ESPACIOS DE FUNCIONES HOLOMORFAS CON DESARROLLO ASINTOTICO

Juan A. Mira López

Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias de Alicante (1)

Recibido: 7 junio 1980

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

En este artículo se estudian algunas propiedades del espacio de las funciones holomorfas en un dominio D simplemente conexo, que admiten desarrollo asintótico en un punto de la frontera de D, con las topologías de la convergencia uniforme de las funciones y sus transformadas sobre ciertas familias de compactos.

In this paper we study some properties of the space of holomorphic functions in a simply connected D domain, which have an asymptotic expansion in a point of the D boundary, with the uniform convergence topologies for all the functions and their transformed functions on certains compacts.

1. El espacio $\mathbf{E}[\mathbf{T}_0]$

Sea D un dominio simplemente conexo del plano complejo C, que admite el origen 0 como punto frontera. Consideramos el conjunto E de las funciones holomorfas en D y con desarrollo asintótico en el origen 0,

$$f(z) \simeq \sum_{0}^{\infty} a_p z^p$$

(1) Este trabajo forma parte de la memoria del mismo título presentada en la Universidad de Valencia, para optar al grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas, dirigida por D. Manuel Valdivia Ureña.

siendo

$$a_0 = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in D}} f(z)$$

y

$$a_p = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in D}} \frac{f(z) - \sum_{n=0}^{p-1} a_n z^n}{z^p}, \quad p = 1, 2, \ldots$$

DEFINICIÓN 1.—*Llamaremos transformada de orden* n *en D, de* f $\in$ *E, a la función*

$$f_{(n)}(z) = \frac{f(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p}{z^n}, \qquad (1)$$

n = 1, 2, ... *y escribiremos también* $f_{(0)}(z) = f(z)$.

Con estas notaciones,

$$f_{(n)}(z) \in E, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

y además $f_{(n)}(z)$ tiene por desarrollo asintótico

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_{n+r} z^r.$$

Es inmediato que E tiene estructura de espacio vectorial sobre C, con las operaciones habituales.

Sea $\Delta \subset D$, compacto. La familia de seminormas

$$q_{\Delta, p}(f) = \sup_{z \in \Delta} | f_{(p)}(z) |, \quad \Delta \subset D, \text{ compacto}, \quad p = 0. 1, 2 \ldots$$

define sobre E la topología T_0 de la convergencia uniforme de las funciones y sus transformadas sobre los compactos de D. E $[T_0]$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo metrizable, ya que si en D consideramos una sucesión exhaustiva de compactos, $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots$, la topología anterior viene definida por la sucesión de seminormas

$$q_{m,n}(f) = \sup_{z \in \Delta_m} | f_{(n)}(z) | \quad m, n = 0, 1, 2 \ldots$$

o también por las seminormas

$$\| f \|_n = \sup_{\substack{z \in \Delta_n \\ p \leq n}} | f_{(p)}(z) |$$

que forman una sucesión creciente.

* * *

El contraejemplo que sigue prueba que E $[T_0]$ no es completo. Supongamos que $D = \{z \,/\, | z + 1 | < 1\}$, y sea $f(z) = \exp(1/z)$. Entonces, $f \notin E$, pues no existe $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in D}} f(z)$.

Consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde

$$f_n(z) = \exp \frac{1}{\dfrac{n}{n+1} z - \dfrac{1}{n+1}} = \exp \frac{n+1}{nz - 1}, \quad n \in N$$

Cada f_n es holomorfa en el dominio

$$D \cup \left\{ z \,/\, | z | < \frac{1}{n} \right\},$$

por lo que es desarrollable en serie de Taylor alrededor de 0, y, por tanto, pertenece a E para todo $n \in N$. Así pues,

$$f_n(z) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

y sus transformadas de orden p

$$f_{n(p)}(z) \simeq \sum_{k=p}^{\infty} \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} z^{k-p}.$$

Se tiene que

$$f'_n(z) = f_n(z)(n+1)(-n)(nz-1)^{-2},$$

y

$$f'_n(0) = (-n)(n+1)\exp[-(n+1)],$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(0) = 0.$$

Por inducción se demuestra que la derivada k-ésima $f_n^{(k)}(0)$, se compone de sumandos en número finito, que son producto de una exponencial que tiende a 0, por una potencial que tiende a infinito, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Vamos a demostrar que $\{f_{n(p)}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente convergente en el interior de D, cualquiera que sea p, con lo que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ será una T_0-sucesión de Cauchy.

