ESPACIOS DE FUNCIONES HOLOMORFAS CUYAS DERIVADAS SE EXTIENDEN A UN PUNTO DE LA FRONTERA (1)

M. C. Herrero Blanco

Recibido: 15 octubre 1980

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

En este artículo estudiamos los espacios de funciones holomorfas en un dominio especial D del plano complejo, para las cuales todas las derivadas tienen límite en el origen $O \in D'$, y su relación con los espacios de funciones holomorfas con desarrollo asintótico.

In this paper we study the holomorphic functions in a special D domain of the complex plane, in which all derivatives have their limit in the $O \in D'$ origin, and their relationship with the spaces of holomorphic functions with asymptotic expansion.

1. Separación de los espacios *E* y *A*

Sea D un dominio del plano complejo que tiene al origen O como punto frontera, estrellado en O, es decir, que para todo $z \in D$, el segmento que une el origen con z, que designaremos $[O, z] \subset \subset D \cup \{O\}$, y tal que para todo compacto $K \subset D \cup \{O\}$, exista un compacto K_1 estrellado en O, $K_1 \subset D \cup \{O\}$, $\mathring{K}_1$ conexo y $K \subset \overline{\mathring{K}}_1$.

Sea H el conjunto de las funciones holomorfas $f\colon D \longrightarrow C$.

(1) Este trabajo forma parte de la memoria «Espacios de funciones holomorfas cuyas derivadas se extienden por continuidad en un punto de la frontera del dominio y su relación con los espacios de funciones holomorfas con desarrollo asintótico» presentada en la Universidad de Valencia para optar al Grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas, dirigida por D. Manuel Valdivia Ureña.

Consideramos los siguientes subconjuntos de H: $A = \{f : D \longrightarrow \longrightarrow C \mid f$ holomorfa en D y f tiene desarrollo asintótico en O, a través de D, $f(z) \simeq \sum_{0}^{\infty} a_n z^n\}$.

$E = \{f : D \longrightarrow C \mid f$ holomorfa en D y existen $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in D}} f^{(k)}(z) = b_k$ para todo $k = 0, 1, 2, \ldots\}$.

Trivialmente E y A son subespacios vectoriales de H, propios y tales que si P es el conjunto de todos los polinomios $P \subset E \cap A$.

TEOREMA 1.— *E es un subconjunto propio de A.*

DEMOSTRACIÓN.—a) $E \subset A$.
Sea $f \in E$. Existen $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in D}} f^{(k)}(z) = b_k \quad \forall\, k \in N$.
Sea $z \in D$, $[0, z] \subset D \cup \{0\}$. Si $t \in [0, z]$, $t = \lambda z$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.
Sea Φ: $[0, 1] \longrightarrow C \mid \Phi(\lambda) = f(\lambda z)$. Entonces, se verifica:

$$\lim_{\lambda \to 0} \Phi(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} f(\lambda z) = b_0$$

$$\Phi^{(k)}(\lambda) = f^{(k)}(\lambda z) z^k; \ \lim_{\lambda \to 0} \Phi^{(k)}(\lambda) = b_k z^k, \quad \forall\, k \in N.$$

Si V es un entorno de 0, existe

$$M_k > 0 \mid \sup_{z \in V} | f^{(k+1)}(z) | < M_k$$

$$| f(z) - b_0 - b_1 z - \ldots - \frac{b_k}{k!} z^k | < \frac{\sup | f^{(k+1)}(\lambda z) | \, | z |^{k+1}}{(k+1)!} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_k | z |^{k+1}}{(k+1)!} \Longrightarrow \lim_{z \to 0} | f(z) - b_0 - \ldots - \frac{b_k}{k!} z^k | = 0,$$

lo cual significa que la función $f \in A$ y que

$$f(z) \simeq \sum_{0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.$$

b) $E \neq A$. Para fijar ideas consideraremos

$$D = \left\{ z \mid | z | < 1, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Necesitamos el siguiente lema:

