos anteriormente para el caso finito, a los juegos infinitos continuos.

Esto llevará consigo un esfuerzo mayor que el requerido para el criterio de la esperanza, por ser el R — ε un criterio menos fácil de manejar. De todos modos las generalizaciones indicadas son realizables con el esfuerzo antes señalado.

Veamos entonces las hipótesis que hacemos:

Los dos jugadores J_I y J_{II} eligen sendos números x e y pertenecientes al intervalo $[0, 1]$. Por tanto, el conjunto de estrategias puras de los dos estará constituido por el intervalo $[0, 1]$ (de ahí el nombre de estos juegos).

La función de pago para J_I será la función $A(x, y)$ definida en el cuadrado unidad $[0, 1] \times [0, 1]$ y a la que vamos a exigir que sea continua (para J_{II} será $B(x, y)$).

Las estrategias mixtas para J_I y J_{II} serán funciones de distribución sobre el intervalo $[0, 1]$ y las representaremos, respectivamente, por $F(x)$ y $G(y)$.

En este estudio se considerarán conjuntos de la forma:

$$\{(x, y) \in [0, 1] x [0, 1] \,/\, A(x, y) \leq z\};$$

$$\{(x, y) \in [0, 1] x [0, 1] \,/\, A(x, y) \geq z\};$$

y para $y_0 \in [0, 1]$ fijo:

$$\{x \in [0, 1] \,/\, A(x, y_0) \leq z\} \quad ; \quad \{x \in [0, 1] \,/\, A(x, y_0) \geq z\}$$

Todos los conjuntos de este tipo serán cerrados por ser $A(x, y)$ una función continua.

Entonces para cada par de estrategias mixtas F (x) y G (y) tendremos definida una función de distribución:

$$H_{FG}(z) = P_{FG}(-\infty, z] = P_{FG}\{(x, y) / A(x, y) \leq z\} =$$

$$= \int_{\{(x,y)/A(x,y) \leq z\}} dF(x)\, dG(y) = \int_{[0,1]} \left[\int_{\{x/A(x,y) \leq z\}} dF(x) \right] dG(y)$$

Ahora, cada jugador debe definir un $\varepsilon \in [0, 1]$ (distinto en general para cada uno), para poder utilizar el criterio R — ε.

Damos entonces la siguiente definición.

8.1. Definición.—Para cada par de estrategias mixtas F (x) y G (y) definimos:

$$V_\varepsilon(F, G) = \max \{ z / \lim_{z_i \to z^-} H_{FG}(z_i) \leq \varepsilon \}$$

que es el valor R — ε del par (F, G) para J_I.

Ya sabemos que este máximo es alcanzable (es además el máximo de un intervalo).

Podemos utilizar también:

$$V_\varepsilon(F, G) = \max \left\{ z / \lim_{z_i \to z^-} \int_{\{(x,y)/A(x,y) \leq z_i\}} dF(x)\, dG(y) \leqslant \varepsilon \right\} =$$

$$= \max \left\{ z / \int_{\{(x,y)/A(x,y) \geq z\}} dF(x)\, dG(y) \geqslant 1 - \varepsilon \right\}$$

De forma completamente análoga definiríamos V^*_ε (F, G) para J_{II}.

8.2 Definición.—El valor R — ε del juego para J_I, lo representaremos por P_I (depende del ε, aunque no se indique) y se define:

$$P_I = \sup_F \inf_G V_\varepsilon(F, G)$$

Análogamente definiríamos P_{II} para el jugador J_{II}.

A continuación nos planteamos el problema de simplificar en lo posible la expresión de P_I (y lo mismo con P_{II}). En este sentido obtenemos el siguiente resultado:

8.3. Proposición.

$$P_I = \max_F \min_{y \in [0,1]} V_\varepsilon (F, y)$$

$$P_{II} = \max_G \min_{x \in [0,1]} V^*_\varepsilon (x, G)$$

En el caso finito veíamos una proposición que nos permitía expresar P_I y P_{II} de forma que podíamos hacer comparaciones con los conceptos del criterio de la mediana, y que nos permitían utilizar algoritmos de cálculo. Pensamos que es conveniente ver hasta qué punto se puede generalizar tal proposición en el caso presente de juegos infinitos continuos.

Para esto llegamos a la siguiente proposición:

8.4. Proposición.—Las cantidades:

$$A = \max \left\{ z \;/\; \max_F \inf_{y \in [0,1]} \int_{\{x \,/\, A(x,y) \geq z\}} dF(x) \geqslant 1 - \varepsilon \right\}$$

y

$$P_I = \max_F \min_{y \in [0,1]} V_\varepsilon (F, y)$$

coinciden, y representan por tanto, las dos, a P_I (valor R — ε del juego).

Algo análogo tenemos para P_{II}.

Oefinimos entonces, a continuación, los conjuntos de estrategias óptimas para ambos jugadores, y generalizaremos después, en lo posible, el resultado encontrado para los juegos finitos, y que era útil para su cálculo.

8.5. Definición.—Los conjuntos de estrategias óptimas R — ε del juego Γ, para J_I y J_{II}, son respectivamente:

$$T_I (\Gamma) = \{ F \;/\; \min_{y \in [0,1]} V_\varepsilon (F, y) = P_I \}$$

$$T_{II} (\Gamma) = \{ G \;/\; \min_{x \in [0,1]} V^*_\varepsilon (x, G) = P_{II} \}$$

Tenemos entonces la siguiente proposición:

8.6. PROPOSICIÓN.—En un juego infinito continuo los conjuntos:

$$T_I(\Gamma) = \{ F \,/ \min_{y \in [0,1]} V_\varepsilon(F, y) = P_I \}$$

y

$$B = \left\{ F \,/ \inf_{y \in [0,1]} \int_{\{x \,/\, A(x,y) \geq P_I\}} dF(x) \geq 1 - \varepsilon \right\}$$

coinciden.

Estos resultados, junto con otros, se pueden encontrar más ampliamente desarrollados en [3], así como sus demostraciones, de cierta complicación.

Bibliografía

[1] BLACKWELL, D. y GIRSHICK, M. (1966). Theory of games and statistical decisions. John Wiley and Sons.
[2] CRAMER, H. (1968). Métodos matemáticos de Estadística. Aguilar.
[3] HORRA, J. (1977). Criterio R — ε para juegos matemáticos. Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad Complutense.
[4] LOEVE, M. (1963). Probability theory. Van Nostrand Company.
[5] VON NEUMANN, J. y MORGENSTERN, O. (1953). The theory of games and economic behavior. Princeton Univ. Press.
[6] OWEN, G. (1968). Game theory. Saunders Company.
[7] PARTHASARATHY, T. y RAGHAVAN, T. (1971). Some topics in two person games. American Elsevier.
[8] RÍOS, S. (1967). Procesos dinámicos de decisión en concurrencia. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
[9] VRIES, H. DE (1974). Quantile criteria for the selection of strategies in game theory. Game theory.
[10] WALSH, J. (1969). Discrete two person game theory with median payoff criterion. *Opsearch*, 6.
[11] WALSH, J. (1969). Median two person game theory for median competitive games. *Journal of the operations Research Society of Japan.*
[12] WALSH, J. (1970). Generally applicable solutions for two person median game theory. *Journal of the Operations Research Society of Japan.*

[13] WALSH, J. (1970). Generally applicable n-person percentile game theory for case of independently chosen strategies. Tech, resp. n.º 92, Dept of Statistics, Southern Methodist University.

[14] WALSH, J. y KELLEHER, G. (1971). Generally applicable two person percentile game theory. *Opsearch*, 8.

Departamento de Estadística e
Investigación Operativa
Facultad de Ciencias Matemáticas
Madrid