DIFERENCIACION DE MEDIDAS VECTORIALES EN SEMI-μ-ESPACIOS DE LUSIN

Baltasar Rodríguez-Salinas

Recibido: 5 noviembre 1980

The almost-μ-Lusin spaces have been defined by us in [5]. In this paper we use a natural basis of differentiation over them which has very remarkable properties of covernig. Like an application of the theory of differentiation of measures developped here, it is obtained an almost strong lifting over the space $\mathcal{L}^{\infty}_{R}$ of the real measurable functions essentially bounded. Using resources of the theory of martingals we also find the derivative of vector measures valued in a Fréchet space.

Los semi-μ-espacios de Lusin los hemos definido en [5]. En este trabajo utilizamos una base natural de diferenciación sobre ellos que tiene propiedades muy notables de cubrimiento. Como aplicación de la teoría de diferenciación de medidas aquí desarrollada, se obtiene un lifting casi fuerte sobre el espacio $\mathcal{L}^{\infty}_{\mu}$ de las funciones reales medibles esencialmente acotadas. Utilizando recursos de la teoría de martingalas derivamos también medidas vectoriales con valores en un espacio de Fréchet.

1. Definición.—Sea Ω un espacio topológico y $\mathcal{H}$ una clase de conjuntos cerrados de Ω. Se llama *medida de Radon de tipo* ($\mathcal{H}$), toda medida $\mu \geqslant 0$ definida sobre la clase $\mathcal{B}$ de los conjuntos de Borel de Ω con las propiedades:

1.1. Todo $H \in \mathcal{H}$ es μ-compacto y de medida finita. (Un conjunto H se dice μ-compacto si, para todo cubrimiento abierto $\mathcal{G}_0$ de H y para todo $\varepsilon > 0$, existe un número finito de abiertos $G_i \in \mathcal{G}_0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, tales que $\mu\,(H - \bigcup_{1}^{n} G_i) < \varepsilon$.)

1.2. $\mu\,(B) = \sup\,\{\mu\,(H) : B \supset H \in \mathcal{H}\}$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

En particular, si los conjuntos $H \in \mathcal{H}$ son compactos y μ es localmente finita, la condición 1.1 queda automáticamente satisfecha. Es claro que, si $\mathcal{K}$ es la clase de los compactos de Ω, entonces una medida de Radon (esencial) es una medida de Radon de tipo $(\mathcal{K})$.

Cuando $\mathcal{H}$ es la clase $\mathcal{K}_m$ de los conjuntos compactos metrizables de Ω, μ es una medida de Radon de tipo $(\mathcal{K}_m)$ si

$$\mu(B) = \sup \{ \mu(K) : B \supset K \in \mathcal{K}_m \}$$

y $\mu(K)$ es finito para cada $K \in \mathcal{K}_m$.

2. Definición.—Sea Ω un espacio topológico Hausdorff y μ una medida de Borel finita sobre Ω. Sea $\mathcal{C} = \{C(n_1, \ldots, n_k)\}$ una clase de subconjuntos $C(n_1, \ldots, n_k)$ de Ω, donde k y $n_1, \ldots, n_k$ son números naturales. Sea $\mathcal{Z} = \{Z(n_1, \ldots, n_k)\}$ una clase análoga de conjuntos de medida nula. Se dice que Ω es un *μ-espacio de Suslin* si se verifican:

2.1.

$$\Omega = \bigcup_{n_1} C(n_1) \cup Z_\theta,$$

$$C(n_1, \ldots, n_{k-1}) = \bigcup_{n_k} C(n_1, \ldots, n_k) \cup Z(n_1, \ldots, n_{k-1})$$

para $k > 1$ y todo sistema $n_1, \ldots, n_{k-1}$.

2.2. Toda sucesión coherente $(C(n_1, \ldots, n_k))_{k \in N}$ converge a un punto x de Ω que está contenido en cada $C(n_1, \ldots, n_k)$ de la sucesión.

Se dice que Ω es un μ-espacio de Lusin si además cada familia $\mathcal{C}_k = (C(n_1, \ldots, n_k))$ es disjunta.