LEMA 1.—*Se puede encontrar una sucesión de puntos,* $\{a_n\}$, *convergente a* 0, *fuera del dominio* D, *de modo que, si llamamos* $\lambda_n = d(a_n, D)$, *se tenga que la sucesión*

$$\left\{\frac{|a_{n+1} - a_n|^2 \, |a_n|^n}{2^n \lambda_n}\right\}$$

sea divergente a $+\infty$ *y tal que* $\{|a_{n+1} - a_n|\}$ *sea decreciente.*

DEMOSTRACIÓN DE LA SEGUNDA PARTE DEL TEOREMA 1.—Elegimos una sucesión $\{a_n\} \longrightarrow 0$ de puntos fuera del dominio D, en las condiciones del lema 1. A partir de esta sucesión, tomamos la serie

$$\sum_0^\infty \frac{1}{2^n} \frac{|a_n|^n \lambda_n}{z - a_n}.$$

Esta serie proporciona una función $g \in A$.

$$\sup_{z \in D} \left| \frac{1}{z - a_n} \right| = \frac{1}{\lambda_n} \; ; \; \sup_{z \in D} \left| \left(\frac{1}{z - a_n} \right)_{(p)} \right| = \frac{1}{|a_n|^p \lambda_n} \; ; \; g_{(p)}(z)$$

converge cuando $z \longrightarrow 0$, para todo $p \in N$.

Tanto la serie, como la serie de las transformadas de orden p, son uniformemente convergentes en los compactos de $D \cup \{0\}$:

$$\sum_0^\infty \frac{1}{2^n} \frac{|a_n|^n \lambda_n}{z - a_n} \leqslant \sum_0^\infty \frac{1}{2^n} |a_n|^n < \sum_0^\infty \frac{1}{2^n} \quad \text{para todo} \quad z \in D \cup \{0\}.$$

$$|g_{(p)}(z)| = \sum_0^\infty \frac{1}{2^n} \frac{|a_n|^n \lambda_n}{|a_n|^p \, |z - a_n|} \leqslant \sum_{n \leq p} \frac{1}{2^n} \frac{|a_n|^n}{|a_n|^p} + $$

$$+ \sum_{n > p} \frac{1}{2^n} \Longrightarrow g \in A.$$

Sin embargo, $g \notin E$. Veremos que g' no está acotada en ningún entorno del origen. Sea z_n el simétrico de a_n respecto de la curva borde de D.

$$| z_n - a_n | = 2 \lambda_n \,; \; | z_j - a_n | > | a_j - a_n | \,; \; | g' (z_j) | = \left| \sum_0^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{| a_n |^n \lambda_n}{(z_j - a_n)^2} \right| \geqslant$$

$$\geqslant \left| \frac{1}{2^j} \frac{| a_j |^j \lambda_j}{(z_j - a_j)^2} \right| - \left| \sum_{n \neq j} \frac{1}{2^n} \frac{| a_n |^n \lambda_n}{(z_j - a_n)^2} \right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{2^j} \frac{| a_j |^j}{2^2 \lambda_j} - \sum_{n \neq j} \frac{1}{2^n} \frac{| a_n |^n \lambda_n}{| a_{j+1} - a_j |^2} \geq \frac{1}{z^j} \frac{| a_j |^j}{z^2 \lambda_j} - \frac{1}{| a_{j+1} - a_j |^2} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \frac{| a_j |^j}{z^j z^2 \lambda_j} ,$$

para j mayor que un cierto p. Pero la sucesión $\left\{ \dfrac{| a_j |^j}{2^j \lambda_j} \right\}$ es divergente a $+ \infty$, por lo que tomando j suficientemente grande, $| g' (z_j) |$ es mayor que cualquier constante prefijada, y como los $\{ z_n \}$ penetran en cada entorno de 0, $\nexists \lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in D}} g' (z)$.

2. Topología sobre *E* y *A*

En el espacio A tenemos la topología T de la convergencia uniforme de las funciones y todas sus transformadas sobre los compactos $K \subset D \cup \{0\} \mid 0 \in K$. T está dada por la familia de seminormas

$$q_{K, n} (f) = \sup_{\substack{z \in K \\ r = n}} | f_{(r)} (z) | .$$

Sobre E tenemos la topología T' de la convergencia uniforme de las funciones y sus derivadas sobre los compactos

$$K \subset D \cup \{ 0 \} \mid 0 \in K.$$

T' está dada por la familia de seminormas

$$p_{K, n} (f) = \sup_{\substack{z \in K \\ r \leq n}} | f^{(r)} (z) | .$$

A $[T]$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo, completo, separable, no metrizable y de Schwartz (Mira, 1). De modo análogo se prueba que E $[T']$ posee las mismas propiedades.

Sobre E, podemos considerar la topología inducida por T, y se tiene:

PROPOSICIÓN 1.—*Sobre E, la topología T', es estrictamente más fina que la inducida por T.*

DEMOSTRACIÓN.—a) $T \subset T'$. Sea

$$W = \{ f \in E \mid \sup_{\substack{z \in K \\ p \leq n}} | f_{(p)} (z) | < \epsilon \}$$

un T-entorno de 0 en E. Sea $K' \supset K$, K' estrellado en 0, y sea

$$V = \{ f \in E \mid \sup_{\substack{z \in K' \\ p \leq n}} | f^{(p)} (z) | < \epsilon \} \cdot V \subset W,$$

por lo que $T \subset T'$.

b) $T \neq T'$. Si $T = T'$, como $E [T']$ es completo, $E [T]$ sería completo, y como $A [T]$ es completo, E sería cerrado en $A [T]$. Pero los polinomios forman un subconjunto $P \subset E$, y P es denso en $A [T]$, por lo que P sería denso en E, cerrado, de donde se deduce que $E = A$, lo cual es falso.

3. Los espacios $E_\alpha [T'_\alpha]$ y $A_\alpha [T_\alpha]$

Dada una sucesión fundamental de compactos de D, fija, $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \ldots$, llamamos $\{A_{\alpha n}\}_{n=0}^{\infty}$ a una sucesión de compactos de $D \cup \{0\}$, tales que, $\forall n \in N$, se verifican las condiciones:

$$0 \in A_{\alpha n} ; \ \Delta_n \subset A_{\alpha n} ; \ A_{\alpha n} - \{ 0 \} \subset \mathring{A}_{\alpha, n+1} .$$

$A_\alpha = \{f \in H (D) \mid f$ posee desarrollo asintótico en el origen, a través de los compactos $\{A_{\alpha n}\}\}$ (Mira, 1, def. 3)

Sobre A_α se tiene la topología T_α dada por la familia de seminormas

$$q_{m, n} (f) = \sup_{\substack{z \in A_{\alpha m} \\ r \leq n}} |f_{(r)} (z) |, \quad n, m \in N.$$

$A_\alpha [T_\alpha]$ es un espacio Fréchet-Montel, Schwartz, y

$$A [T] = \lim_{\longleftarrow} A_\alpha [T_\alpha]$$

(Mira, 1).

DEFINICIÓN 1.—*Dada una sucesión fundamental de compactos de* D, *fija*, $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \ldots$, *llamamos* $\{B_{\alpha n}\}_{n=0}^{\infty}$ *a una sucesión de compactos de* $D \cup \{0\}$, *estrellados en el origen, tales que, para todo* n *natural, se verifican las siguientes condiciones:*

$$0 \in B_{\alpha n}, \ \Delta_n \subset B_{\alpha n}, \quad B_{\alpha n} - \{0\} \subset \overset{\circ}{B}_{\alpha, n+1}$$

DEFINICIÓN 2.—*Dada la sucesión de compactos* $\{B_{\alpha n}\}_{n=0}^{\infty}$, *llamaremos* E_α *al conjunto de las funciones holomorfas* $f : D \longrightarrow C$, *tales que* f *y todas sus derivadas poseen límite en el origen a través de los compactos* $B_{\alpha n}$.

Sobre E_α definimos la topología T'_α dada por la familia de seminormas

$$p_{m,n}(f) = \sup_{\substack{z \in B_{\alpha m} \\ r \leq n}} |f^{(r)}(z)|, \quad n, m \in \mathrm{N}.$$

$E_\alpha [T'_\alpha]$ es un espacio Fréchet, Schwartz y separable. Teniendo en cuenta que E es la intersección de todos los E_α, $E = \bigcap_{\alpha \in \Gamma'} E_\alpha$, se estructura $E [T']$ como límite proyectivo de los $E_\alpha [T'_\alpha]$.

NOTA.—Está claro que el conjunto de índices $\Gamma' \subset \Gamma$ y que cada $\{B_{\alpha n}\}$ es, a su vez, un $\{A_{\alpha n}\}$. El recíproco no es cierto. Tratamos a continuación de comparar los espacios A_α y E_α para $\alpha \in \Gamma'$.

PROPOSICIÓN 2.—$E_\alpha \subset A_\alpha$ *para* $\alpha \in \Gamma'$, *y, en general,* $E_\alpha \neq A_\alpha$.

DEMOSTRACIÓN.—a) $E_\alpha \subset A_\alpha$. Sea

$$f \in E_\alpha ; \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in B_{\alpha n}}} f^{(k)}(z) = b_k \quad \forall \, k, n \in \mathrm{N}.$$

Si $z \in B_{\alpha n}$,

$$\left| f(z) - b_0 - \ldots - \frac{b_k}{k!} z^k \right| \leqslant \frac{M_n |z|^{k+1}}{(k+1)!},$$

y por tanto

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in B_{\alpha n}}} \left| f(z) - b_0 - \ldots - \frac{b_k}{k!} z^k \right| = 0, \quad \forall \, n \in \mathrm{N} \Longrightarrow f \in A_\alpha.$$

b) En general, $A_\alpha \neq E_\alpha$. En el teorema 1 se dio un ejemplo de una función g tal que $g \in A$ y $g \notin E$. Sabemos que

$$E = \bigcap_{\alpha \in \Gamma'} E_\alpha ; \; A = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \subset \bigcap_{\alpha \in \Gamma'} A_\alpha .$$

Como $g \in$ A, se tiene que $g \in A_\alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma'$. Sin embargo $g \notin E$, por lo que existe $\alpha_1 \in \Gamma'$ tal que $g \notin E_{\alpha_1}$. Así $E_{\alpha_1} \neq A_\alpha$ y en general E_α será un subespacio propio de A_α.

* * *

En E_α tenemos, pues, dos topologías: la topología T'_α y la topología inducida por la T_α.

Análogamente a la proposición 1, se tiene:

PROPOSICIÓN 3.—*Sobre E_α la topología T'_α es más fina que la inducida por T_α. Si $E_\alpha \neq A_\alpha$, T'_α es estrictamente más fina que la inducida por T_α.*

4. Algunos casos particulares en los que $\dot{E}_\alpha$ coincide con A_α

Consideramos ahora una familia particular de compactos $\{B_{\alpha,n}\}_{n=0}^{\infty}$; la formada por los compactos de tipo angular (Mira, 2, def. 1). Sea pues, dada, una sucesión fundamental de compactos de D, $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \ldots$, y $K_0 \subset K_1 \subset \ldots$, una sucesión de compactos angulares, tales que $\Delta_n \subset K_n$, $K_n - \{0\} \subset \mathring{K}_{n+1}$ (es posible encontrarla por Mira, lema 1).

Asociados a la familia anterior de compactos angulares, tenemos dos espacios:

$\hat{A} = \{f : D \longrightarrow C \mid f$ holomorfa y f admite desarrollo asintótico en el origen a través de los compactos $\{K_n\}_{n \in N}$, $f(z) \hat{\simeq} \sum_0^\infty a_n z^n\}$.

$\hat{E} = \{f : D \longrightarrow C \mid f$ holomorfa y existe $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in K_n}} f^{(r)}(z) = b_r$ para todo $n \in N$, para todo $r = 0, 1, 2, \ldots\}$.

Sabemos que $\hat{E} \subset \hat{A}$; en este caso, se tiene:

PROPOSICIÓN 4.—*$\hat{A}$ coincide con $\hat{E}$.*

DEMOSTRACIÓN.—Basta ver que $\hat{A} \subset \hat{E}$, y para esto es suficiente ver que si $f \in \hat{A}$, entonces $f' \in \hat{A}$. Sea $f \in \hat{A}$. $f(z) \simeq \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$. Sea K un compacto angular y γ su curva borde. Sea K_1 un compacto angular tal que $K \subset K_1$, y, si γ_1 es la curva borde de K_1, el ángulo formado por γ y γ_1, sea α. Sea $z \in K$, y sea τ la circunferencia de centro z y radio $\rho = d(z, \gamma_1)$. Sea $a_0 = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} f(z)$.

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\tau \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\tau \frac{f(t) - a_0}{(t-z)^2} dt +$$
$$+ \frac{a_0}{2\pi i} \int_\tau \frac{dt}{(t-z)^2} = f_{(1)}(z) + z f_{(2)}(z) + \frac{z^2}{2\pi i} \int_\tau \frac{f_{(2)}(t)}{(t-z)^2} dt.$$

Sea $C_n = \sup_{z \in K_1} | f_{(n)}(z) |$. Así pues se tiene:

$$\left| \frac{z^2}{2\pi i} \int_\tau \frac{f_{(2)}(t)}{(t-z)^2} dt \right| \leqslant \frac{|z|^2}{2\pi} \frac{C_2}{d(z, \gamma_1)^2} 2\pi d(z, \gamma_1) \leqslant \frac{|z| C_2}{\operatorname{sen} \alpha},$$

y, por tanto,

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} f'(z) = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} f_{(1)}(z) = a_1.$$

Análogamente, procediendo con $f_{(p)}(z)$ lo mismo que con $f(z)$, mostraríamos que:

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} [f_{(p)}(z)]' = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} f_{(p+1)}(z) = a_{p+1}.$$

Veamos a continuación, que $f'(z)$ tiene desarrollo asintótico en el origen a través de los compactos de tipo angular:

$$f'_{(1)}(z) = [f_{(1)}(z)]' + \frac{f_{(1)}(z) - a_1}{z}$$

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} f'_{(1)}(z) = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} [f_{(1)}(z)]' + \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} \frac{f_{(1)}(z) - a_1}{z} = 2 a_2.$$

Apliquemos ahora inducción, suponiendo que $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} f'_{(n-1)}(z) = n\, a_n$

$$f'_{(n)}(z) = [f_{(n)}(z)]' + n\, \frac{f_{(n)}(z) - a_n}{z}$$

Como $f_{(n)}(z)$ tiene desarrollo asintótico en el origen a través de los compactos de tipo angular, y

$$f_{(n)}(z) \,\hat{\simeq} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n}\, z^k,$$

se tiene que

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} [f_{(n)}(z)]' = a_{n+1}$$

y por tanto,

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} f'_{(n)}(z) = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} [f_{(n)}(z)]' + \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} n\, \frac{f_{(n)}(z) - a_n}{z} =$$
$$= a_{n+1} + n\, a_{n+1} = (n+1)\, a_{n+1}.$$

Así, tenemos que $f'(z)$ tiene desarrollo asintótico en el origen a través de los compactos de tipo angular, y $f'(z) \,\hat{\simeq} \sum\limits_{1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1}$.

Por tanto, si $f \in \hat{A}$, y si $f(z) \,\hat{\simeq} \sum\limits_{0}^{\infty} a_n\, z^n$, existe

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} f^{(r)}(z) = r!\, a_r,$$

para todo K compacto angular, para todo $r = 0, 1, 2, \ldots$, por lo que $\hat{A} \subset \hat{E}$ y en este caso, coinciden.

* * *

Sobre $\hat{E} = \hat{A}$ tenemos entonces dos topologías, la topología T_α y la topología T'_α. Se tiene (prop. 3) que $T_\alpha \subset T'_\alpha$. Vamos a ver que, en este caso, coinciden.

PROPOSICIÓN 5.—*Sobre* $\hat{E} = \hat{A}$, *las topologías* T_α *y* T'_α *coinciden.*

DEMOSTRACIÓN.—$(\hat{E}, T_\alpha)$ es un espacio de Fréchet. $(\hat{E}, T'_\alpha)$ es también un espacio de Fréchet. Además, $T_\alpha \subset T'_\alpha$. Entonces la identidad i: $(\hat{E}, T'_\alpha) \longrightarrow (\hat{E}, T_\alpha)$ es continua, y como la imagen $i(\hat{E}) = \hat{E}$, por el teorema de Banach-Schauder, se tiene que i es un isomorfismo topológico. Por tanto, $T_\alpha = T'_\alpha$.

Vamos a considerar, a continuación, otra familia especial de compactos $\{B_{\alpha n}\}_{n \in N}$.

DEFINICIÓN 3.—*Diremos que* $K \subset D \cup \{0\}$, *es un «cf-compacto», cuando* K *es un compacto de* $D \cup \{0\}$, $0 \in K$, K *estrellado en el origen, y el borde de* K *es una curva cerrada simple que posee en el origen un contacto de orden finito con la curva borde de* D.

Se prueba fácilmente el siguiente:

LEMA 2.—*Dada una sucesión fundamental de compactos de* D, $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \ldots$, *es posible encontrar una sucesión* $K_0 \subset K_1 \subset \ldots$, *de «cf-compactos», de modo que, para todo* Δ_k, *exista un* K_m *tal que* $\Delta_k \subset K_m$, *y además, esta sucesión es tal que cualquier cf-compacto* K *está contenido en un* K_n.

* * *

Consideremos, pues, los espacios A^{cf} y E^{cf} asociados a dicha familia de compactos, es decir:

$A^{cf} = \{f : \mathrm{D} \longrightarrow \mathrm{C} \mid f$ holomorfa y f posee desarrollo asintótico en el origen a través de los cf-compactos, $f(z) \overset{\mathrm{cf}}{\simeq} \sum_0^\infty a_n z^n\}$.

$E^{cf} = \{f : \mathrm{D} \longrightarrow \mathrm{C} \mid f$ holomorfa y existen $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} f^{(r)}(z) = b_r$ para todo $r = 0, 1, 2, \ldots$, para todo K cf-compacto$\}$.

Sabemos ya (prop. 2), que $E^{cf} \subset A^{cf}$. Vamos a probar que en este caso coinciden.

PROPOSICIÓN 6.—E^{cf} *coincide con* A^{cf}.

DEMOSTRACIÓN.—Hay que probar que $A^{cf} \subset E^{cf}$. Para esto es suficiente ver que si $g \in A^{cf}$, entonces $g' \in A^{cf}$.

Sea $g \in A^{cf}$ y sea $g(z) \overset{cf}{\simeq} \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$.

Sea K un cf-compacto. Sea K_1 otro cf-compacto tal que $K \subset K_1$. Sean Γ y Γ_1 los bordes de K y K_1 respectivamente. Sea $z \in K$, $z \neq 0$. Sea γ la circunferencia de centro z y radio $d(z, \Gamma_1)$; $\gamma \subset K_1$.

Si $(m - 1)$ es el orden de contacto entre Γ y Γ_1,

$$\lim_{z \to 0} \frac{d(z, \Gamma_1)}{|z|^m} = L > 0,$$

para todo $z \in K$. Entonces,

$$g'(z) = g_{(1)}(z) + z\, g_{(2)}(z) + \dots + \frac{z^{m+1}}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g_{(m+2)}(t)}{(t - z)^2}\, dt$$

Por otra parte, existe

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K_1}} g_{(m+2)}(z) = a_{m+2}$$

por lo que existe $M > 0$ tal que $|g_{(m+2)}(t)| < M$, para todo $t \in K_1$, de donde

$$\frac{|z|^{m+1}}{2\pi} \int_\gamma \frac{|g_{(m+2)}(t)|}{(t-z)^2} |dt| \leqslant \frac{|z|^{m+1}}{2\pi} \frac{M}{d(z, \Gamma_1)^2} 2\pi\, d(z, \Gamma_1) \leqslant |z| \frac{M}{L}.$$

Por lo que

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} g'(z) = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} g_{(1)}(z) = a_1.$$

Veamos ahora que las transformadas de g' tienen límite en el origen a través de los cf-compactos:

$$g'_{(1)}(z) = [g_{(1)}(z)]' + \frac{g_{(1)}(z) - a_1}{z};$$

de donde

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} g'_{(1)}(z) = 2\, a_2.$$

Aplicando inducción, si existe

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} g'_{(n-1)}(z) = n\, a_n$$

para todo K compacto angular, tendremos:

$$g'_{(n)}(z) = [g_{(n)}(z)]' + n \frac{g_{(n)}(z) - a_n}{z}$$

Como

$$g_{(n)}(z) \overset{\text{cf}}{\simeq} \sum_{0}^{\infty} a_{k+n} z^k,$$

se tiene que

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} [g_{(n)}(z)]' = a_{n+1}$$

y por tanto

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} g'_{(n)}(z) = a_{n+1} + n\, a_{n+1} = (n+1)\, a_{n+1},$$

es decir, $g'(z) \in A^{cf}$ y $g'(z) \overset{\text{cf}}{\simeq} \sum_{1}^{\infty} n\, a_n z^{n-1}$.

Y por consiguiente, si $g \in A^{cf}$, existe

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} g^{(r)}(z) = r!\, a_r, \quad r = 0, 1, 2, \ldots,$$

para todo K cf-compacto. Por tanto, $A^{cf} \subset E^{cf}$ y en este caso coinciden.

* * *

En el espacio $A^{cf} = E^{cf}$ tenemos inicialmente dos topologías: la topología T_α y la topología T'_α. Por la proposición 3, $T_\alpha \subset T'_\alpha$ y como (A^{cf}, T_α), (E^{cf}, T'_α) son espacios de Fréchet, se tiene como en la proposición 5.

Proposición 7.—*En $A^{cf} = E^{cf}$ las topologías T_α y T'_α coinciden.*

PROPOSICIÓN 8.—*Sea D un dominio convexo,* $0 \in D'$. *Sea* $\sum_0^\infty a_n$ *una serie arbitraria de números complejos. Entonces existe una función holomorfa* f: $D \longrightarrow C$ *tal que* $f \in \hat{E} \cap E^{cf}$, *es decir, que* f *y todas sus derivadas poseen límite en el origen a través de los compactos de tipo angular, y también a través de cf-compactos, y*

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} f^{(r)}(z) = a_r, \quad r = 0, 1, 2, \ldots,$$

para todo K compacto angular o cf-compacto.

DEMOSTRACIÓN.—Dada $\sum_0^\infty a_n$, tomamos $b_n = \frac{a_n}{n!}$ para todo nN. Dada la serie $\sum_0^\infty b_n$, existe $f \in A$ tal que $f(z) \simeq \sum_0^\infty b_n z^n$ (Carleman, 1926).

Pero $f \in \hat{A} = \hat{E}$; $f \in A^{cf} = E^{cf}$, por lo que existen

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K}} f^{(r)}(z) = r!\, b_r = a_r, \quad \text{para todo} \quad r = 0, 1, 2, \ldots,$$

para todo K compacto angular, o cf-compacto.

Bibliografía

[I] CARLEMAN, T. (1926). Les functions quasi-analytiques. Gautier Villars, Paris.

[II] MIRA, J. A. Espacios de funciones holomorfas con desarrollo asintótico. *Revista de la R. A. C. E.* (pendiente de publicación).

[III] MIRA, J. A. Desarrollos asintóticos a través de compactos angulares. *Revista de la R. A. C. E.* (pendiente de publicación).

[IV] VALDIVIA, M. (1965). Desarrollos asintóticos y familias compactas de funciones holomorfas. *Revista de la R. A. C. E.* Tomo LIX, cuaderno 3, Madrid.

Facultad de Ciencias de Alicante
Departamento de Matemáticas