DIFERENCIACION DE MEDIDAS VECTORIALES EN ESPACIOS TOPOLOGICOS

Baltasar Rodríguez-Salinas

Recibido: 5 noviembre 1980

In this paper is studied the differentiation of vector measures in topological spaces Ω. The results represent a contribution enclosed for $\Omega = \mathbf{R}^n$ and real measures.

En este trabajo se estudia la diferenciación de medidas vectoriales en espacios topológicos Ω. Los resultados representan una contribución incluso cuando $\Omega = \mathbf{R}^n$ y las medidas son reales. Hacemos constar que el punto de partida de él ha sido Rudin [10].

1. Definición.—Sea Ω un espacio topológico Hausdorff y $\mu \geqslant 0$ una medida de Borel sobre Ω, e. d., definida sobre la clase $\mathcal{B}$ de los conjuntos de Borel de Ω. Para casi todo $x \in \Omega$, sea $\mathcal{C}(x)$ una colección de subconjuntos de Borel Q de medida $0 < \mu(Q) < \infty$, que contienen a x, de modo que exista una red $(Q_i)_{i \in I}$ en $\mathcal{C}(x)$ convergente a x. La colección completa $\mathcal{C} = \bigcup_{x \in \Omega_0} \mathcal{C}(x)$ con $\mu(\Omega - \Omega_0) = 0$ se llama una *base de diferenciación* sobre Ω.

Denotaremos por μ^* a la medida exterior asociada a μ y supondremos que no existen μ^*-átomos de medida exterior infinita, e. d.,

$$\mu^*(A) = \sup \{\mu^*(X) : X \subset A, \ \mu^*(X) < \infty\}.$$

2. Definición.—Dada una medida real m de Borel, para cada entorno U de $x \in \Omega_0$, se definen los operadores

$$\overline{M}_U(x) = \sup \left\{ \frac{m(Q)}{\mu(Q)} : U \supset Q \in \mathcal{C}(x) \right\}$$

y

$$\underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{U}}(x) = \inf \left\{ \frac{m(\mathrm{Q})}{\mu(\mathrm{Q})} : \ \mathrm{U} \supset \mathrm{Q} \in \mathcal{C}(x) \right\}.$$

Las *derivadas superior* e *inferior*, $\overline{\mathrm{D}}\, m$ y $\underline{\mathrm{D}}\, m$, de m se definen por

$$\overline{\mathrm{Dm}}(x) = \lim_{\mathrm{U} \to x} \overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{U}}(x) = \inf_{\mathrm{U}} \overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{U}}(x)$$

y

$$\underline{\mathrm{Dm}}(x) = \lim_{\mathrm{U} \to x} \underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{U}}(x) = \sup_{\mathrm{U}} \underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{U}}(x)$$

para $x \in \Omega_0$. Para $x \notin \Omega_0$ pondremos

$$\overline{\mathrm{Dm}}(x) = \underline{\mathrm{Dm}}(x) = 0.$$

Se define la *derivada* $\mathrm{D}\, m$ sobre

$$\Omega_m = \{ x \in \Omega_0 : \ -\infty < \underline{\mathrm{Dm}}(x) = \overline{\mathrm{Dm}}(x) < \infty \}$$

por

$$\mathrm{Dm}(x) = \overline{\mathrm{Dm}}(x).$$

Se dice que m es *diferenciable* o *derivable en casi todo* Ω si $\mu(\Omega - \Omega_m) = 0$. Se dice que la base $\mathcal{C}$ *deriva* a (la integral de) la función f si $\mathrm{D}\, m_f = f$ en casi todo Ω, donde

$$m_f(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f \, d\mu \quad (\mathrm{A} \in \mathcal{B}).$$

En este caso se escribe $\mathrm{D}\, f$ en lugar de $\mathrm{D}\, m_f$. Dado un espacio E de funciones $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ se dice que $\mathcal{C}$ *deriva a* E si deriva a cada función de E. En particular, se dice qua la *base* $\mathcal{C}$ *es de densidad* si deriva a las funciones características χ_A de los conjuntos medibles.

3. Definición.—Una colección de $\mathcal{V}$ de subconjuntos de Ω se dice un *cubrimiento de Vitali* de $A \subset \Omega$ si, para cada $x \in A$, existe una red $(Q_i)_{i \in I}$ en $\mathcal{V} \cap \mathcal{C}(x)$ que converge a x.