3. Teorema.—*Sea Ω un espacio topológico Hausdorff y μ una medida de Borel finita. Entonces son equivalentes:*

3.1. *Ω es un μ-espacio de Suslin.*

3.2. *μ es una medida de Radon de tipo $(\mathcal{K}_m)$.*

3.3. *Existe un sistema $\mathcal{C} = \{C(n_1, \ldots, n_k)\}$ tal que, para todo k, $\mathcal{C}_k = (C(n_1, \ldots, n_k))$ consiste de conjuntos compactos metrizables disjuntos de Ω.*

3.4. *Ω es un μ-espacio de Lusin.*

DEMOSTRACIÓN.—Véase el teorema 5 de [4].

Por tanto, si Ω es un μ-espacio de Suslin podemos suponer que sobre Ω hay una clase $\mathcal{C} = \{C(n_1, \ldots, n_k)\}$ tal que, para cada $k \in \mathbf{N}$,

$$\mathcal{C}_k = (C(n_1, \ldots, n_k))$$

consiste de conjuntos disjuntos de Ω. Estos conjuntos $C(n_1, \ldots, n_k)$ son μ-medibles según el corolario 4 de [4].

4. DEFINICIÓN.—Sea Ω un espacio topológico Hausdorff y μ una medida de Borel sobre Ω. Sea $\mathcal{C} = \{C(n_1, \ldots, n_k)\}$ una clase de subconjuntos $C(n_1, \ldots, n_k)$ de Ω, donde k y $n_1, \ldots, n_k$ son números naturales. Sea $\mathcal{Z} = \{Z(n_1, \ldots, n_k)\}$ una clase análoga de subconjuntos de medida nula. Se dice que Ω es un *semi-μ-espacio de Suslin* si se verifican:

4.1.

$$\Omega = \bigcup_{n_1} C(n_1) \cup Z_0,$$

$$C(n_1, \ldots, n_{k-1}) = \bigcup_{n_k} C(n_1, \ldots, n_k) \cup Z(n_1, \ldots, n_{k-1})$$

para $k > 1$ y todo sistema $n_1, \ldots, n_{k-1}$.

4.2. Si $(C(n_1, \ldots, n_k))_{k \in \mathbf{N}}$ es una sucesión coherente tal que

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} C(n_1, \ldots, n_k),$$

dicha sucesión converge a x.

Supondremos:

4.3. Todo conjunto $C(n_1, \ldots, n_k)$ es de Borel.

Se dice que Ω es un semi-μ-espacio de Lusin si además cada familia $\mathcal{C}_k = (C(n_1, \ldots, n_k))$ es disjunta.

Los conjuntos $Q \in \mathcal{C}$ se llaman cubos. Es claro que se puede suponer $\mu(Q) > 0$ para todo $Q \in \mathcal{C}$, suprimiendo los cubos de medida nula. Supondremos también la medida $\mu(Q)$ finita para cada $Q \in \mathcal{C}$.

Dado $k \in \mathbf{N}$, sea como antes $\mathcal{C}_k$ la familia $(C(n_1, \ldots, n_k))$. Entonces, si

$$\Omega_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup \mathcal{C}_k,$$

de la misma forma que en el teorema 3 de [4] se tiene

$$\mu(\Omega - \Omega_0) = 0.$$

Si Ω es un μ-espacio de Suslin (resp. Lusin), Ω_0 es un espacio de Suslin (resp. Lusin).

5. Definición.—Dado un subconjunto A de Ω, una clase $\mathcal{V}$ de cubos se dice un cubrimiento de Vitali de A si, para cada $x \in A$, existe una sucesión (Q_n) de cubos que converge a x y tal que $x \in Q_n \in \mathcal{V}$ para todo n.

De aquí en adelante supondremos que *cada familia*

$$\mathcal{C}_k = (C(n_1, \ldots, n_k))$$

es disjunta, e. d., que Ω es un semi-μ-espacio de Lusin, y que μ *es una medida de Borel exteriormente regular.*

6. Teorema.—*Si $\mathcal{V}$ es un cubrimiento por cubos de un subconjunto A de Ω, existe una sucesión disjunta, finita o infinita, (Q_n) de cubos $Q_n \in \mathcal{V}$, que cubre a A: $A \subset \bigcup Q_n$. Si $\mathcal{V}$ es un cubrimiento de Vitali de A, para cada $\varepsilon > 0$, se puede seleccionar la sucesión (Q_n) de forma que*

$$\sum_n \mu(Q_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon,$$

siendo μ^* la medida exterior asociada a μ.