En efecto: Si $\Delta \subset D$ es un compacto cualquiera, y llamamos $r = \operatorname{dist}(0, \Delta)$, y $s =$ diámetro de $(\Delta \cup \{0\})$, tenemos que

$$|f_{n(p)}(z) - f_{m(p)}(z)| = \left| \frac{f_n(z) - f_m(z) + \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{f_m^{(k)}(0)}{k!} - \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} \right) z^k}{z^p} \right| \leq$$

$$\leq \frac{|f_n(z) - f_m(z)| + \sum_{k=0}^{p-1} |f_m^{(k)}(0) - f_n^{(k)}(0)| \; s^{p-1}}{r^p}.$$

Como $\{f_n^{(k)}(0)\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a 0, para todo k, el segundo sumando tiende a 0, cuando m y n tienden a ∞, y ya que $f_n(z)$ converge a $f(z)$ uniformemente en Δ, el primero también, y queda demostrado.

Como el T_0 — lim f_n ha de ser necesariamente f, y $f \notin$ E, E no es completo.

TEOREMA 1.—*Sobre el espacio E de las funciones holomorfas en D y con desarrollo asintótico en el origen, no existe ninguna topología T que lo dote de estructura de espacio de Fréchet, si T implica la convergencia puntual.*

DEMOSTRACIÓN.—Lo haremos por reducción al absurdo. Supongamos que existe una tal topología T en E, tal que E $[T]$ sea un espacio de Fréchet. Podemos considerar T definida por una sucesión creciente de seminormas $\| \|_1 \leqslant \| \|_2 \leqslant \ldots$ (Köthe, pág. 205, tomo 18.2 (2)).

Sea $\{z_n\}$ una sucesión de puntos sobre la frontera de D tal que $z_n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Consideremos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dfrac{1}{z - z_n}}{2^n \left(1 + \left\| \dfrac{1}{z - z_n} \right\|_n \right)} \tag{2}$$

Esta serie es convergente en E $[T]$, ya que cualquiera que sea r,

$$\sum_{n \geq r} \frac{\left\| \dfrac{1}{z - z_n} \right\|_r}{2^n \left(1 + \left\| \dfrac{1}{z - z_n} \right\|_n \right)} \leq \sum_{n \geq r} \frac{1}{2^n}.$$

Por tanto, nos define una función g, que, debido a que T implica la convergencia puntual, es la suma de la serie (2). Por otra parte, la función g no tiene desarrollo asintótico en 0, con lo que no puede pertenecer a E, en contradicción con lo anterior.

Veamos, en efecto, que g no está acotada en ningún entorno del origen. Sea U un entorno del origen 0. Los puntos z_k penetran en U a partir de un cierto k. Consideremos un $z_n \in$ U, y una bola B $(z_n, \delta) \subset$ U, de modo que en B (z_n, δ) no haya puntos z_k, para

$k \neq n$, y que $| z - z_k | > \delta$ para $k \neq n$, $z \in B(z_n, \delta)$. Se tiene entonces

$$g(z) = \sum_1^\infty \frac{\dfrac{1}{z-z_k}}{2^k\left(1 + \left\| \dfrac{1}{z-z_k} \right\|_k\right)} = \frac{\dfrac{1}{z-z_n}}{2^n\left(1 + \left\| \dfrac{1}{z-z_n} \right\|_n\right)} +$$

$$+ \sum_{k \neq n} \frac{\dfrac{1}{z-z_k}}{2^k\left(1 + \left\| \dfrac{1}{z-z_k} \right\|_k\right)}, \quad \left| \sum_{k \neq n} \frac{\dfrac{1}{z-z_k}}{2^k\left(1 + \left\| \dfrac{1}{z-z_k} \right\|_k\right)} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k \neq n} \frac{\left| \dfrac{1}{z-z_k} \right|}{2^k\left(1 + \left\| \dfrac{1}{z-z_k} \right\|_k\right)} \leq \frac{1}{\delta} \sum_{k \neq n} \frac{1}{2^k} < \infty$$

para $z \in B(z_n, \delta)$. Sin embargo

$$\frac{\dfrac{1}{z-z_n}}{2^n\left(1 + \left\| \dfrac{1}{z-z_n} \right\|_n\right)}$$

no está acotada en $B(z_n, \delta) \cap D \subset U \cap D$, así que no existe el $\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in D}} g(z)$ y la función g no pertenece a E.

NOTA.—La topología T_0 la introduce en [4] el profesor Valdivia, que en su artículo estudia ciertos subconjuntos compactos del espacio $E[T_0]$.

2. Desarrollos asintóticos a través de sucesiones de compactos. El espacio E [T]

Completamos con continuidad el dominio de las funciones de E ampliándolo con el origen; así que las funciones de E serán holomorfas en D, continuas en $D \cup \{0\}$ y con desarrollo asintótico en 0.

$$E = \{ f \in H(D) \,/\, f(z) \cong \Sigma a_p z^p \quad y \quad f_{(p)}(0) = a_p, \quad p = 0, 1, 2, \ldots \}.$$

En lo que sigue supondremos que el dominio D cumple esta condición: Dado un compacto $K \subset D \cup \{0\}$, existe otro compacto $K_1 \subset D \cup \{0\}$, de modo que $\mathring{K}_1$ es conexo y $K \subset \overline{\mathring{K}_1}$.

Al objeto de encontrar espacios de funciones holomorfas con desarrollo asintótico en 0, que sean completos, dotaremos a E de la topología T de la convergencia uniforme de las funciones f y sus transformadas $f_{(p)}$, $p = 1, 2, \ldots$, sobre la familia $\{K\}$ de todos los compactos $K \subset D \cup \{0\}$, que contengan al cero.

T queda definida por las seminormas

$$q_{K,p}(f) = \sup_{z \in K} |f_{(p)}(z)|, \quad K \subset D \cup \{0\} \text{ compacto}, \quad 0 \in K, \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

y también por

$$q_{K,m}(f) = \sup_{\substack{z \in K \\ p \leq m}} |f_{(p)}(z)|,$$

K igual que antes, $m = 0, 1, 2$; $\{q_{K,m}\}$ es una familia filtrante.

E [T] es un e. v. t. localmente convexo no metrizable, pues no existe ninguna sucesión fundamental de compactos de este tipo. En efecto, si $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ fuese una tal sucesión, entonces para todo $n \in N$, existe

$$x_n \in B\left(0, \frac{1}{n}\right) \cap D$$

tal que $x_n \notin K$. El compacto $K = \{0, x_1, x_2, \ldots\}$ no está contenido en ningún K_m, por lo que la sucesión de compactos no sería fundamental.

Para demostrar que E [T] es completo, lo estructuramos como límite proyectivo topológico de ciertos FM-espacios que pasamos a describir.

Definición 2.—*Dada una sucesión fundamental de compactos de D fija,* $\{\Delta_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\Delta_n \subset D$, *llamamos* $\{A_{\alpha n}\}_{n=0}^{\infty}$ *a una sucesión de compactos de* $D \cup \{0\}$, *tales que para todo* $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ *sea*

$$0 \in A_{\alpha n}, \quad \Delta_n \subset A_{\alpha n} \quad y \quad A_{\alpha n} - \{0\} \subset \mathring{A}_{\alpha(n+1)}.$$

Existe una infinidad no numerable de sucesiones de este tipo, es decir α varía en un conjunto infinito Γ no numerable.

DEFINICIÓN 3.—*Diremos que la función* $f \in H(D)$, *tiene desarrollo asintótico en el origen* 0, *a través de la sucesión de compactos* $\{A_{\alpha n}\}_{n=0}^{\infty}$, *si se verifica que para todo* $p \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ *existen los siguientes límites:*

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in A_{\alpha p}}} f(z) = a_0 ; \quad \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in A_{\alpha p}}} \frac{f(z) - a_0}{z} = a_1 ; \ldots$$

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in A_{\alpha p}}} \frac{f(z) - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{n-1} z^{n-1}}{z^n} = a_n ; \ldots ;$$

Escribiremos entonces que

$$f(z) \overset{\alpha}{\cong} \sum_{0}^{\infty} a_n z_n$$

y la función

$$f_{(p)}(z) = \frac{f(z) - \sum_{0}^{p-1} a_n z^n}{z^p}$$

será la α*-transformada de orden* p.

Designamos por E_α al espacio vectorial de tales funciones f. Es claro que las transformadas $f_{(p)}(z) \in E_\alpha$ y que $E_\alpha \subset E$, para todo $\alpha \in \Gamma$.

Llamamos T_α a la topología de la convergencia uniforme de las funciones y sus α-transformadas sobre los compactos $\{A_{\alpha n}\}_{n=0}^{\infty}$, que viene definida por la sucesión de seminormas

$$q_{m,n}(f) = \sup_{\substack{z \in A_{\alpha m} \\ p \leq n}} |f_{(p)}(z)| \qquad m, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Escribimos

$$f_{(p)}(0) = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in A_{\alpha n}}} f_{(p)}(z) \qquad p = 0, 1, 2, \ldots,$$

valor que no depende de n.

PROPOSICIÓN 1.—*$E_\alpha [T_\alpha]$ es un F-espacio.*

DEMOSTRACIÓN.—$E_\alpha [T_\alpha]$ es localmente convexo y metrizable. Probemos que es completo.

Sea $\{f_r\}_{r=1}^{\infty}$, $f_r \in E_\alpha$, una sucesión T_α-Cauchy. Esto significa que la sucesión $\{f_{r\,(p)}(z)\}_{r=1}^{\infty}$ es uniformemente convergente en $A_{\alpha n}$, para todo n y p, enteros no negativos.

Por ser $0 \in A_{\alpha n}$ y $A_{\alpha n} \subset A_{\alpha\,(n+1)}$ para todo n, la sucesión $\{f_{r\,(p)}(0)\}_{r=1}^{\infty}$ converge y su límite es independiente del compacto A_n.

Sea

$$\varphi_p(z) = \lim_{r \to \infty} f_{r\,(p)}(z), \quad z \in D.$$

Entonces como $A_{\alpha n} \supset \Delta_n$, para todo n, se tiene que $\varphi_p(z) \in H(D)$, por ser límite uniforme de funciones holomorfas. Si llamamos

$$a_p = \lim_{r \to \infty} f_{r\,(p)}(0), \quad \text{y} \quad f(z) = \varphi_0(z) = \lim_{r \to \infty} f_r(z),$$

se tiene que $f \in E_\alpha$, que $f_{(p)}(z) = \varphi_p(z)$ para todo p, y que

$$f(z) \overset{\alpha}{\cong} \sum_0^{\infty} a_p z^p.$$

En efecto, $f \in H(D)$, y

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in A_{\alpha n}}} f(z) = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in A_{\alpha n}}} (\lim_{r \to \infty} f_r(z)) =$$

$$= \lim_{r \to \infty} (\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in A_{\alpha n}}} f_r(z)) = \lim_{r \to \infty} f_r(0) = a_0$$

(pues $\{f_r(z)\}$ es uniformemente convergente en cada compacto $A_{\alpha n}$).

Por inducción sobre p, si suponemos que

$$f_{(p-1)}(z) = \varphi_{p-1}(z),$$

y que

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in A_{\alpha n}}} f_{(p-1)}(z) = a_{p-1},$$

tenemos:

$$f_{(p)}(z) = \frac{f_{(p-1)}(z) - a_{p-1}}{z} = \lim_{r \to \infty} \frac{f_{r\,(p-1)}(z) - f_{r\,(p-1)}(0)}{z} =$$

$$= \lim_{r \to \infty} f_{r\,(p)}(z) = \varphi_p(z)$$

También,

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in A_{\alpha p}}} f_{(p)}(z) = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in A_{\alpha p}}} \left(\lim_{r \to \infty} f_{r\,(p)}(z)\right) =$$

$$= \lim_{r \to \infty} \left(\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in A_{\alpha p}}} f_{r\,(p)}(z)\right) = \lim_{r \to \infty} f_{r\,(p)}(0) = a_p .$$

Por tanto, $f = T_\alpha - \lim f_r$ y $E_\alpha [T_\alpha]$ es completo.

Nota.—El teorema 1 nos da un procedimiento constructivo para encontrar funciones de E_α y que no sean de E. En efecto, si $E_\alpha [T_\alpha]$ está definido por la familia de compactos $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ y las seminormas

$$p_n(f) = \sup_{\substack{v \leq n \\ z \in A_n}} |f_{(p)}(z)| \quad (p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \ldots),$$

y si $\{z_n\}$ es una sucesión de puntos de la frontera de D tal que $z_n \longrightarrow 0$, la función

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{\dfrac{1}{z - z_n}}{2^n \left[1 + p_n\left(\dfrac{1}{z - z_n}\right)\right]}$$

pertenece a E_α, pero no a E. La inclusión $E_\alpha \supset E$ es pues estricta.

Teorema 2.—*$E_\alpha [T_\alpha]$ es un espacio de Montel.*

Demostración.—Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de E_α tal que el subconjunto $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\} \subset E_\alpha$ es T_α-acotado. Vamos a ver que se puede extraer una sucesión parcial convergente a un $f \in f_\alpha$.

Supongamos que T_α queda definida por las seminormas:

$$q_m(f) = \sup_{\substack{z \in A_m \\ p \leq m}} | f_{(p)}(z) | \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

donde $\{A_m\}_{m=0}^{\infty}$ es una sucesión de compactos que contienen al $\mathbf{0}$ y y cumplen que

$$A_m - \{0\} \subset \mathring{A}_{m+1}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Se tiene $q_0 \leqslant q_1 \leqslant \ldots$ y para todo n y todo m, existe $K_m > 0$, tal que

$$q_m(f_n) = \sup_{\substack{z \in A_m \\ p \leq m}} | \, | f_{n\,(p)}(z) | \leqslant K_m \tag{3}$$

Podemos entonces extraer, de la sucesión $f_1, f_2, \ldots$, una sucesión parcial $f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1n}, \ldots$ uniformemente convergente en el interior de A_1 y convergente simplemente en $\mathbf{0}$. De la sucesión $f_{11}, f_{12}, \ldots$, extraemos una sucesión parcial $f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{2n}, \ldots$, uniformemente convergente en el interior de A_2 y tal que la sucesión de las primeras transformadas $f_{21\,(1)}, f_{22\,(1)}, \ldots, f_{2n\,(1)}, \ldots$, sea uniformemente convergente en el interior de A_2, y ambas, $\{f_{2n}\}$ y $\{f_{2n\,(1)}\}$ sean convergentes simplemente en $\mathbf{0}$.

Y, procediendo inductivamente, de la sucesión

$$f_{m-1,1}, \quad f_{m-1,2}, \ldots, \quad f_{m-1,n}, \ldots,$$

extraemos una sucesión parcial

$$f_{m\,1}, \quad f_{m\,2}, \ldots, \quad f_{m\,n}, \ldots,$$

tal que ella y las sucesiones de sus transformadas hasta el orden $m - 1$, sean uniformemente convergentes en el interior de A_m y convergentes en $\mathbf{0}$.

Veamos que las sucesiones

$$\{ f_{m\,n}(z) \}_{n=1}^{\infty}, \quad \{ f_{m\,n\,(1)}(z) \}_{n=1}^{\infty} \ldots, \{ f_{m\,n\,(m-2)}(z) \}_{n=1}^{\infty}$$

son uniformemente convergentes en A_{m-1}, cualquiera que sea $m \geqslant 2$.

En efecto, sea $1 \leqslant r \leqslant m-2$. Si

$$f_{mn(r)}(z) \overset{a}{\simeq} \sum_{p=0}^{\infty} a_{pn} z^p,$$

de (3) se deduce que

$$\left| \frac{f_{mn(r)}(z) - a_{0n}}{z} \right| \leq K_{m-1}$$

para $z \in A_{m-1} - \{0\}$, y cualquier n. De aquí,

$$| f_{mn(r)}(z) - a_{0n} | \leq K_{m-1} \; |z|$$

para $z \in A_{m-1}$ y todo n.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como la sucesión

$$\{ a_{0n} \}_{n=1}^{\infty} = \{ f_{mn(r)}(0) \}_{n=1}^{\infty}$$

converge, existe un n_0 tal que $n, p \geqslant n_0$ implican que

$$| a_{0n} - a_{0p} | < \frac{\varepsilon}{3}$$

Entonces, si $z \in A_{m-1}$ es tal que $|z| < \dfrac{\varepsilon}{3\,K_{m-1}}$ es

$$| f_{mn(r)}(z) - f_{mp(r)}(z) | \leq | f_{mn(r)}(z) - a_{0n} | +$$
$$+ | a_{0n} - a_{0p} | + | a_{0p} - f_{mp(r)}(z) | < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

siempre que $p, n \geqslant n_0$. Puesto que

$$A_{m-1} - \left\{ z / \; |z| < \frac{\varepsilon}{3\,K_{m-1}} \right\}$$

es un compacto del interior de A_m, en él $\{f_{mn(r)}(z)\}$ es uniformemente convergente en todo A_{m-1}.

Considerando ahora la sucesión diagonal $f_{11}, f_{22}, \ldots, f_{nn}, \ldots$, si ponemos $g_n = f_{nn}$, resulta que tanto $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ como $\{g_{n\,(p)}\}_{n=1}^{\infty}$, $p = 1, 2, \ldots$, son uniformemente convergentes en todo compacto A_m. Por tanto $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una T_α-sucesión de Cauchy y si $f = T_\alpha - \lim g_n$, es $f \in E_\alpha$.

PROPOSICIÓN 2.—*E es la intersección de todos los E_α.*

DEMOSTRACIÓN.—Desde luego, $E \subset \bigcap_{\alpha \in \Gamma} E_\alpha$.

Recíprocamente, si $f \in E_\alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma$, y si $\{z_r\}_{r=1}^{\infty}$ es una sucesión cualquiera en D, convergente a 0, existen $\alpha \in \Gamma$ y $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ tales que

$$\{z_1, z_2, \ldots, z_r, \ldots\} \subset A_{\alpha n}.$$

Por tanto, existe

$$\lim_{r \to \infty} f_{(p)}(z_r) = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in A_{\alpha n}}} f_{(p)}(z), \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

Si $\{z_r\}$ y $\{z'_r\}$ son dos sucesiones convergentes a 0, es claro que

$$\lim_{r \to \infty} f_{(p)}(z_r) = \lim_{r \to \infty} f_{(p)}(z'_r),$$

pues la sucesión $z_1, z'_1, z_2, z'_2, \ldots$, también está contenida en un cierto $A_{\alpha n}$. Por tanto, existe

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in D}} f_{(p)}(z),$$

para $p = 0, 1, 2, \ldots$, es decir $f \in E$.

* * *

Sea $I_\alpha : E \longrightarrow E_\alpha$, la inyección de E en E_α. Puesto que $T_\alpha \subset T$ sobre E, cada I_α es continua.

Dados $\alpha, \beta \in \Gamma$, consideremos las sucesiones de compactos

$$\{A_{\alpha n}\}_{n=1}^{\infty}, \quad y \quad \{A_{\beta n}\}_{n=1}^{\infty}.$$

Estas familias cumplen para cada n que

$$\Delta_n \subset A_{\alpha n}, \quad \text{y} \quad A_{\alpha n} - \{0\} \subset \mathring{A}_{\alpha(n+1)}$$

$$\Delta_n \subset A_{\beta n}, \quad \text{y} \quad A_{\beta n} - \{0\} \subset \mathring{A}_{\beta(n+1)}.$$

Si $A_{\gamma n} = A_{\alpha n} \cup A_{\beta n}$ para cada n, la sucesión $\{A_{\gamma n}\}_{n=1}^{\infty}$ verifica también que

$$\Delta_n \subset A_{\gamma n}, \; A_{\gamma n} - \{0\} \subset \mathring{A}_{\gamma(n+1)}$$

y, para los espacios respectivos se tiene que $E_\gamma \subset E_\alpha \cap E_\beta$. Este hecho permite ordenar parcialmente el conjunto de índices Γ del modo siguientes:

DEFINICIÓN 4.—*Diremos que* $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha, \beta \in \Gamma$ *si para cualquier* $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, *existe* $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$, *tal que* $A_{\alpha n} \subset A_{\beta m}$.

Esta ordenación es, por lo anterior, filtrante, ya que $\alpha \leqslant \gamma$ y $\beta \leqslant \gamma$; además, $\alpha \leqslant \beta$ implica que $E_\beta \subset E_\alpha$.

La inyección $I_{\alpha\beta}\colon E_\beta \longrightarrow E_\alpha$ para $\alpha \leqslant \beta$, es evidentemente continua, y se verifica que, para $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$,

$$I_{\alpha\beta} \circ I_{\beta\gamma} = I_{\alpha\gamma} \quad \text{e} \quad I_\alpha = I_{\alpha\beta} \circ I_\beta .$$

Así pues, el sistema $(E_\alpha, I_{\alpha\beta})_{\alpha \in \Gamma}$ es proyectivo, y se verifica el siguiente:

TEOREMA 3.—*$E\,[T]$ es el límite proyectivo topológico de los espacios $E_\alpha\,[T_\alpha]$ bajo las aplicaciones $I_{\alpha\beta}$.*

DEMOSTRACIÓN.—El límite proyectivo $\varprojlim I_{\alpha\beta} E_\beta$ es el subespacio del producto $\prod_\alpha E_\alpha$ formado por aquellas $\varphi = (\varphi_\alpha)$ tales que para $\alpha \leqslant \beta$ es $\varphi_\alpha = I_{\alpha\beta}(\varphi_\beta)$. Podemos identificar cada $f \in E$ con el elemento del $\prod_\alpha E_\alpha$, (f_α), tal que para todo α, $f_\alpha = f$. Entonces es claro que al ser $E \subset \bigcap_\alpha E_\alpha$, y las $I_{\alpha\beta}$ las identidades, resulta $E = \varprojlim I_{\alpha\beta} E_\beta$.

Queda ver que T es la mínima topología para la cual todas las aplicaciones $I_\alpha\colon E\,[T] \longrightarrow E_\alpha\,[T_\alpha]$ son continuas. En efecto:

Sea $K \subset D \cup \{0\}$, un compacto que contiene al 0. Entonces, existe un $A_{\alpha_0 n_0}$ tal que $K \subset A_{\alpha_0 n_0}$.

Sea

$$U = \{ f \in E / \sup_{z \in K} | f_{(p)}(z) | < \varepsilon \}$$

y

$$U_{\alpha_0 n_0} = \{ f \in E_{\alpha_0} / \sup_{z \in A_{\alpha_0 n_0}} | f_{(p)}(z) | < \varepsilon \}$$

Sea T_1 una topología sobre E que haga continuas todas las I_α. Entonces,

$$I_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0 n_0}) = \{ f \in E / \sup_{z \in A_{\alpha_0 n_0}} | f_{(p)}(z) | < \varepsilon \}.$$

es un T_1-entorno de 0 en E que está contenido en U, y, por tanto, $T \subset T_1$.

Corolario 1.—*E [T] es completo.*

Demostración.—$E[T] = \varinjlim I_{\alpha\beta}(E_\beta[T_\beta])$ es un subespacio cerrado de $\prod_\alpha E_\alpha[T_\alpha]$ (Köthe, 19, 10 (3)), y $\prod_\alpha E_\alpha[T_\alpha]$ es completo por serlo cada uno de los $E_\alpha[T_\alpha]$.

Corolario 2.—*E [T] es semi-reflexivo.*

Demostración.—Cada $E_\alpha[T_\alpha]$ es semi-reflexivo por ser F — M, por tanto E [T] también lo es (Köthe, 23, 3 (7)).

Proposición 3.—*Todo cerrado y acotado de E [T] es compacto.*

Demostración.—Sea A cerrado y acotado de E. Sea U un entorno de 0 en E. Se tiene que existe un α, y un U_α, tal que $U_\alpha \cap E$ está contenido en U, siendo U_α un T_α-entorno de 0. Por ser A acotado en E, es acotado en E_α. Por ser E_α de Montel, $\bar{A}^\alpha$ es compacto y, por tanto, A es T_α-precompacto. Existe, pues, un conjunto finito de puntos de A, $f_1, \ldots, f_n$, tales que

$$A \subset \left[\bigcup_{i=1}^{n} (f_i + U_\alpha) \right] \cap E = \bigcup_{i=1}^{n} (f_i + (U_\alpha \cap E)) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (f_i + U).$$

Por tanto, A es precompacto en E, y como A es también completo por ser cerrado en E (completo), se tiene que A es compacto en E.

PROPOSICIÓN 4.—*Los subconjuntos compactos de E [T] son metrizables.*

DEMOSTRACIÓN.—Sobre los subconjuntos compactos de E [T], las topologías T y T_α coinciden, ya que T_α es de Hausdorff, y $T_\alpha \subset T$. Como T_α es metrizable para todo α, queda demostrado.

TEOREMA 4.—*Los polinomios son densos en E [T].*

Vamos a demostrar que, para todo U, T-entorno de 0, y para toda $f \in$ E, existe un polinomio P tal que $P \in f + U$. En efecto: Sea U el T-entorno de 0 definido por la seminorma $q_{K,m}(f)$ y el número $\varepsilon > 0$, es decir,

$$U = \{ f \in E / \sup_{\substack{z \in K \\ p \leq m}} | f_{(p)}(z) | < \varepsilon \}$$

Sea $f \in$ E, con desarrollo asintótico

$$f(z) \simeq \sum_{0}^{\infty} a_p z^p.$$

Como $f_{(n)}(z)$ es holomorfa en el interior de K y continua en K, y K puede tomarse de modo que su complemento sea conexo, existe, según el teorema de S. N. Merguelyan (Rudin, pág. 368, t. 20.5), un polinomio $Q_n(z)$ tal que, para todo $z \in$ K,

$$| f_{(n)}(z) - Q_n(z) | < \frac{\varepsilon}{s^n + 1},$$

siendo s = diámetro de K.

Llamemos

$$P(z) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p + z^n Q_n(z).$$

Vamos a ver que $P \in f + U$. En efecto, para todo $z \in K$, se tiene que

$$| f(z) - P(z) | = \left| \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p + z^n f_{(n)}(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p - z^n Q_n(z) \right| =$$

$$= | z |^n | f_{(n)}(z) - Q_n(z) | < s^n \frac{\varepsilon}{s^n + 1} < \varepsilon.$$

$$| f_{(1)}(z) - P_{(1)}(z) | = | z |^{n-1} | f_{(n)}(z) - Q_n(z) | < \frac{s^{n-1} \varepsilon}{s^n + 1} < \varepsilon.$$

....

$$| f_{(n)}(z) - P_{(n)}(z) | = | f_{(n)}(z) - Q_n(z) | < \frac{\varepsilon}{s^n + 1}$$

(puesto que si $p < n$,

$$f_{(p)}(z) = \sum_{j=p}^{n-1} a_j z^{j-p} + z^{n-p} f_{(n)}(z)).$$

Por tanto, $f - P \in U$.

Corolario.—*E [T] es separable.*

Teorema 5.—*E [T] es un espacio de Schwartz.*

Demostración.—Tenemos que demostrar que dado cualquier T-entorno absolutamente convexo y cerrado de 0, U, existe otro entorno de 0, V, tal que V es precompacto en E con la topología T′, dada por la funcional de Minkowski asociada a U. Para ello, es suficiente demostrar que, de cualquier sucesión de funciones de V, se puede extraer una subsucesión T′-Cauchy.

Sea

$$U = \{ f \in E / \; | f_{(p)}(z) | \leq r, \quad z \in K, \quad p \leq n \}$$

y sea

$$V = \{ f \in E / \; | f_{(p)}(z) | < r, \quad p \leq n+1, \quad z \in K' \}$$

siendo K′ un compacto tal que $K - \{0\} \subset \mathring{K}'$. Evidentemente, $V \subset U$.

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de V. Como $f_n \in V$, se tiene que

$$| f_{n(p)}(z) | < r, \quad z \in K', \quad p \leq n+1,$$

por lo que podemos extraer una sucesión parcial $f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1s}, \ldots$, uniformemente convergente sobre todos los compactos del interior de K′, y convergente simplemente en 0. De ésta, se puede extraer una sucesión parcial $f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{2s}, \ldots$, uniformemente convergente, ella, y la sucesión de sus primeras transformadas

$$f_{21(1)}, f_{22(1)}, \ldots, f_{2s(1)}, \ldots,$$

sobre los compactos del interior de K′, y ambas convergentes en 0.

Y, así sucesivamente, llegamos a extraer una sucesión parcial

$$f_{n+2,1}, \quad f_{n+2,2}, \ldots, \quad f_{n+2,s}, \ldots,$$

tal que tanto ella como las sucesiones de sus transformadas hasta el orden $(n + 1)$ son uniformemente convergentes en los compactos del interior de K′, y convergentes, tanto ella como las sucesiones de sus transformadas hasta el orden $(n + 1)$, en 0.

Sea $g_p = f_{n+2,p}$. Veamos que la sucesión $\{g_p\}$ es T′-Cauchy. Para ello, basta ver que $g_1, g_2, \ldots, g_m, \ldots$, es uniformemente de Cauchy en todo K, ella, y las sucesiones de sus transformadas hasta el orden n. Esto es cierto, por la forma de construir g_p, en todo compacto del interior de K′.

Sea

$$g_{p(m)}(z) \simeq \sum_{i=0}^{\infty} a_{ip} z^i \quad \text{para} \quad 0 \leq m \leq n$$

Entonces, la sucesión

$$\{a_{0p}\}_{p=1}^{\infty} = \{g_{p(m)}(0)\}_{p=1}^{\infty}$$

es convergente, y dado $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que, si $p, q > n_0$ es

$$| a_{0p} - a_{0q} | < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otra parte, si $z \in \mathrm{K}$, se tiene, para todo p, que

$$| g_{p(m)}(z) - a_{0m} | \leq r \, | z | .$$

Entonces, para

$$| z | < \frac{\varepsilon}{3r}, \quad p, q \geq n_0 \quad \text{y} \quad z \in \mathrm{K},$$

se tiene que

$$| g_{p(m)}(z) - g_{q(m)}(z) | \leq | g_{p(m)}(z) - a_{0p} | +$$

$$+ | a_{0p} - a_{0q} | + | a_{0q} - g_{q(m)}(z) | < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Por otra parte,

$$\mathrm{K} - \left\{ z / \, | z | < \frac{\varepsilon}{3r} \right\}$$

es un compacto del interior de K′, en donde

$$\left\{ g_{p(m)}(z) \right\}_{p=1}^{\infty}, \quad m \leq n,$$

es uniformemente convergente. Por tanto, la sucesión $\{g_{p(m)}\}_{p=1}^{\infty}$ es uniformemente convergente en todo K, y $\{g_p\}_{p=1}^{\infty}$ es T′-Cauchy.

Bibliografía

[1] HORVATH, J. (1966). Topological Vector Spaces and Distributions. Volume I. Addison Wesley Pu. Co.

[2] KOTHE, G. (1969). Topological Vector Spaces I. Springer-Verlag, Berlin, New York.

[3] RUDIN, W. (1970). Real and Complex Analysis. Mc-Graw Hill. London.

[4] VALDIVIA, M. (1965). Desarrollos asintóticos y familias compactas de funciones holomorfas. *Rev. R. Acad. Ciencias*, tomo LIX, cuaderno 3, Madrid.