4. Teorema.—*Si* $m \geqslant 0$ *es una medida de Borel, exteriormente regular, la propiedad* P_1 *implica la propiedad* P'_1:

P_1. *Para todo conjunto* A *de medida exterior* $\mu^*(A) < \infty$, *existe una constante* $M \geqslant 0$, *tal que, para cada cubrimiento de Vitali* $\mathcal{V}$ *de* A *existe una sucesión* (Q_n) *de* $Q_n \in \mathcal{V}$ *que verifica*

$$\mu^*(A) \leq M \sum_n \mu(Q_n) \quad y \quad \sum_n \chi_{Q_n} \leq M,$$

siendo χ_Q *la función característica de* Q.

P'_1. *Si* $m(A) = 0$ $(A \in \mathcal{B})$, *se tiene* $\overline{D}m = 0$ *en casi todo* A.

Demostración.—Dado $\varepsilon > 0$, por ser m exteriormente regular, existe un abierto $G \supset A$ tal que $m(G) < \varepsilon$.

Para $k \in \mathbf{N}$ sea

$$A_k = \{ x \in A \cap \Omega_0 : \overline{D}m(x) > k^{-1} \}$$

y A^0_k un subconjunto de medida exterior finita de A_k: $\mu^*(A^0_k) < \infty$. Entonces el conjunto

$$\mathcal{V} = \{ Q \in \mathcal{C}: \ m(Q) > k^{-1} \mu(Q), \ \ Q \subset G \}$$

es un cubrimiento de Vitali de A^0_k. Por tanto, existe una constante $M = M^0_k \geqslant 0$ y una sucesión (Q_n) de $Q_n \in \mathcal{V}$ tal que

$$\mu^*(A^0_k) \leq M \sum_n \mu(Q_n) \quad y \quad \sum_n \chi_{Q_n} \leq M.$$

De esto resulta

$$\mu^*(A^0_k) \leq k M \sum_n m(Q_n) \leq k M^2 m\left(\bigcup_n Q_n\right) \leq k M^2 m(G) \leq k M^2 \varepsilon$$

y

$$\mu^*(A^0_k) \leq k M^2 \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$. Luego $\mu^*(A^0_k) = 0$ y

$$\mu^*(A_k) = \sup \mu^*(A^0_k) = 0$$

puesto que no existen μ^*-átomos de medida exterior infinita.

Finalmente, como

$$\{x \in A \cap \Omega_0 : \overline{D}m(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

se deduce que $\overline{D}\, m = 0$ en casi todo A.

5. TEOREMA.—*Si* m $\geqslant 0$ *es una medida de Borel* μ*-singular con la propiedad* P'_1, *entonces* D m $= 0$ *en casi todo* Ω.

DEMOSTRACIÓN.—Por ser m μ-singular, existe un $Z \in \mathcal{B}$ de medida $\mu(Z) = 0$ tal que $m(\Omega - Z) = 0$, entonces $D\, m = 0$ en casi todo $\Omega - Z$ y en casi todo Ω según P'_1.

6. TEOREMA.—*Si* f *es una función real integrable y si, para cada* $\alpha \in \mathbf{R}$ *y*

$$A = \{x \in \Omega : f(x) < \alpha\} \quad y \quad A = \{x \in \Omega : f(x) > \alpha\},$$

la medida

$$m_\alpha(Q) = \int_{Q - A} (f - \alpha)\, d\mu \qquad (Q \in \mathcal{B})$$

tiene la propiedad P'_1, *entonces* D f $=$ f *en casi todo* Ω.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $m = m_f$, $A = \{x \in \Omega : f(x) < \alpha\}$ y $\lambda = m_\alpha$. Entonces

$$m(Q) - \alpha\, \mu(Q) = \int_Q (f - \alpha)\, d\mu \leq \lambda(Q)$$

y puesto que $\overline{\mathrm{D}}\,\lambda = 0$ en casi todo A, se tiene $\overline{\mathrm{D}}\,m \leqslant \alpha$ en casi todo A.