Demostración.—Para cada $x \in A$, sea

$$Q_x = \bigcup \{Q : x \in Q \in \mathcal{V}\}.$$

Entonces $(Q_n) = (Q_x)_{x \in A}$ es una sucesión de cubos $Q_x \in \mathcal{V}$ que cubre a A y satisface la condición requerida puesto que

$$Q_x \cap Q_y = \varnothing \quad \text{o} \quad Q_x = Q_y.$$

Si $\mathcal{V}$ es un cubrimiento de Vitali de A, dado $\varepsilon > 0$, por ser μ una medida de Borel exteriormente regular existe un abierto $G \supset A$ tal que

$$\mu(G) \leq \mu^*(A) + \varepsilon .$$

Sea

$$\mathcal{V}_0 = \{ Q \in \mathcal{V} : Q \subset G \} .$$

$\mathcal{V}_0$ es un cubrimiento de Vitali de A por serlo $\mathcal{V}$. Por tanto, según hemos probado antes, existe una sucesión disjunta (Q_n) de cubos $Q_n \in \mathcal{V}_0$ que cubre a A y verifica

$$\sum_n \mu(Q_n) = \mu\left(\bigcup_n Q_n\right) \leq \mu(G) \leq \mu^*(A) + \varepsilon .$$

7. Definición.—Dada una medida real m, definida sobre una σ-álgebra que contiene a la clase $\mathcal{C}$ de los cubos, sea

$$f_n = \Sigma \left\{ \frac{m(Q)}{\mu(Q)} \chi_Q : Q \in \mathcal{C}_n \right\} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

siendo χ_Q la función característica de Q.

Definen las *derivadas, inferior y superior,* $\underline{D}\, m$ y $\overline{D}\, m$, de m por

$$\underline{D}m(x) = \underline{\lim_n}\, f_n(x) \quad \text{y} \quad \overline{D}m(x) = \overline{\lim_n}\, f_n(x) .$$

Estas funciones, $\underline{D}\, m$ y $\overline{D}\, m$, son medibles Borel porque, evidentemente, las funciones f_n son medibles Borel.

Se define la *derivada* $D\, m$ sobre

$$\{ x \in \Omega : \underline{D}m(x) = \overline{D}m(x) \}$$

por

$$Dm(x) = \lim_n f_n(x) ,$$

y se pone D m $(x) = 0$ en el resto. Esta función también es medible Borel.

Se dice que m es *diferenciable* en casi todo Ω si

$$- \infty < \underline{D}m\,(x) = \overline{D}m\,(x) < \infty$$

en casi todo Ω.

8. TEOREMA.—*Sea* m *una medida de Borel no negativa sobre* Ω, *exteriormente regular y tal que*

$$\overline{D}m\,(x) \geqq \alpha$$

para todo $x \in A$. *Entonces*

$$m^*(A) \geqq \alpha\,\mu^*(A)\,.$$

DEMOSTRACIÓN.—Siendo m exteriormente regular, dado $\varepsilon > 0$ existe un abierto $G \supset A$ tal que

$$m\,(G) \leqq m^*(A) + \varepsilon\,.$$

Sea $A_0 = A \cap \Omega_0$ y

$$\mathcal{V} = \{ Q \in \mathcal{C} :\ m\,(Q) > \beta\,\mu\,(Q), \quad Q \subset G \}$$

para $\beta < \alpha$. Como $\mathcal{V}$ es un cubrimiento de Vitali de A_0, por el teorema 6 existe una sucesión disjunta (Q_n) de cubos $Q_n \in \mathcal{V}$ tal que $A_0 \subset \bigcup_n Q_n$. Por consiguiente,

$$m^*(A) + \varepsilon \geqq m\,(G) \geqq \sum_n m\,(Q_n) \geqq \beta \sum_n \mu\,(Q_n) =$$

