UNA NOTA SOBRE ESPACIOS DF

Pedro Pérez Carreras

(*E. S. I. I. de Sevilla*)

Recibido: 15 octubre 1980

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

A (DF)-space such such that its strong dual is weakly compact generated is quasibarrelled if provided with the Mackey topology.

Los espacios vectoriales que utilizaremos están definidos sobre el cuerpo de los números reales o complejos. La palabra espacio denota un espacio vectorial topológico separado localmente convexo. Dado el par dual (F, G), denotamos mediante σ (F, G), μ (F, G), β^* (F, G) y β (F, G) las topologías débil, de Mackey, de la convergencia uniforme sobre los fuertemente acotados de E′ y fuerte, respectivamente. Si B es un acotado, absolutamente convexo y cerrado, de un espacio E, escribimos E_B para denotar el espacio normado envoltura lineal de B, dotado de la norma del calibrador de B. Un espacio E satisface la condición de Mackey débil si para toda sucesión (x_n) que converja débilmente en E, existe un acotado cerrado absolutamente convexo B de E tal que (x_n) y su límite están contenidos en E_B y tal que (x_n) converge a su límite para la topología $\sigma\,[(E_B, E'_B)]$.

TEOREMA.—Sea E (U) un espacio DF tal que su dual fuerte es de generación débilmente compacta. Entonces, E [μ (E, E′)] es casitonelado. Si, además, E satisface la condición de Mackey débil, entonces E [μ (E, E′)] es bornológico.

DEMOSTRACIÓN.—Sea A un acotado absolutamente convexo y $\sigma(E', E)$-cerrado de E' [$\beta(E', E)$] y sea A^* su clausura en E^* [$\sigma(E^*, E)$]. Si A no es $\sigma(E', E)$-compacto, existe una forma lineal u sobre E de A^* que no está en E'. Como E (U) es un espacio DF, existe un acotado B de E (U) absolutamente convexo y cerrado, tal que $L = u^{-1}(0) \cap B$ no es U-cerrado. Si Y denota la $\sigma(E'', E')$-clausura de L en E'', es claro que Y es $\sigma(E'', E')$-compacto. Por hipótesis, existe un conjunto M, absolutamente convexo y $\sigma(E', E'')$-compacto, total en E' [$\beta(E', E)$]. Sea P su envoltura lineal. El conjunto Y es $\sigma(E'', P)$-compacto. Si x es un punto de la clausura en E (U) de L que no esté en L, entonces x es $\sigma(E'', P)$-adherente a L. Utilizando [1], pág. 315, existe una sucesión H en L tal que x pertenece a la $\sigma(E'', P)$-clausura de H, o lo que es lo mismo, a la $\sigma(E'', E')$-clausura de H. Sea G la clausura en E (U) de la envoltura lineal de H. Es claro que $u^{-1}(0) \cap G$ no es cerrado en E (U). Por ser G separable, utilizamos [1], pág. 401, para concluir que, sobre G, coinciden U y la topología $\beta^*(E, E')$, luego $A^0 \cap G$ es un entorno del origen en $G(\widehat{U})$. Pero $|\langle u, z\rangle| \leq 1$ para todo z perteneciente a $A^0 \cap G$; así, u está acotada sobre un entorno del origen de $G(\widehat{U})$ y, por tanto, u es continua sobre $G(\widehat{U})$, por lo que $u^{-1}(0) \cap G$ será cerrado y así llegamos a una contradicción.

Si, además, E satisface la condición de Mackey débil, veamos que E [$\mu(E, E')$] es bornológico. Sea (B_n) una sucesión fundamental de acotados de E, que podemos considerar cerrados y absolutamente convexos. Si lo que queremos probar no fuera cierto, existiría una forma lineal h, acotada sobre acotados, que no pertenecería a E'. Razonando como antes, existe una parte B_i tal que $L = u^{-1}(0) \cap B_i$ no es U-cerrado y una sucesión H en L y un punto x de la clausura de L en E (U) que no está en L, tal que x es $\sigma(E'', E')$-adherente a H. Como existe sobre E'' una topología localmente convexa T menos fina que $\mu(E'', E')$ tal que $E''(T)$ es metrizable, aplicamos [1], pág. 315, (5), para obtener la existencia de una sucesión (x_n) de H tal que $\sigma(E'', E')$-converge a x. Como E satisface la condición de Mackey débil, existe un natural m mayor que i tal que (x_n) converge a x en E_{B_m} para la topología $\sigma(E_{B_m}, E'_{B_m})$. Como h está acotada sobre B_m, h es continua sobre E_{B_m} por lo que $h(x) = 0$ en contradicción con que x no esté en L c.q.d.

NOTA.—Obsérvese del método de prueba anterior, que todo espacio DF con acotados metrizables (y, por lo tanto, casitonelado) satisfaciendo la condición de Mackey, es bornológico. No sabemos si será cierto el siguiente resultado: «Todo espacio DF casitonelado que satisfaga la condición de Mackey es bornológico». Los ejemplos conocidos de espacios DF casitonelados no bornológicos (ver [2]) no satisfacen la condición de Mackey.

Referencias

[1] KÖTHE, G. (1966). Topologische Lineare Räume, I. Springer.
[2] VALDIVIA, M. (1974). A class of quasibarrelled (DF)-spaces which are not bornological. *Math. Z.*, **136**, 249-251.