Por tanto, si

$$A_r = \{ x \in \Omega : \quad f(x) < r < (\overline{\mathrm{D}}\mathrm{m})(x) \},$$

se tiene $\mu(A_r) = \mu^*(A_r) = 0$. Ahora bien, como

$$A' = \{ x \in \Omega : f(x) < (\overline{\mathrm{D}}\mathrm{m})(x) \}$$

es unión contable de conjuntos A_r, se tiene $\mu(A') = 0$, e. d., $\overline{\mathrm{D}}\,m \leqslant f$ en casi todo Ω.

Si se reemplaza m por $-m$ y f por $-f$, resulta $\underline{\mathrm{D}}\,m \geqslant f$ en casi todo Ω. Por consiguiente,

$$-\infty < (\underline{\mathrm{D}}\mathrm{m})(x) = f(x) = (\overline{\mathrm{D}}\mathrm{m})(x) < \infty$$

en casi todo Ω, e. d., $\mathrm{D}\,f = f$ en casi todo Ω.

7. TEOREMA.—*En la hipótesis P_1, si* m *es una medida compleja de Borel, exteriormente regular, sobre Ω, se tiene:*

7.1. m *es diferenciable en casi todo* Ω.

7.2. *D* m *es integrable.*

7.3. *Para todo conjunto A de Borel, se verifica*

$$\mathrm{m}(A) = \int_A Dm \,\mathrm{d}\mu + \mathrm{m}_s(A),$$

donde $\mathrm{m}_s \perp \mu$ *y* $D\,\mathrm{m}_s = 0$ *en casi todo* Ω.

DEMOSTRACIÓN.—Resulta de los teoremas 4, 5, 6 y del teorema de descomposición de Lebesgue.

8. DEFINICIÓN.—Una medida de Borel m con valores en un e. l. c. s. E se dice *diferenciable en* $x \in \Omega_0$ si existe $y \in \mathrm{E}$ tal que

$$\lim_{Q \to x} \frac{m(Q)}{\mu(Q)} = y \quad (Q \in \mathcal{C}(x)),$$

Entonces se pone

$$(\mathrm{Dm})(x) = y .$$

En esta definición lo esencial es que m esté definida sobre $\mathcal{C}$.

Para las medidas vectoriales se extienden los conceptos y notaciones de la definición 2.

9. TEOREMA.—*Sean E un espacio de Banach y* $\mathrm{f}: \Omega \longrightarrow E$ *una función μ-integrable Bochner. Supongamos que, para cada* $\mathrm{y} \in E$ *y* $\mathrm{r} > 0$, *la medida de Borel*

$$\mathrm{m}_0 : \quad \mathrm{m}_0(Q) = \int_{Q - A_0} (|\mathrm{f}| + 1)\, d\mu$$

satisface P'_1 para

$$A_0 = \{ \mathrm{x} \in \Omega : \quad \| \mathrm{f}(\mathrm{x}) - \mathrm{y} \| \leq \mathrm{r} \} .$$

Entonces $D\,\mathrm{f} = \mathrm{f}$ *en casi todo* Ω.

DEMOSTRACIÓN.—Es claro que se puede suponer f medible Borel y separable. Sean (y_h) una sucesión densa en $f(\Omega)$,

$$\mathrm{A}_{hk} = \{ x \in \Omega : \quad \| f(x) - y_h \| \leq k^{-1} \}$$

y

$$m_{hk}(Q) = \int_{Q - \mathrm{A}_{hk}} (|f| + 1)\, d\mu .$$

Entonces, según P'_1, existe un conjunto $\mathrm{A}'_{hk} \subset \mathrm{A}_{hk}$ tal que

$$\mu(\mathrm{A}_{hk} - \mathrm{A}'_{hk}) = 0 \quad \text{y} \quad (\mathrm{Dm}_{hk})(x) = 0$$

para todo $x \in \mathrm{A}'_{hk}$. De esto resulta

$$\lim_{Q \to x} \left\| \frac{m(Q)}{\mu(Q)} - \frac{m'_{hk}(Q)}{\mu(Q)} \right\| = 0 \quad (Q \in \mathcal{C}(x))$$

para $x \in A'_{hk}$, siendo $m = m_f$ y

$$m'_{hk}(Q) = \int_{Q \cap A_{hk}} f \, d\mu .$$

Como por otra parte se tiene

$$\left\| \frac{m'_{hk}(Q)}{\mu(Q)} - f(x) \right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\mu(Q)} \int_{Q \cap A_{hk}} \| f(t) - f(x) \| \, d\mu(t) + \frac{\| f(x) \|}{\mu(Q)} \int_{Q - A_{hk}} d\mu$$

y

$$\overline{\lim_{Q \to x}} \left\| \frac{m'_{hk}(Q)}{\mu(Q)} - f(x) \right\| \leq \frac{2}{k} \quad (Q \in \mathcal{C}(x))$$

para $x \in A'_{hk}$, resulta

$$\overline{\lim_{Q \to x}} \left\| \frac{m(Q)}{\mu(Q)} - f(x) \right\| \leq \frac{2}{k} \quad (Q \in \mathcal{C}(x))$$

para $x \in A'_{hk}$ y, por tanto, también para

$$x \in A'_k = \bigcup_{h=1}^{\infty} A'_{hk} .$$

Es claro que

$$\mu(\Omega - A'_k) \leq \sum_{h=1}^{\infty} \mu(A_{hk} - A'_{hk}) = 0 .$$

Sea $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A'_k$, entonces $\mu(\Omega - A) = 0$ y, para cada $x \in A$, se tiene

$$\overline{\lim_{Q \to x}} \left\| \frac{m(Q)}{\mu(Q)} - f(x) \right\| \leq \frac{2}{k} \quad (Q \in \mathcal{C}(x))$$

para todo k, e. d.,

$$\lim_{Q \to x} \frac{m(Q)}{\mu(Q)} = f(x) \qquad (Q \in \mathcal{C}(x))$$

y

$$(\mathrm{D}m)(x) = f(x).$$

En resumen, $\mathrm{D} f = f$ en casi todo Ω.

La misma demostración anterior permite establecer el teorema cuando f es una función μ-medible, absolutamente integrable sobre los conjuntos de medida finita.

10. TEOREMA.—*Sean E un espacio de Fréchet y* $\mathrm{f}: \Omega \longrightarrow E$ *una función μ-medible, absolutamente integrable sobre los conjuntos de medida finita. Supongamos:*

10.1. *μ es exteriormente regular.*

10.2. *Se verifica la condición P_1.*

Entontes D f = f *es casi todo Ω.*

DEMOSTRACIÓN.—Para cada entorno absolutamente convexo y cerrado U de 0 en E, sea π_{U} la aplicación canónica $\mathrm{E} \longrightarrow \hat{\mathrm{E}}_{\mathrm{U}}$ (compleción de E_{U}). Entonces por los teoremas 4 y 9 se tiene $\mathrm{D}\, \pi_{\mathrm{U}} \circ m_f = \pi_{\mathrm{U}} \circ f$ en casi todo Ω, de donde, teniendo en cuenta que E es metrizable y que existe una sucesión fundamental de entornos de 0 en E, se deduce que $\mathrm{D} f = f$ en casi todo Ω.

11. TEOREMA.—*Si* $\mathrm{f} \geqslant 0$ *es una función real μ-medible y μ es exteriormente regular, la propiedad P_2 implica la propiedad P'_2.*

P_2. *Para todo conjunto A de medida exterior finita, existen dos constantes $M > 0$ y* $\mathrm{t} > 0$, *dos funciones reales no decrecientes* Φ *y* ψ *sobre* $\mathbf{R}^+$, *nulas en el origen, y un abierto $G \supset A$ tales que:*

a) $\int_{\mathrm{G}} \Phi(\mathrm{f}/\mathrm{s})\, d\mu < \infty$ *para todo* $\mathrm{s} > 0$.

b) $\mathrm{u\, v} \leqslant \Phi(\mathrm{u}) + \psi(\mathrm{v})$ *para* $\mathrm{u}, \mathrm{v} \geqslant 0$.

c) *Para todo cubrimiento de Vitali $\mathcal{V}$ de A, hay una sucesión (Q_n) de $Q_n \in \mathcal{V}$ que verifican*

$$\mu^*(A) \leq M \sum_n \mu(Q_n)$$

y

$$\int_{\Omega} \psi \left(\frac{1}{t} \Sigma \chi_{Q_n} \right) d \mu \leq M$$

P'_2. *Si A es medible y $m_f(A) = 0$, e. d., $f = 0$ en casi todo A, se tiene $D f = D m_f = 0$ en casi todo A.*

DEMOSTRACIÓN.—Para $k \in \mathbf{N}$ sea

$$A_k = \{ x \in A \cap \Omega_0 : \overline{D}m(x) > k^{-1} \} \qquad (m = m_f)$$

y A^0_k un subconjunto de medida exterior finita de A_k: $\mu^*(A^0_k) < \infty$. Entonces, existe un abierto $G = G^0_k \supset A^0_k$ tal que

$$\int_G \Phi(f/s)\, d\mu < \infty$$

para todo $s > 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, por ser μ exteriormente regular, existe un abierto G_ε tal que

$$A^0_k \subset G_\varepsilon \subset G$$

y

$$\int_{G_\varepsilon} \Phi(f/s)\, d\mu < \varepsilon .$$

Por otra parte,

$$\mathcal{V} = \{ Q \in \mathcal{C} : m(Q) > k^{-1} \mu(Q), \quad Q \subset G_\varepsilon \}$$

es un cubrimiento de Vitali de A^0_k. Por tanto, existen dos constantes $M = M^0_k > 0$ y $t = t^0_k > 0$, dos funciones no decrecientes $\Phi = \Phi^0_k$ y $\psi = \psi^0_k$ sobre R^+, nulas en el origen, dependientes solamente de A^0_k, tales que se puede extraer una sucesión (Q_n) de $\mathcal{V}$ que verifica

$$\mu^*(A^0_k) \leq M \sum_n \mu(Q_n)$$

y

$$\int_{\Omega} \psi\left(\frac{1}{t}\sum_n \chi_{Q_n}\right) d\mu \leq M .$$

De todo esto resulta

$$\mu^*(A^0_k) \leq k M \sum_n m(Q_n) = k M \int_{G_s} f \sum_n \chi_{Q_n} d\mu \leq$$

$$\leq k s t M \left[\int_{G_s} \Phi\left(\frac{f}{s}\right) d\mu + \int_{G_s} \psi\left(\frac{1}{t}\sum_n \chi_{Q_n}\right) d\mu \right] \leq$$

$$\leq k s t M (\varepsilon + M)$$

para todo $\varepsilon > 0$. Luego

$$\mu^*(A^0_k) \leq k s t M^2$$

para todo $s > 0$,

$$\mu^*(A^0_k) = 0$$

y $\mu^*(A_k) = 0$ puesto que no existen μ^*-átomos de medida exterior infinita.

Finalmente, como

$$\{x \in A \cap \Omega_0 : \overline{D}m(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k ,$$

se deduce que $D\, m = 0$ en casi todo A.

12. Teorema.—*Sean E un espacio de Fréchet y* f: $\Omega \longrightarrow E$ *una función μ-medible. Supongamos:*

12.1. *μ es exteriormente regular.*

12.2. *Para cada seminorma* p *de E, la función* p $\circ$ f *cumple la condición P_2.*

Entonces D f = f *en casi todo* Ω.

DEMOSTRACIÓN.—Basta proceder como en el teorema 10, teniendo en cuenta los teoremas 9 y 11. Obsérvese que f es localmente integrable en el sentido de que es integrable sobre los conjuntos de medida finita.

13. TEOREMA.—*Si* $f \geqslant 0$ *es una función real* μ*-medible y* μ *es exteriormente regular, la propiedad* P_3 *implica la propiedad* P'_3 $(= P'_2)$.

P_3. *Para todo conjunto A de medida exterior finita, existen una constante* $M > 0$, *una función real no decreciente* ψ *sobre* R^+, *nula en el origen, y un abierto* $G \supset A$ *tales que:*

a) $|f| \leqslant M$ *sobre G.*

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \psi(u)/u = \infty$.

c) *Para todo cubrimiento de Vitali* $\mathcal{V}$ *de A, hay una sucesión* (Q_n) *de* $Q_n \in \mathcal{V}$ *que verifican*

$$\mu^*(A) \leq M \sum_n \mu(Q_n)$$

y

$$\int_\Omega \psi\left(\sum_n \chi_{Q_n}\right) d\mu \leq M.$$

P'_3. *Si A es medible y* $m_f(A) = 0$, *e. d.,* $f = 0$ *en casi todo A, se tiene* $D f = D m_f = 0$ *en casi todo A.*

DEMOSTRACIÓN.—Para $k \in \mathbf{N}$ sea

$$A_k = \{ x \in A \cap \Omega_0 : \overline{D}m(x) > k^{-1} \} \qquad (m = m_f)$$

y A^0_k un subconjunto de medida exterior finita de A_k: $\mu^*(A^0_k) < \infty$. Entonces existe un abierto $G = G^0_k$, una constante $M = M^0_k > 0$ y una función real no decreciente $\psi = \psi^0_k$ sobre $\mathbf{R}^+$, nula en el origen, en las condiciones a), b) y c).

Dado $\varepsilon > 0$, existe un $\alpha > 0$ tal que

$$u \leq \varepsilon \psi(u)$$

para $u \geqslant \alpha$, y se puede determinar un abierto G_ε de modo que

$$A^0{}_k \subset G_\varepsilon \subset G$$

y

$$\alpha \int_{G_\varepsilon} f \, d\mu < \varepsilon .$$

Por otra parte,

$$\mathcal{V} = \{ Q \in \mathcal{C} : \quad m(Q) > k^{-1} \mu(Q), \quad Q \subset G_\varepsilon \}$$

es un cubrimiento de Vitali de $A^0{}_k$. Por tanto, hay una sucesión (Q_n) de $Q_n \in \mathcal{V}$ que verifica

$$\mu^*(A^0{}_k) \leq M \sum_n \mu(Q_n)$$

y

$$\int_\Omega \phi \left(\sum_n \chi_{Q_n} \right) d\mu \leq M .$$

De todo esto resulta

$$\mu^*(A^0{}_k) \leqslant k M \sum_n m(Q_n) = k M \int_{G_\varepsilon} f \sum_n \chi_{Q_n} \, d\mu \leq k M (1 + M^2) \varepsilon$$

puesto que, si

$$H = \left\{ x \in G_\varepsilon : \sum_n \chi_{Q_n} \leq \alpha \right\}$$

se tiene

$$\int_{G_\varepsilon} f \sum_n \chi_{Q_n} \, d\mu = \int_H + \int_{G_\varepsilon - H} \leq$$

$$\leq \alpha \int_{G_\varepsilon} f \, d\mu + \varepsilon M \int_{G_\varepsilon} \phi \left(\sum_n \chi_{Q_n} \right) d\mu \leq \varepsilon + \varepsilon M^2 .$$

Luego

$$\mu^*(A^0_k) \leq k\, M\,(1 + M^2)\,\varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$, $\mu^*(A^0_k) = 0$ y $\mu^*(A_k) = 0$ ya que no existen μ^*-átomos de medida exterior infinita.

14. TEOREMA.—*Sean E un espacio de Fréchet y* f: $\Omega \longrightarrow E$ *una función* μ*-medible. Supongamos:*

14.1. μ *es exteriormente regular con la propiedad* P_3*: b) y c).*

14.2. f *es esencialmente acotada sobre todo conjunto de medida finita.*

Entonces $D\,f = f$ *en casi todo* Ω.

DEMOSTRACIÓN.—Basta proceder como en el teorema 10, teniendo en cuenta los teoremas 9 y 13.

15. TEOREMA.—*Si* μ *es exteriormente regular con la propiedad* P_3*: b), c), existe un lifting casi fuerte sobre el álgebra* $\mathcal{L}^\infty_R$ *de las funciones reales medibles esencialmente acotadas.*

DEMOSTRACIÓN.—Basta proceder como en el teorema 15 de [9], teniendo en cuenta el teorema 14 para $E = \mathbf{R}$.

16. TEOREMA.—*Si* $f \geq 0$ *es una función real* μ*-medible y* μ *es exteriormente regular, la propiedad* P_4 *implica la propiedad* P'_4 $(= P'_2)$.

P_4. *Para todo conjunto A de medida exterior finita, existen dos constantes* $M > 0$ *y* $s > 0$*, tres funciones reales no decrecientes* Φ, ψ *y* τ*, nulas en el origen, y un abierto* $G \supset A$ *tales que:*

a) $\int_G \Phi\,(f/s)\,d\mu < \infty$.

b) $u\,v \leq \Phi\,(u) + \psi\,(v)$ *para* $u, v \geq 0$.

c) $\lim\limits_{u \to \infty} \tau\,(u)/u = \infty$.

d) *Para todo cubrimiento de Vitali* $\mathcal{V}$ *de A, hay una sucesión* (Q_n) *de* $Q_n \in \mathcal{V}$ *que verifican:*

$$\mu^*(A) \leq M \sum_n \mu\,(Q_n)$$

y

$$\int_{\Omega} \phi \circ \tau \left(\sum_n \chi_{Q_n} \right) d\mu \leq M .$$

P'$_4$. *Si A es medible y* $m_f(A) = 0$, *e. d.*, $f = 0$ *en casi todo A, se tiene* $D f = D m_f = 0$ *en casi todo A.*

DEMOSTRACIÓN.—Basta proceder como en los teoremas 11 y 13, teniendo en cuenta:

Dado $\varepsilon > 0$, existe un $\alpha > 0$ tal que

$$u \leq \varepsilon \tau(u)$$

para $u \geqslant \alpha$, y se puede determinar un abierto G_ε de modo que

$$A^0_k \subset G_\varepsilon \subset G, \qquad \alpha \int_{G_\varepsilon} f \, d\mu < \varepsilon \quad \text{y} \quad \int_{G_\varepsilon} \Phi\left(\frac{f}{s}\right) d\mu \leq M .$$

Entonces

$$\mathcal{V} = \{ Q \in \mathcal{C} : \quad m(Q) > k^{-1} \mu(Q), \quad Q \subset G_\varepsilon \}$$

es un cubrimiento de Vitali de A^0_k. Por tanto, hay una sucesión (Q_n) de $Q_n \in \mathcal{V}$ que verifican

$$\mu^*(A^0_k) \leq M \sum_n \mu(Q_n)$$

y

$$\int_{\Omega} \phi \circ \tau \left(\sum_n \chi_{Q_n} \right) d\mu \leq M .$$

Por tanto, si

$$H = \left\{ x \in G_\varepsilon : \sum_n \chi_{Q_n} \leq \alpha \right\},$$

se tiene

$$\int_{G_\varepsilon} f \sum_n \chi_{Q_n} \, d\mu = \int_H + \int_{G_\varepsilon - H} \leq \alpha \int_{G_\varepsilon} f \, d\mu + \varepsilon \int_{G_\varepsilon} f \tau \left(\sum_n \chi_{Q_n} \right) d\mu \leq$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon s \int_{G_\varepsilon} \Phi \left(\frac{f}{s} \right) d\mu + \varepsilon s \int_{G_\varepsilon} \phi \circ \tau \left(\sum_n \chi_{Q_n} \right) d\mu \leq (1 + 2 M s) \varepsilon .$$

De esto resulta

$$\mu^* (A^0_k) \leq k M (1 + 2 M s) \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$, e. d., $\mu^* (A^0_k) = 0$.

De igual forma que antes podemos establecer:

17. Teorema.—*Sean E un espacio de Fréchet y* $\mathrm{f}: \Omega \longrightarrow E$ *una función μ-medible. Supongamos:*

17.1. *μ es exteriormente regular.*

17.2. *Para cada seminorma* p *de E y para cada conjunto A de medida exterior finita, la función* $\mathrm{p} \circ \mathrm{f}$ *cumple P_2 o P_3, o bien P_4.*

Entonces $D\,\mathrm{f} = \mathrm{f}$ *en casi todo* Ω.

18. Teorema.—*Sean E un e. l. c. s., $\mathcal{C}$ una base de densidad y* $\mathrm{f}: \Omega \longrightarrow E$ *una función μ-medible, integrable sobre cada conjunto de medida finita y tal que la envoltura absolutamente convexa y cerrada* $\overline{\mathrm{aco}}\, \mathrm{f}(\Omega)$ *de* $\mathrm{f}(\Omega)$ *es un subconjunto metrizable de E. Supongamos que, para cada seminorma* p *de E, existe una función real* $\mathrm{g_p} \geqslant 0$ *μ-medible e integrable sobre cada conjunto de medida finita que verifica:*

18.1. $\lim\limits_{n} \mu(\{x : \mathrm{g_p}(x) \geqslant n\}) = 0$.

18.2. $\mathrm{p} \circ \mathrm{f} \leqslant \mathrm{g_p}$.

18.3. *$\mathcal{C}$ deriva a* $m_{g_p} = \int \mathrm{g_p} \, d\mu$.

Entonces $D\,\mathrm{f} = \mathrm{f}$ *en casi todo* Ω.

Demostración.—Por el teorema 6 o el teorema 9, $\mathcal{C}$ deriva a $L^\infty(\mu) = L^\infty(\mu, \mathbf{R})$.

Sea $E = \mathbf{R}$ y $f \geqslant 0$. Para $n \in \mathbf{N}$, definamos

$$f^n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq n \\ 0 & \text{si} \quad f(x) < n \end{cases}$$

y

$$f_n(x) = f(x) - f^n(x).$$

Igualmente, para $g = g_D$ $(\geqslant f)$ se tiene una descomposición análoga

$$g = g^n + g_n.$$

Como $\mathcal{C}$ es una base de densidad, según acabamos de ver se tiene $D\, g_n = g_n$ en casi todo Ω y, por tanto, $D\, g^n = g^n$ en casi todo Ω. Siendo

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f^n\, d\mu \leq \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q g^n\, d\mu,$$

para $\alpha > 0$ se verifica

$$\begin{aligned} \mu^*(\{x:\ |\overline{D}m_f(x) - f(x)| > \alpha\} &= \mu^*(\{x:\ \overline{D}m_{f^n}(x) - f^n(x)| > \alpha\}) \\ &\leq \mu^*\left(\left\{x:\ \overline{D}m_{f^n}(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) + \mu^*\left(\left\{x:\ f^n(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \leq \\ &\leq \mu^*\left(\left\{x:\ \overline{D}m_{g^n}(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x:\ g^n(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \leq \\ &= 2\mu\left(\left\{x:\ g^n(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) = 2\mu(\{x:\ g(x) \geq n\}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $n \longrightarrow \infty$. Luego $\overline{D}\, m_f = f$ en casi todo Ω. Análogamente, $\underline{D}\, m_f = f$ en casi todo Ω. Entonces $D\, f = D\, m_f = 0$ en casi todo Ω.

Ahora podemos pasar al caso general. Como $p \circ f \leqslant g_D$, del resultado anterior se deduce que, si

$$m_0(Q) = \int_{Q-A} (p \circ f + 1)\, d\mu \quad (A \in \mathcal{B}),$$

se tiene $D\,m_0 = 0$ en casi todo A. De esto se obtiene si se procede como en el teorema 9, por ser f esencialmente separable, que

$$\lim_{Q \to x} p\left(\frac{m_f(Q)}{\mu(Q)} - f(x)\right) = 0 \quad (Q \in \mathcal{C}(x))$$

en casi todo Ω para cada seminorma p de E. Entonces, si se tiene en cuenta que $\overline{\mathrm{aco}}\, f(\Omega)$ es metrizable y que $m_f(Q)/\mu(Q) \in \overline{\mathrm{aco}}\, f(\Omega)$, resulta

$$\lim_{Q \to x} \frac{m_f(Q)}{\mu(Q)} = f(x) \quad (Q \in \mathcal{C}(x))$$

en casi todo Ω, e. d., $D\,f = D\,m_f = f$ en casi todo Ω.

Bibliografía

[1] DIESTEL, J. y UHL, J. J. Jr. (1977). Vector measures. *Amer. Math. Soc. Providence*, R. I.

[2] GUZMÁN, M. DE. (1975). Differentiation of Integrals in R^n. *Lect. Notes in Math.*, n.° 481. Springer, Berlin.

[3] IONESCU TULCEA, C. (1971). On Liftings and Derivation Bases. *J. of Math. An. Appl.*, **35**, 449-466.

[4] HAYES, C. A. and PAUC, C. Y. (1970). Derivation and Martingales. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, 49. Springer, Berlin,

[5] KÖLZOV, D. (1968). Differentiation von Massen. *Lect. Notes in Math.*, n.° 65. Springer, Berlin.

[6] PELLAUMIL, J. (1969). Sur la dérivation des mesures vectorielles. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **269**, 904-907.

[7] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1979). Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid*, **73**, 361-387.

[8] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1980). El teorema de Radon-Nikodym para las medidas con valores en un espacio localmente covexo. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid*, **74**, 41-64.

[9] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. Diferenciación de medidas vectoriales en semi-μ-espacios de Lusin. En curso de publicación.

[10] RUDIN, W. (1970). Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, London.

[11] SION, M. (1973). *A Theory of Semigroup Valued Measures*. *Lect. Notes in Math.*, n.° 355. Springer, Berlin.

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid