SOBRE CIERTOS ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS CON VALORES VECTORIALES (*)

José Bonet Solves

Recibido: 30 octubre 1980

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

In this paper we give some representations of spaces of continuous functions with values in a separated locally convex space.

En este artículo se dan ciertas representaciones de espacios de funciones continuas que toman valores en espacios localmente convexos separados.

Los espacios vectoriales que utilizamos aquí están definidos sobre el cuerpo P de los números reales o complejos. Dados los espacios localmente convexos E y F escribimos $E \simeq F$ para denotar que E y F son topológicamente isomorfos. Ponemos E^N y $E^{(N)}$ para el producto topológico y la suma directa respectivamente de una infinidad numerable de espacios iguales a E. Dado un espacio localmente convexo E denotamos por E′ a su dual topológico.

En adelante la palabra espacio denotará a un espacio vectorial topológico localmente convexo separado. Dado un espacio topológico Y y un espacio E denotaremos por $\mathcal{C}$ (Y, E) al espacio vectorial de todas las funciones continuas definidas en Y con valores en E. Y denotamos por $\mathcal{K}$ (Y, E) al espacio vectorial de todas las funciones continuas con soporte compacto definidas en Y con valores en E. Si E = P denotaremos a dichos espacios por $\mathcal{C}$ (Y) y $\mathcal{K}$ (Y)

(*) El presente trabajo ha sido realizado bajo la dirección del profesor doctor M. Valdivia en el Departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia.

respectivamente. Si Q está incluido en Y denotamos $\overset{\circ}{Q}$ al interior de Q.

Sean E y F dos espacios, denotamos $E \otimes_\varepsilon F$ y $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ al producto tensorial de E y F dotado con la topología ε y a su completado respectivamente.

El profesor Dr. M. Valdivia, en sus artículos [7] y [8], prueba que si X es un espacio topológico localmente compacto tal que existe una sucesión fundamental de compactos metrizables $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ con las propiedades: a) $K_1 = \emptyset$. b) $K_{n+1} \sim K_n$ es no numerable para cada $n \in \mathbb{N}$. c) $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$. d) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Entonces $\mathcal{C}(X)$, con la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos, es topológicamente isomorfo a $\mathcal{C}([0, 1])^{\mathrm{N}}$, y $\mathcal{K}(X)$, con la topología que lo hace (L F)-espacio, es topológicamente isomorfo a $\mathcal{C}([0, 1])^{(\mathrm{N})}$. El propósito de este artículo es extender dichos resultados.

Necesitaremos el siguiente resultado: a) (Milutin [5]). Sea S un espacio compacto métrico. Si S tiene cardinal no numerable entonces $\mathcal{C}(S) \simeq \mathcal{C}([0, 1])$.

Dado un espacio E y un espacio topológico compacto K, dotamos a $\mathcal{C}(K, E)$ de la topología localmente convexa definida por la siguiente familia de seminormas: Dada q una seminorma continua en E, denotamos $Q(f) = \sup \{q(f(x)) \,/\, x \in K\}$, para cada $f \in \mathcal{C}(K, E)$. Es conocido que $\mathcal{C}(K, E) \simeq \mathcal{C}(K) \widehat{\otimes}_\varepsilon E$, si E es completo. (Ver Köthe [4], pág. 287.)

En virtud del resultado a) y del comentario anterior, si S es un espacio métrico compacto de cardinal no numerable y E es un espacio completo entonces $\mathcal{C}(S, E) \simeq \mathcal{C}([0, 1], E)$. Extendemos dicho resultado a una clase más amplia de espacios.

Definición 1.—Un espacio E es de Krein si la envoltura absolutamente convexa y cerrada de todo subconjunto compacto de E es un compacto.

Lema 1.—Sea S un espacio topológico compacto. Sea E un espacio de Krein. Sea $T \in \mathcal{C}(S)'$. Existe $T : \mathcal{C}(S, E) \longrightarrow E$ una aplicación lineal y continua, tal que si $u \in E'$ entonces $u \circ T(\emptyset) = T(u \circ \emptyset)$ para cada $\emptyset \in \mathcal{C}(S, E)$.

DEMOSTRACIÓN.—Ver [6], pág. 116.

TEOREMA 1.—Sea S un espacio topológico compacto métrico de cardinal no numerable, sea E un espacio de Krein, sea $I = [0, 1]$. Entonces $\mathcal{C}(S, E) \simeq \mathcal{C}(I, E)$.

DEMOSTRACIÓN.—En virtud del resultado a) sabemos que existe F un isomorfismo de $\mathcal{C}(S)$ en $\mathcal{C}(I)$. Existirá un $M_1 > 0$ tal que

$$\sup\{|F(\varphi)(x)| : x \in I\} \leqslant M_1 \sup\{|\varphi(z)| : z \in S\},$$

para cada $\varphi \in \mathcal{C}(S)$, y existirá $M_2 > 0$ tal que

$$\sup\{|F^{-1}(\eta)(z)| : z \in S\} \leqslant M_2 \sup\{|\eta(x)| : x \in I\},$$

para cada $\eta \in \mathcal{C}(I)$.

Sea ahora $\varnothing \in \mathcal{C}(S, E)$. Vamos a definir $\tilde{F}(\varnothing) \in \mathcal{C}(I, E)$. Consideremos $a \in I$. Denotamos $\partial_a : \mathcal{C}(I) \longrightarrow P$, la aplicación tal que $\partial_a(\varphi) = \varphi(a)$. La aplicación $\partial_a \circ F : \mathcal{C}(S) \longrightarrow P$ es lineal y continua. De hecho existe M_1, que no dependía de a, tal que

$$|\partial_a \circ F(\varphi)| \leqslant M_1 \sup\{|\varphi(x)| : x \in S\},$$

para cada $\varphi \in \mathcal{C}(S)$.

Por el lema 1 existe

$$\partial_a \,\tilde{\circ}\, F : \mathcal{C}(S, E) \longrightarrow E$$

lineal y continuo tal que si $u \in E$ entonces

$$u(\partial_a \,\tilde{\circ}\, F(\psi)) = (\partial_a \circ F)(u \circ \psi) = (F(u \circ \psi))(a),$$

para cada $\psi \in \mathcal{C}(S, E)$. En particular se cumple para $\varnothing$, y definimos

$$\tilde{F}(\varnothing)(a) = \partial_a \,\tilde{\circ}\, F(\varnothing).$$

Si $u \in E'$ se tiene que

$$u(\tilde{F}(\varnothing)(a)) = (F(u \circ \varnothing))(a).$$

Probemos que $\tilde{F}(\varnothing) \in \mathcal{C}(I, E)$. Sea, para ello, $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset I$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0 \in \mathrm{I}$. Sea q una seminorma continua en E. Se cumple que

$$q(\tilde{\mathrm{F}}(\varnothing)(a_n) - \tilde{\mathrm{F}}(\varnothing)(a_0)) = q(\delta_{a_n} \tilde{\circ}\, \mathrm{F}(\varnothing) - \delta_{a_0} \tilde{\circ}\, \mathrm{F}(\varnothing))$$

converge a cero cuando n tiende a infinito. En efecto: Denotamos

$$\mathrm{U} = \{x \in \mathrm{E} \,/\, q(x) \leqslant 1\} \quad \text{y} \quad \mathrm{A}_\varnothing = \{u \circ \varnothing \,/\, u \in \mathrm{U}^0 \subset \mathrm{E}'\}.$$

$\mathrm{A}_\varnothing$ es acotado en $\mathcal{C}(\mathrm{S})$ trivialmente. Consideremos ahora $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en S tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in \mathrm{S}$. $\varnothing$ es continua y U^0 es un equicontinuo en E′, entonces dado $r > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ se cumple que

$$|(u \circ \varnothing)(x_n) - (u \circ \varnothing)(x_0)| \leqslant r$$

para cada $u \in \mathrm{U}^0$, y $\mathrm{A}_\varnothing$ es equicontinuo en $\mathcal{C}(\mathrm{S})$. Luego, por el teorema de Ascoli (Dieudonné [3], pág. 141) $\mathrm{A}_\varnothing$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}(\mathrm{S})$. Como F es continua $\mathrm{F}(\mathrm{A}_\varnothing)$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}(\mathrm{I})$, y entonces el conjunto $\{\mathrm{F}(u \circ \varnothing) \,/\, u \in \mathrm{U}^0\}$ es equicontinuo en $\mathcal{C}(\mathrm{I})$. De donde se sigue que

$$\sup_{u \in \mathrm{U}^0} |\mathrm{F}(u \circ \varnothing)(a_n) - \mathrm{F}(u \circ \varnothing)(a_0)| \quad (1 -)$$

tiende a 0 cuando n tiende a infinito. Pero

$$(1 -) = q(\tilde{\mathrm{F}}(\varnothing)(a_n) - \tilde{\mathrm{F}}(\varnothing)(a_0))$$

y se sigue lo pedido.

La aplicación $\tilde{\mathrm{F}}$ es trivialmente lineal e inyectiva entre $\mathcal{C}(\mathrm{S}, \mathrm{E})$ y $\mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathrm{E})$. La continuidad se sigue del hecho de que para cada seminorma continua q en E se cumple que

$$\sup\{q(\tilde{\mathrm{F}}(\varnothing)(a)) \,/\, a \in \mathrm{I}\} \leqslant \mathrm{M}_1 \sup\{q(\varnothing(x)) \,/\, x \in \mathrm{S}\}.$$

Con una prueba totalmente análoga a la realizada podemos definir $\tilde{\mathrm{G}} : \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathrm{E}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{S}, \mathrm{E})$ lineal, inyectiva y continua del siguiente modo: Si $\psi \in \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ y $x \in \mathrm{S}$,

$$(\tilde{\mathrm{G}}(\psi))(x) = \delta_x \tilde{\circ}\, \mathrm{F}^{-1}(\psi).$$

La conclusión del teorema se obtiene del hecho de que $\tilde{F}(\tilde{G}(\emptyset)) = \emptyset$ para cada $\emptyset \in \mathcal{C}(I, E)$ y $\tilde{G}(\tilde{F}(\psi)) = \psi$ para cada ψ en $\mathcal{C}(S, E)$.

Proposición 1.—Sea $I = [0, 1]$ y $J = [0, 1]$. Para todo espacio E se cumple que

$$\mathcal{C}(I \times J, E) \simeq \mathcal{C}(I, \mathcal{C}(J, E)).$$

Demostración.—Si $f \in \mathcal{C}(I \times J, E)$, se define $\psi(f)$:

$$I \longrightarrow \mathcal{C}(J, E)$$

del siguiente modo:

$$(\psi(f)(x))(y) = f(x, y),$$

para cada $x \in I$, $y \in J$. $\psi(f) \in \mathcal{C}(I, \mathcal{C}(J, E))$ y ψ es lineal, inyectiva y continua. Análogamente, dada $g \in \mathcal{C}(I, \mathcal{C}(J, E))$ se define

$$\emptyset(g)(x, y) = (g(x))(y).$$

Se prueba que $\emptyset(g) \in \mathcal{C}(I \times J, E)$ y que $\emptyset$ es lineal, continua e inyectiva. La conclusión se obtiene del siguiente hecho: $(\psi \circ \emptyset)(g) = g$ para cada $g \in \mathcal{C}(I, \mathcal{C}(J, E))$ y $(\emptyset \circ \psi)(f) = f$ para cada $f \in \mathcal{C}(I \times J, E)$.

Proposición 2.—Sean E y F espacios. Sea $I = [0, 1]$ y $J = [\alpha, \beta]$ un intervalo compacto en R, tal que $I \cap J = \emptyset$. Se cumplen las siguientes propiedades:

a) $\mathcal{C}(I \cup J, E) \simeq \mathcal{C}(I, E) \times \mathcal{C}(J, E)$.
b) $\mathcal{C}(I, E \times F) \simeq \mathcal{C}(I, E) \times \mathcal{C}(I, F)$.

Corolario 2.1.—Sea E un espacio de Krein. Sea $I = [0, 1]$. Se cumplen las siguientes propiedades:

a) $\mathcal{C}(I, E) \simeq \mathcal{C}(I, \mathcal{C}(I, E))$..
b) $\mathcal{C}(I, E) \simeq \mathcal{C}(I, E) \times \mathcal{C}(I, E)$.
c) $\mathcal{C}(I, E \times F) \simeq \mathcal{C}(I, E) \times \mathcal{C}(I, F)$.
d) $\mathcal{C}(I, E) \simeq \mathcal{C}(I, E) \times E$.

Demostración.—a) Por la proposición 1 y el teorema 1. b) Por la proposición 2. c) Por la proposición 2. d) Por la proposición 2 a), ya que $\mathcal{C}([\alpha, \alpha], E) \simeq E$.

TEOREMA 2.—Sea E un espacio de Krein. Sea F un espacio topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{C}$ (I, E), tal que existe G un subespacio complementado de F que es topológicamente isomorfo a $\mathcal{C}$ (I, E). Entonces F es topológicamente isomorfo a $\mathcal{C}$ (I, E).

DEMOSTRACIÓN.—Sabemos que

$$\mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathrm{E}) \simeq \mathrm{F} \times \mathrm{M}_1 \quad \text{y} \quad \mathrm{F} \simeq \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathrm{E}) \times \mathrm{M}_2.$$

Entonces:

$$\mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathrm{E}) \simeq \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathrm{E})) \simeq \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathrm{F} \times \mathrm{M}_1) \simeq \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathrm{F}) \times \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathrm{M}_1) \simeq$$
$$\simeq \mathrm{F} \times \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathrm{F}) \times \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathrm{M}_1) \simeq \mathrm{F} \times \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathrm{E}).$$

Por otra parte

$$\mathrm{F} \simeq \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathrm{E}) \times \mathrm{M}_2 \simeq \mathrm{C}(\mathrm{I}, \mathrm{E}) \times \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathrm{E}) \times \mathrm{M}_2 \simeq \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathrm{E}) \times \mathrm{F}.$$

El profesor Dr. M. Valdivia en [8] da un afinamiento de un resultado de Borsuk [2], modificando un método debido a Arens [1]. No es difícil adaptar la prueba del profesor Valdivia para obtener el teorema de extensión de funciones continuas con valores en un espacio E siguiente:

TEOREMA 3.—Sean A y B subconjuntos de un espacio métrico M, tales que: (1) A es cerrado. (2) El interior de A contiene a B. (3) $\mathrm{A} \sim \overset{\circ}{\mathrm{B}} \neq \emptyset$. Sea E un espacio. Entonces existe T un operador lineal de $\mathcal{C}$ (A, E) en $\mathcal{C}$ (M, E) tal que a) $(\mathrm{T} f)(x) = f(x)$ para cada x en A. b) Si $f \in \mathcal{C}$ (A, E), y para cada seminorma continua q en E $\{q(f(x)) / x \in \mathrm{A}\}$ es acotado, entonces se tiene que

$$\sup\{q(\mathrm{T} f(x)) / x \in \mathrm{M}\} = \sup\{q(f(x)) / x \in \mathrm{A}\}.$$

c) Si $f(x) = 0$ para cada $x \in \mathrm{A} \sim \mathrm{B}$, entonces $(\mathrm{T} f)(x) = 0$ para cada $x \in \mathrm{M} \sim \mathrm{B}$.

De ahora en adelante E será un espacio de Krein, y X denotará un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto, con una sucesión de compactos metrizables $(\mathrm{K}_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que: (1) $\mathrm{K}_1 = \emptyset$. (2) $\mathrm{K}_{n+1} \sim \mathrm{K}_n$ es no numerable. (3) $\mathrm{K}_n \subset \overset{\circ}{\mathrm{K}}_{n+1}$. (4) $\mathrm{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{K}_n$.

Dotamos al espacio $\mathcal{C}$ (X, E) de la topología localmente convexa definida por la siguiente familia de seminormas:

Dada q una seminorma continua en E, dado $n \in \mathbb{N}$ y $f \in \mathcal{C}$ (X, E),

$$Q(n, q)(f) = \sup \{ q(f(x)) / x \in K_n \}.$$

Vamos a denotar por $\mathcal{C}_{K_n}$ (X, E) al subespacio de $\mathcal{C}$ (X, E) formado por todas aquellas funciones cuyo soporte está incluido en K_n, dotado con la topología inducida. Obviamente

$$\mathcal{K}(X, E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_{K_n}(X, E),$$

y dotamos a dicho espacio de la topología de límite inductivo estricto respecto de esta familia.

PROPOSICIÓN 3. — Sea $F_n(E) = \{f \in \mathcal{C}(K_{2n+1}, E) / f(x) = 0$ para cada $x \in K_{2n-1}\}$ dotado con la topología inducida por $\mathcal{C}(K_{2n+1}, E)$. Entonces $F_n(E) \simeq \mathcal{C}([0, 1], E)$.

DEMOSTRACIÓN.—Dado $x \in K_{2n+1} \sim K_{2n-1}$, sea B_x una bola en la métrica de K_{2n+1} tal que $\overline{B}_x \cap K_{2n-1} = \emptyset$. K_{2n+1} es métrico y compacto, por tanto separable, luego $K_{2n+1} \sim K_{2n-1}$ también lo es, de donde será Lindelof. Podemos determinar pues $\{B_{x_p} : p = 1, 2, \ldots\}$ un recubrimiento abierto de $K_{2n+1} \sim K_{2n-1}$. Por la condición (2) de la sucesión de compactos existirá B_{x_p} de cardinal no numerable. K_{2n+1} es compacto, y por tanto normal, existirá $\psi \in \mathcal{C}(K_{2n+1})$ tal que $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ y $\psi(x) = 1$ para cada $x \in \overline{B}_{x_p}$ y $\psi(x) = 0$ para cada $x \in K_{2n-1}$. Por el teorema 3 existe un operador de extensión

$$T : \mathcal{C}(\overline{B}_{x_p}, E) \longrightarrow \mathcal{C}(K_{2n+1}, E)$$

lineal, y por la condición (b) de dicho teorema continuo. Definimos

$$S : \mathcal{C}(\overline{B}_{x_p}, E) \longrightarrow F_n(E),$$

del siguiente modo:

$$S f(x) = \psi(x) T f(x),$$

para todo $x \in K_{2n+1}$. S es un operador lineal y continuo tal que

$S f(x) = f(x)$ para cada $f \in \mathcal{C}(\overline{B}_{x_p}, E)$ y cada $x \in \overline{B}_{x_p}$. Denotemos $G_n = S(\mathcal{C}(\overline{B}_{x_p}, E))$. Obviamente $G_n \simeq \mathcal{C}(\overline{B}_{x_p}, E)$. Además G_n es un subespacio complementado en $F_n(E)$. De hecho su complemento topológico es $H_n = \{f \in F_n(E) \,/\, f(x) = 0$ para cada $x \in \overline{B}_{x_p}\}$. Aplicando el teorema 1 obtenemos que $F_n(E)$ tiene un subespacio complementado topológicamente isomorfo a $\mathcal{C}([0, 1], E)$.

Mediante un razonamiento análogo al precedente se prueba que $\mathcal{C}(K_{2n-1}, E)$ es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{C}(K_{2n+1}, E)$, y el complemento es precisamente $F_n(E)$. Aplicando nuevamente el teorema 1 $F_n(E)$ es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{C}([0, 1], E)$.

El teorema 2 asegura que $F_n(E) \simeq \mathcal{C}([0, 1], E)$, c. q. d.

Dado $n \in \mathbb{N}$ sea $\varphi_n \in \mathcal{C}(X)$ tal que

$$0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1 \quad \text{y} \quad \varphi_n(x) = 1$$

para todo $x \in K_{2n+1}$ y $\varphi_n(x) = 0$ para todo $x \notin K_{2n+2}$. Por el teorema 3 existe

$$S_n : \mathcal{C}(K_{2n+1}, E) \longrightarrow \mathcal{C}(K_{2n+3}, E)$$

lineal y continuo, con las propiedades enunciadas para $M = K_{2n+3}$, $A = K_{2n+1}$, $B = K_{2n}$. Definimos

$$T_n : \mathcal{C}(K_{2n+1}, F) \longrightarrow \mathcal{K}(X, E)$$

lineal y continuo tal que

$$T_n f(x) = \varphi_n(x)\, S_n f(x)$$

si $x \in K_{2n+3}$ y $T_n f(x) = 0$ si $x \in X \sim K_{2n+3}$.

TEOREMA 4.—$\mathcal{C}(X, E) \simeq \mathcal{C}([0, 1], E)^{N}$, si E es un espacio de Krein.

DEMOSTRACIÓN.—Dada $f \in \mathcal{C}(X, E)$, definimos $f_1 = f|_{K_3}$, y en general

$$f_{n+1} = f - T_1 f_1 - \dots - T_n f_n |_{K_{2n+3}}.$$

Obviamente $f_{n+1} \in F_{n+1}(E)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$U : \mathcal{C}(X, E) \longrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} F_n(E),$$

tal que $U(f) = (f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$. U es lineal inyectiva y continua. Veamos que es suprayectiva: Sea

$$(g_1, g_2, \dots, g_n, \dots) \in \prod_{n=1}^{\infty} F_n(E).$$

Consideremos

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n g_n(x).$$

Está bien definida porque $g_n(x) = 0$ si $x \in K_{2p-1}$ para cada $n \geqslant p$. Como X es localmente compacto g es continua, y obviamente

$$U(g) = (g_1, g_2, \dots, g_n, \dots).$$

Finalmente la aplicación

$$U^{-1} : \prod_{n=1}^{\infty} F_n(E) \longrightarrow \mathcal{C}(X, E)$$

es continua. En efecto: Sea q una seminorma continua en E, y $K_{2p-1} \subset X$ un compacto. Dado

$$(g_1, g_2, \dots, g_n, \dots) \in \prod_{n=1}^{\infty} F_n(E),$$

se tiene que

$$\sup \left\{ q\left(\sum_{n=1}^{\infty} T_n g_n(x) \right) / x \in K_{2p-1} \right\} \leqslant \sum_{n=1}^{p-1} \sup \{ q(T_n g_n(x)) / x \in K_{2p-1} \} \ (1).$$

Como cada T_n es lineal y continua existe $M > 0$ tal que

$$(1) \leqslant M \sum_{n=1}^{p-1} \sup \{ q(g_n(x)) / x \in K_{2n+1} \}.$$

Y esta expresión es una seminorma continua en $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(E)$.

La conclusión se sigue de la proposición 3, ya que

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_n(E) \simeq \mathcal{C}([0,1], E)^{\mathbb{N}}.$$

TEOREMA 5.—$\mathcal{K}(X, E) \simeq \mathcal{C}([0, 1], E)^{(\mathbb{N})}$, si E es un espacio de Krein.

DEMOSTRACIÓN.—Denotemos por U_1 la restricción del operador U de la prueba del teorema 4 a $\mathcal{K}(X, E)$. Si $f \in \mathcal{K}(X, E)$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que sop $f \subset K_{2p+2}$, de donde $f_n = 0$ si $n \geqslant p + 2$, por las propiedades de los operadores T_n. Y $U_1(f) \subset \bigoplus_{n=1}^{p+1} F_n(E)$.

Luego $U_1 : \mathcal{K}(X, E) \longrightarrow \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n(E)$ es un operador lineal, inyectivo y continuo. Además si

$$(g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots) \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n(E)$$

entonces

$$U_1^{-1}(g_1, \ldots, g_n, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n g_n \in \mathcal{K}(X, E).$$

Y U_1^{-1} es continuo pues

$$U_1^{-1}(F_p(E)) \subset \mathcal{C}_{K_{2p+2}}(X, E)$$

obviamente.

COROLARIO 5.1.—Dado $n \in \mathbb{N}$, si V es una variedad topológica n-dimensional, no compacta y numerable en el infinito, entonces

$$\mathcal{C}(V, E) \simeq \mathcal{C}([0, 1], E)^{\mathbb{N}} \quad \text{y} \quad \mathcal{K}(V, E) \simeq \mathcal{C}([0, 1], E)^{(\mathbb{N})},$$

si E es un espacio de Krein.

COROLARIO 5.2.—Dado $n \in \mathbb{N}$ si $\Omega \in \mathbb{R}^n$ es un abierto, entonces

$$\mathcal{C}(\Omega, E) \simeq \mathcal{C}([0, 1], E)^{\mathbb{N}} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}(\Omega, E) \simeq \mathcal{C}([0, 1], E)^{(\mathbb{N})},$$

si E es un espacio de Krein.

Bibliografía

[1] ARENS, R. (1952). Extensions of functions of fully normal spaces. *Pacific J. Math.*, **2**, 11-22.

[2] BORSUK, K. (1933). Uber isomorphie der Funktionalraüme. *Bull. Int. Acad. Pol. Sci.*, 1-10.

[3] DIEUDONNÉ, J. (1966). Fundamentos de Análisis Moderno. Editorial Reverté.

[4] KOTHE, G. (1979). Topological vector spaces, II. Springer.

[5] MILUTIN, A. A. (1966). Isomorfismos de espacios de funciones continuas sobre compactos de la potencia del continuo. *Tieoria Func.* (Khralov), **2**, 150-156 (en ruso).

[6] SCHWARTZ, L. (1954-55). Espaces de fonctions differentiables à valeurs vectorielles. *J. d'Analyse Math.* Jerusalem, v. IV, 88-148.

[7] VALDIVIA, M. (1979). Sobre ciertos espacios de funciones continuas. *Rev. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid*, **73**, 485-490.

[8] VALDIVIA, M. (1980). Espacios de medidas de Radon. *Rev. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid*, **74**, 91-98.