$$= \beta\,\mu\left(\bigcup_n Q_n\right) \geqq \beta\,\mu^*(A_0) = \beta\,\mu^*(A)$$

puesto que $\mu^*(A - A_0) = 0$. Luego

$$m^*(A) + \varepsilon \geqq \beta\,\mu^*(A)\,.$$

Como $\beta < \alpha$ y $\varepsilon > 0$ son arbitrarios, resulta

$$m^*(A) \geqq \alpha \mu^*(A).$$

9. TEOREMA.—*Sea* m *una medida de Borel no negativa y* μ-*continua sobre* Ω *y tal que*

$$\underline{D}m(x) \leqq \alpha$$

para todo $x \in A$. *Entonces*

$$m^*(A) \leqq \alpha \mu^*(A).$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $A_0 = A \cap \Omega_0$ y

$$\mathcal{V} = \{ Q \in \mathcal{C} : m(Q) < \beta \mu(Q) \}$$

para $\beta > \alpha$. Como $\mathcal{V}$ es un cubrimiento de Vitali de A_0, dado $\varepsilon > 0$ existe una sucesión (Q_n) de cubos $Q_n \in \mathcal{V}$ tal que

$$A_0 \subset \bigcup_n Q_n \quad \text{y} \quad \sum_n \mu(Q_n) \leqq \mu^*(A_0) + \varepsilon = \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Por consiguiente,

$$m^*(A_0) \leqq m\left(\bigcup_n Q_n\right) \leqq \sum_n m(Q_n) \leqq \beta \sum_n \mu(Q_n) \leqq$$
$$\leqq \beta[\mu^*(A) + \varepsilon].$$

De donde se deduce

$$m^*(A) \leqq \beta[\mu^*(A) + \varepsilon]$$

puesto que $m^*(A - A_0) = 0$ por ser $\mu^*(A - A_0) = 0$ y m una medida μ-continua. Como $\beta > \alpha$ y $\varepsilon > 0$ son arbitrarios, resulta

$$m^*(A) \leqq \alpha \mu^*(A).$$

10. TEOREMA.—*Sea* m *una medida real finita de Borel* μ-*continua sobre* Ω. *Entonces* m *es diferenciable en casi todo* Ω. *Además*

$$m(A) = \int_A Dm \, d\mu$$

para todo conjunto A *de Borel*: $A \in \mathcal{B}$.

DEMOSTRACIÓN.—Por el teorema de descomposición de Jordan podemos suponer $m \geqslant 0$.

Para cada par r, s, $r < s$, de números racionales pongamos

$$A_{rs} = \{ x \in \Omega : \underline{D}m(x) < r < s < \overline{D}m(x) \} .$$

Cada uno de estos conjuntos es medible Borel por ser $\underline{D}\, m$ y $\overline{D}\, m$ medibles Borel.

Por los teoremas 8 y 9 resulta

$$m(A_{rs}) \leqq r\,\mu(A_{rs}) \leqq s\,\mu(A_{rs}) \leqq m(A_{rs})$$

y

$$r\,\mu(A_{rs}) = s\,\mu(A_{rs}) .$$

Luego $\mu(A_{rs}) = 0$. Por tanto, como

$$A = \{ x \in \Omega : \underline{D}m(x) < \overline{D}m(x) \} = \bigcup_{r,s} A_{rs} \quad (r, s \text{ racionales}),$$

se tiene $\mu(A) = 0$.

Igualmente, si

$$A = \{ x \in \Omega : Dm(x) = \infty \},$$

por el teorema 8 se verifica

$$\alpha\,\mu(A) \leqslant m(A) \leqslant m(\Omega) < \infty$$

para todo $\alpha > 0$. Luego $\mu(A) = 0$ y m es diferenciable en casi todo Ω.

Finalmente, dado $n \in \mathbf{N}$, sea $y_k = k/n$ para $k \geqslant 0$ y

$$A_k = \{ x \in A : y_{k-1} \leqslant Dm(x) < y_k \}$$

siendo A un conjunto de Borel de Ω. Entonces por los teoremas 8 y 9 se verifica

$$y_{k-1}\,\mu(A_k) \leqslant m(A_k) \leqslant y_k\,\mu(A_k) .$$

Luego

$$\sum_{1}^{\infty} y_{k-1}\, \mu\,(A_k) \leqslant \sum_{1}^{\infty} m\,(A_k) = m\,(A) \leqslant \sum_{1}^{\infty} v_k\, \mu\,(A_k)\,.$$

De aquí resulta, teniendo en cuenta que

$$\sum_{1}^{\infty} y_{k-1}\, \mu\,(A_k) \leqslant \sum_{1}^{\infty} \int_{A_k} \mathrm{Dm}\; d\,\mu = \int_{A} \mathrm{Dm}\; d\,\mu \leqslant \sum_{1}^{\infty} y_k\, \mu\,(A_k)$$

y

$$\sum_{1}^{\infty} y_k\, \mu\,(A_k) - \sum_{1}^{\infty} y_{k-1}\, \mu\,(A_k) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{1}^{\infty} \mu\,(A_k) = \frac{1}{n}\, \mu\,(A) \longrightarrow 0$$

para $n \longrightarrow \infty$ si $\mu\,(A) < \infty$, que

$$m\,(A) = \int_{A} \mathrm{Dm}\; d\,\mu$$

para todo conjunto A de medida finita y, por tanto, para cualquier conjunto de Borel por ser μ σ-finita.

11. TEOREMA.—*Sea* m *una medida de Borel no negativa sobre* Ω, *exteriormente regular. Entonces*

$$\mathrm{m}\,(A) \geqq \int_{A} \overline{D}m\; \mathrm{d}\,\mu$$

para todo conjunto A *de Borel de* Ω.

DEMOSTRACIÓN.—Dada una sucesión creciente (y_k) de números reales con $y_0 = 0$ y $\lim\limits_{n} y_n = \infty$, sea

$$A_k = \{\, x \in A : \quad y_{k-1} \leqslant \overline{\mathrm{D}}\mathrm{m}\,(x) < y_k \,\} \qquad (A \in \mathcal{B}).$$

Entonces, según el teorema 8, se tiene

$$m\,(A_k) \geqq y_{k-1}\, \mu\,(A_k)$$

y

$$m(A) \geqq \sum_{1}^{\infty} m(A_k) \geqq \sum_{1}^{\infty} y_{k-1}\, \mu(A_k).$$

Por tanto,

$$m(A) \geqq \sup_{(y_k)} \sum_{1}^{\infty} y_{k-1}\, \mu(A_k) = \int_A \overline{\mathrm{D}}m \, d\mu$$

para todo conjunto A de Borel de Ω.

12. Teorema.—*Sea* m *una medida de Borel no negativa sobre* Ω, *exteriormente regular. Entonces* m *es* μ*-singular si y sólo si* D m $= 0$ *en casi todo* Ω.

Demostración.—Sea m μ-singular. Entonces, si m está concentrada en Z, μ (Z) $= 0$, según el teorema 11 se tiene

$$\int_{\Omega - Z} \overline{\mathrm{D}}m \, d\mu \leqslant m(\Omega - Z) = 0$$

y, por tanto, D $m = \overline{\mathrm{D}}\, m = 0$ en casi todo Ω.

Sea D $m = 0$ en casi todo Ω y

$$A_{n_1} = \{ x \in \Omega_0 \cap C_{n_1} : \underline{\mathrm{D}}m(x) = 0 \} \quad (C_{n_1} \in \mathcal{C}_1).$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{V} = \{ Q \in \mathcal{C} : \; m(Q) < \varepsilon\, \mu(Q), \quad Q \subset C_{n_1} \} \quad (C_{n_1} \in \mathcal{C}_1)$$

es un cubrimiento de Vitali de A_{n_1} y, por el teorema 6, existe una sucesión disjunta (Q_n) de cubos $Q_n \in \mathcal{V}$ tal que

$$A_{n_1} \subset \bigcup_n Q_n \subset C_{n_1}.$$

Por tanto,

$$m(A_{n_1}) \leqslant \sum_n m(Q_n) \leqslant \varepsilon \sum_n \mu(Q_n) \leqslant \varepsilon\, \mu(C_{n_1}) \quad (< \infty)$$

para todo $\varepsilon > 0$. Luego $m(A_{n_1}) = 0$. De esto se deduce que m está concentrada en el conjunto

$$Z = \Omega - \bigcup_{n_1} A_{n_1}$$

que es de medida $\mu(Z) = 0$ por ser $\underline{D} m = 0$ en casi todo Ω. Entonces m es μ-singular.

13. TEOREMA. (TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN DE LEBESGUE).—*Si* m *es una medida de Borel real (finita) sobre* Ω, *exteriormente regular,* m *admite una única descomposición* $\mathrm{m} = \mathrm{m}_c + \mathrm{m}_s$ *en una medida* m_c μ-*continua y en una medida* m_s μ-*singular tal que*

$$\mathrm{m}_c(A) = \int_A Dm \, \mathrm{d}\mu$$

para todo conjunto A de Borel de Ω.

DEMOSTRACIÓN.—Para probar la existencia, por el teorema de descomposición de Jordan se puede suponer $m \geqslant 0$. Tomemos

$$m_c(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} \mathrm{Dm} \, d\mu$$

para todo conjunto A de Borel y

$$m_s = m - m_c .$$

Entonces, según el teorema 11, $m_s \geqslant 0$ y, por el teorema 10,

$$\int_{\mathrm{A}} \mathrm{Dm} \, d\mu = m_c(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} \mathrm{Dm}_c \, d\mu$$

para todo $\mathrm{A} \in \mathcal{B}$. Luego

$$\mathrm{Dm}_s = \mathrm{Dm} - \mathrm{Dm}_c = 0$$

en casi todo Ω y, por el teorema 12, m_s es μ-singular.

Si $m = m'_c + m'_s$ es otra descomposición en las condiciones indicadas, se tiene $D\, m'_c = D\, m$ en casi todo Ω y, por tanto,

$$m'_c(A) = \int_A Dm\, d\mu = m_c(A)$$

para todo $A \in \mathcal{B}$, e. d., $m'_c = m_c$ y $m'_s = m_s$.

14. COROLARIO.—*Si* f *es una función integrable* y

$$m(A) = \int_A f\, d\mu$$

para todo conjunto A de Borel de Ω, *se tiene* $D\,m = f$ *en casi todo* Ω.

DEMOSTRACIÓN.—Basta tener en cuenta que

$$\int_A f\, d\mu = m_c(A) = \int_A Dm\, d\mu$$

para todo conjunto A de Borel de Ω.

15. TEOREMA.—*Si* $\mu \neq 0$, *existe un lifting casi fuerte* ρ *sobre el álgebra* $\mathcal{L}^\infty_R$ *de las funciones reales medibles esencialmente acotadas.* (Véase el teorema 5 de [5].)

DEMOSTRACIÓN.—Para cada $f \in \mathcal{L}^\infty_R$ sea

$$m(A) = \int_A f\, d\mu \quad (A \in \mathcal{B}).$$

Entonces

$$f_n = \Sigma \left\{ \frac{m(Q)}{\mu(Q)}\, \chi_Q : Q \in \mathcal{C}_n \right\}$$

es una sucesión de funciones reales medibles acotadas.

Sea $\underset{n}{\text{Lim}}$ un límite generalizado sobre el conjunto de las sucesiones reales acotadas y χ_x un carácter de L_R^∞. Si ponemos

$$\rho_0(f)(x) = \underset{n}{\text{Lim}}\, f_n(x)$$

para cada $x \in \Omega_0$ y

$$\rho_0(f)(x) = \chi_x(\tilde{f})$$

para cada $x \in \Omega - \Omega_0$, resulta que $\rho_0 : \mathcal{L}_R^\infty \longrightarrow \mathcal{L}_R^\infty$ es un lifting lineal fuerte. En efecto:

1. $\rho_0(f) \equiv f$, e. d., $\rho_0(f) = f$ en casi todo Ω.
2. $f \equiv g$ implica $\rho_0(f) = \rho_0(g)$.
3. $\rho_0(1) = 1$.
4. $f \geqslant 0$ implica $\rho_0(f) \geqslant 0$.
5. $\rho_0(af + bg) = a\,\rho_0(f) + b\,\rho_0(g)$.
6. $\rho_0(f) = f$ sobre Ω_0, para toda función real continua acotada f.
7. $\rho_0(\chi_G) \geqslant \chi_G$ sobre Ω_0, para todo abierto G de Ω.
8. $\rho_0(\chi_Q) = \chi_Q$ sobre Ω_0, para todo $Q \in \mathcal{C}$.

La primera se deduce del corolario 14 y las demás son evidentes.

Sean $\Theta(A)$ y $\Theta'(A)$ las densidades, inferior y superior, asociadas a ρ_0, e. d.,

$$\theta(A) = \{x \in \Omega : \rho_0(\chi_A)(x) = 1\}$$

y

$$\theta'(A) = \{x \in \Omega : \rho_0(\chi_A)(x) > 0\}$$

para todo conjunto μ-medible A. Entonces

$$\theta(G) \supset G \cap \Omega_0$$

para todo abierto G de Ω y

$$\theta(Q) \cap \Omega_0 = Q \cap \Omega_0 = \theta'(Q) \cap \Omega_0$$

para todo $Q \in \mathcal{C}$.

Por otra parte, según el teorema 2 del cap. III de [2], existe un lifting ρ sobre $\mathcal{L}^{\infty}_{\mathbf{R}}$ que satisface

$$\chi_{\theta(A)} \leqslant \rho(\chi_A) \leqslant \chi_{\theta'(A)}$$

para todo conjunto medible A. Por consiguiente,

$$\rho(\chi_G) \supset \chi_G$$

sobre Ω_0 para todo abierto G de Ω y

$$\rho(\chi_Q) = \chi_Q$$

sobre Ω_0 para todo $Q \in \mathcal{C}$.

Entonces

$$\rho(f) = f$$

sobre Ω_0 para toda función real continua acotada f sobre Ω. En efecto, si $f \geqslant 0$, f es el supremo de todas las funciones $a\,\chi_G \leqslant f$ con $a \in \mathbf{R}^+$ y G abierto y, por tanto,

$$\rho(f) \geqq a\,\rho(\chi_G) \geqq a\,\chi_G$$

y

$$\rho(f) \geqq f$$

sobre Ω_0. Finalmente, si tomamos $c \geqslant |f|$ en el caso general, se tiene

$$c + \rho(f) = \rho(c + f) \geqq c + f$$

y

$$c - \rho(f) = \rho(c - f) \geqq c - f$$

sobre Ω_0, e. d., $\rho(f) = f$ sobre Ω_0 para toda función real continua acotada.

16. DEFINICIÓN.—Dada una medida vectorial m: $\Sigma \longrightarrow E$ con valores en un espacio localmente convexo de Hausdorff E, definida sobre una σ-álgebra Σ que contiene a la clase $\mathcal{C}$ de los cubos, sea

$$f_n = \Sigma \left\{ \frac{m(Q)}{\mu(Q)} \chi_Q : \; Q \in \mathcal{C}_n \right\} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Evidentemente, cada f_n es una función de Borel.

Se define la *derivada* D m de m por

$$\mathrm{Dm}(x) = \lim_n f_n(x)$$

sobre el conjunto de los puntos donde existe tal límite. Se dice que m es *diferenciable en casi todo* Ω si dicho límite existe en casi todo Ω.

17. TEOREMA.—*Sea* m: $\Sigma \longrightarrow$ *E una medida de Borel de variación acotada, con valores en un espacio localmente convexo de Hausdorff casi completo E. Entonces, si E es metrizable, e. d., si es un espacio de Fréchet, y* m *admite la descomposición*

$$\mathrm{m}(A) = \int_A \mathrm{f}\, d\mu + \mathrm{m_s}(A) \tag{17.1}$$

para $A \in \mathcal{B}$ $(\subset \Sigma)$, *donde* f *es una función absolutamente* $\bar{\mu}$-*integrable (véase* [6]) *y* $\mathrm{m_s}$ *es una función* μ-*singular, se tiene* $D\,\mathrm{m} = \mathrm{f}$ *en casi todo* Ω.

Recíprocamente, si m *admite una descomposición*

$$\mathrm{m} = \mathrm{m_c} + \mathrm{m_s}$$

con $\mathrm{m_c} \ll \mu$ *y* $|\mathrm{m_s}|_p \perp \mu$ *para toda seminorma* p *de E y si existe* $D\,\mathrm{m}$ *en casi todo* Ω, *resulta que* $D\,\mathrm{m}$ *es absolutamente* $\bar{\mu}$-*integrable y se verifica*

$$\mathrm{m_c}(A) = \int_A Dm\, d\mu$$

para todo conjunto A de Borel de Ω.

DEMOSTRACIÓN.—En primer lugar, observemos que cada función

$$f_n = \Sigma \left\{ \frac{m_c(Q)}{\mu(Q)} \chi_Q : \ Q \in \mathcal{C}_n \right\}$$

con

$$m_c(Q) = \int_Q f \, d\mu$$

es absolutamente μ-integrable por ser E casi completo y ser

$$\sum_{Q \in \mathcal{C}_n} \frac{\mu(A \cap Q)}{\mu(Q)} \, p \circ m_c(Q) \leqslant \sum_{Q \in \mathcal{C}_n} p \circ m_c(Q) \leqslant |m|_p(\Omega) < \infty$$

para todo conjunto A μ-medible.

Sea Σ_n la σ-álgebra generada por los conjuntos $Q \in \bigcup_1^n \mathcal{C}_k$. Entonces $(f_n, \Sigma_n)_{n \in \mathbf{N}}$ es una martingala. Sean p una seminorma de E,

$$U = \{ y \in E : \ p(y) \leqslant 1 \},$$

E_U el usual espacio normado asociado y π_U la aplicación canónica $E \longrightarrow \hat{E}_U$ (compleción de E_U). Igualmente, $(\pi_U f_n, \Sigma_n)_{n \in \mathbf{N}}$ es una martingala $L^1(\mu, \hat{E}_U)$-acotada puesto que

$$\int_\Omega p \circ f_n \, d\mu \leqslant |m|_p(\Omega) < \infty$$

para todo $n \in \mathbf{N}$. Además

$$\int_A f_n \, d\mu = m_c(A)$$

para todo $A \in \Sigma_n$ y

$$m_c(A) = \lim_n \int_A f_n \, d\mu$$

para todo $A \in \bigcup_n \Sigma_n$.

Por tanto, si m admite la descomposición (17.1), según el teorema 2.9 del cap. V de [1] y el teorema 12, se deduce

$$D\,\pi_U \circ m_c(x) = \lim_n \pi_U \circ f_n(x) = \pi_U \circ f(x)$$

y

$$\mathrm{Dm}(x) = \mathrm{Dm}_c(x) = \lim_n f_n(x) = f(x)$$

en casi todo Ω si E es metrizable.

Recíprocamente, si existe D m en casi todo Ω, por los mismos teoremas se tiene, para cada seminorma p de E,

$$\pi_U \circ \mathrm{Dm} = D\,\pi_U \circ m = D\,\pi_U \circ m_c = \lim_n \pi_U \circ f_n$$

en casi todo Ω y, por tanto,

$$\pi_U \circ m_c(A) = \int_A \pi_U \circ \mathrm{Dm}\, d\mu$$

y

$$m_c(A) = \int_A \mathrm{Dm}\, d\mu$$

para todo conjunto A de Borel de Ω.

Bibliografía

[1] DIESTEL, J. y UHL, J. J., Jr. (1977). Vector measures. *Amer. Math. Soc.* Providence, R. I.

[2] IONESCU TULCEA, A. Y C. (1969). Topics in the theory of lifting. Berlín, Springer.

[3] MUNROE, M. E. Introduction to Measure and Integration. Addison-Wesley Pub. Company.

[4] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1978). μ-Espacios de Suslin y Lusin. Propiedad del «lifting» fuerte. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid*, **72**, 541-557.

[5] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1979). Semi-μ-espacios de Suslin y Lusin. Propiedad del «lifting» fuerte. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid*, **73**, 33-40.
[6] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1979). Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid*, **73**, 361-387.
[7] SAKS, S. (1937). Theory of the Integral. Warszawa-Lwow.

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid