TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNCIONES VECTORIALES

Recibido: 7 mayo 1980

F. J. Ruiz Blasco y J. L. Torrea

Departamento de Teoría de Funciones. Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

We define the Fourier transform for vector valued functions (or measures) in a locally compact Abelian group G, obtaining Plancherel's theorem and Hausdorff-Young inequality for the spaces $V^p_{c,B}$ (G) introduced by Phillips and which contain (in a continuous way) the Bochner-Lebesgue spaces L^p_B (G). This enlargement of the spaces is necessary, since the results for scalarly valued functions does not extend to L^p_B except for the case of a Hilbert space B. Our results extend and improve the vector valued Riesz-Fischer theorem due to Matuszewska and Orlicz.

El propósito de este artículo es estudiar la transformada de Fourier de funciones vectoriales del espacio L^p_B (G) de las funciones fuertemente medibles con

$$\|f\|_p = \left(\int_G \|f\|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \infty,$$

donde G es un grupo abeliano localmente compacto con grupo dual Γ.

Dando una definición coherente de transformada (en el sentido de que extienda la ya conocida en el caso escalar), vemos con un ejemplo en (2, 3), que la transformada de una función de L^p_B (G), no está, en general, en $L^{p'}_B$ (Γ). Kwapien [4] demuestra que el hecho de que la transformada de Fourier sea acotada de L^2_B (G) en L^2_B (Γ) equivale a que B sea un espacio de Hilbert (para G = T).

Esto nos lleva a considerar una clase más amplia que $L^{p'}_B$ (Γ) como espacio de llegada: $V^{p'}_{c,B}$ (Γ) definida por Phillips [6], de forma que la transformada sea acotada de L^p_B (G) en $V^{p'}_{c,B}$ (Γ) verificándose una desigualdad de Hausdorff-Young. Este cambio en el espacio de llegada es el más «ajustado» en el sentido de que, como demostramos en § 1. $L^{p'}_B$ (Γ) es denso en $V^{p'}_{c,B}$ (Γ).

De esta forma no se obtiene teorema de Plancherel para $p = 2$, por lo que «agrandamos» el espacio de partida L^p_B (G), considerando $V^p_{c,B}$ (G); obteniendo que la transformada es acotada de $V^p_{c,B}$ (G) en $V^{p'}_{c,B}$ (Γ) $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, así como desigualdad de Hausdorff-Young y teorema de Plancherel.

Como caso particular para G = T obtenemos una mejora del resultado dado por Matuszewska-Orlicz [5].

0. Definiciones

Sea B un espacio de Banach y $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ un espacio de medida positiva σ-finita. Llamaremos $\mathcal{A}$ a la subfamilia de $\mathfrak{M}$ formada por los conjuntos de medida μ-finita. Emplearemos la notación $|A|$ por $\mu(A)$ Por $F : \mathcal{A} \longrightarrow B$ entenderemos funciones de conjunto finitamente aditivas, y por π particiones $(A_i)_{i=1}^n$ de conjuntos $A_i \in \mathcal{A}$. Definimos, según Phillips [6] los siguientes espacios.

$$\mathcal{V}^1_B(\Omega) = \left\{ F : \mathcal{A} \longrightarrow B / \sup_\pi \sum_\pi |\langle \xi, F(A)\rangle| < \infty, \quad \xi \in B^* \right\}$$

$$\mathcal{V}^p_B(\Omega) = \left\{ F : \mathcal{A} \longrightarrow B / \sup_\pi \sum_\pi \frac{|\langle \xi, F(A)\rangle|^p}{|A|^{p-1}} < \infty, \quad \xi \in B^* \right\} (1 < p < \infty)$$

$$\mathcal{V}^\infty_B(\Omega) = \{ F : \mathcal{A} \longrightarrow B / \| F(A) \|_B \leq M |A| \}$$

$$v^p_B = \left\{ \{x_n\} \subset B / \sum_n |\langle \xi, x_n\rangle|^p < \infty, \quad \xi \in B^* \right\} \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$v^\infty_B = \{ \{x_n\} \subset B / \sup \| x_n \|_B < \infty \}$$

(0.1). Con las normas usuales todos estos espacios son de Banach (ver [6]).

(0.2). $\mathcal{V}^p_{\mathbb{R}}(\Omega) \cong L^p(\mu)$ $(1 < p \leq \infty)$, (ver [1], pág. 180).

Phillips afirma que existe isomorfismo para $p = 1$, lo cual es falso, pues existen medidas reales de variación acotada y no μ-continuas.

Esta dificultad se puede salvar definiendo

$$V^p_B(\Omega) = \mathcal{V}^p_B(\Omega) \cap \{ ^{F}/F \ \mu\text{-continua} \} \quad (1 \leq p \leq \infty).$$

Dado que si $F \in \mathcal{V}^p_B(\Omega)$, entonces F es μ-continua ([6], teorema 1.3), se sigue que

$$V^p_B(\Omega) = \mathcal{V}^p_B(\Omega) \quad (1 < p \leq \infty).$$

Ahora se cumple que

$$V^p_{\mathbb{R}}(\Omega) = L^p(\mu) \quad (1 \leq p \leq \infty).$$

A partir de ahora utilizaremos los espacios

$$V^p_B(\Omega) \quad (1 \leq p \leq \infty).$$

(0.3) Si $\Omega = Z$ y μ es la medida de contar,

$$V^p_B(\Omega) = v^p_B \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

(ver [6]). Notemos que $v^\infty_B = l^\infty_B$.

(0.4) Dada $F \in V^p_B(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, queda definido un operador de B^* en $V^p_{\mathbb{R}}(\Omega)$ $(\cong L^p(\mu))$ aplicando a cada $\xi \in B^*$, la función de conjunto

$$\langle \xi, F(\ ) \rangle (A) = \langle \xi, F(A) \rangle \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Igualmente, dada $\{x_n\} \in v^p_B$, definimos el operador de B^* en $v^p_{\mathbb{R}}$ $(\cong l^p)$ que aplica $\xi \in B^*$ en $\{\langle \xi, x_n \rangle\} \in l^p$.

Definimos con Phillips $V^p_{c,B}(\Omega)$ (análogamente $v^p_{c,B}$) como el subespacio cerrado de $V^p_B(\Omega)$ (v^p_B) formado por las F $(\{x_n\})$ tales que el operador definido en (0.4) es compacto.

1. Resultados previos

Consideramos $L^p_B(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ con la norma débil:

$$\|f\|^w_p = \sup_{\xi \in B^*, \|\xi\| \leq 1} \left(\int_\Omega |\langle \xi, f \rangle|^p \, d\mu \right)^{1/p} \qquad (f \in L^p_B(\Omega))$$

(1.1) $(L^p_B(\Omega), \|\cdot\|^w_p)$ está incluido isométricamente en $V^p_{c,B}(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ mediante

$$f \in L^p_B(\Omega) \longrightarrow \tilde{f}(A), \ \tilde{f}(A) = (B)\int_A f \, d\mu \in V^p_{c,B}(\Omega).$$

El operador definido en (0.4) correspondiente a $\tilde{f}$ tiene rango finito dimensional si f es simple, por tanto es compacto. Observando entonces que

$$\|f\|_p \geq \|\tilde{f}\|_{V^p}$$

y que las funciones simples son densas en $L^p_B(\Omega)$ con $\|\cdot\|_p$, se sigue que $\tilde{f} \in V^p_{c,B}(\Omega)$ para toda $f \in L^p_B(\Omega)$.

(1.2) TEOREMA.—*$(L^p_B(\Omega), \|\cdot\|^w_p)$ es denso en*

$$V^p_{c,B}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

DEMOSTRACIÓN.—Caso $1 < p < \infty$. Si S es el conjunto de las funciones simples, por la inclusión isométrica de (1.1) y por [6], teorema 6.1, se sigue que S es un subconjunto denso de $V^p_{c,B}(\Omega)$. Por tanto, también lo es $L^p_B(\Omega)$.

Caso $p = 1$. Sea $F \in V^p_{c,B}(\Omega)$, entonces al ser compacto el operador de B^* en $L^1(\mu)$, definido en (0.4), se sigue que

$$C = \{\langle \xi, F(.) \rangle ; \|\xi\| \leq 1\}$$

es condicionalmente compacto.

Definimos los operadores U_π: $L^1(\mu) \longrightarrow L^1(\mu)$, para cada partición finita π, por

$$U_\pi (f) = \sum_\pi \frac{\int_{A_i} f \, d\mu}{|A_i|} \chi_{A_i}$$

Como se demuestra en [3, pág. 67] estos operadores cumplen

i) $\| U_\pi (f) - f \|_1 \longrightarrow 0, \quad \forall f \in L^1 (\mu)$.

ii) $\| U_\pi \| \leqslant 1$, para toda partición π.

Además $\{U_\pi\}$ es una familia de operadores compactos, pues tienen rango finito-dimensional.

Definimos $F_\pi \in V^1_{c, B} (\Omega)$ por

$$F_\pi (A) = \sum_\pi \frac{F(A_i)}{|A_i|} \, | A \cap A_i | \, .$$

Es claro que

(1.2.1) $\langle \xi, F_\pi (\cdot) \rangle = U_\pi (\langle \xi, F (\cdot) \rangle)$.

Estamos en condiciones de aplicar el teorema 3.7 de [6] al conjunto condicionalmente compacto C y a la familia de operadores $\{U_\pi\}$ obteniendo:

$$\lim_\pi \| U_\pi (\langle \xi, F (\cdot) \rangle) - \langle \xi, F (\cdot) \rangle \|_1 = 0$$

uniformemente en $\{\xi \in B^* / \| \xi \| \leqslant 1\}$.

Entonces de (1.2.1) se sigue que $\| F_\pi - F \|_{V_1} \longrightarrow 0$. Por (1.1) $F_\pi \in S$, de donde se sigue el teorema.

De la observación (0.3) se deduce el siguiente:

(1.3) Corolario.—$(l^p_B, \| \cdot \|^w_p)$ *es denso en* $v^p_{c, B}$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

Para el caso $p = \infty$, consideramos Ω como espacio topológico localmente compacto. Definimos de la forma habitual $C_{O, B} (\Omega)$ como el espacio de las funciones vectoriales continuas que se anulan en el infinito y $C_{c, B} (\Omega)$ como el subespacio de $C_{O, B} (\Omega)$ de funciones con soporte compacto. Consideramos ambos espacios como subespacios normados de $L^\infty_B (\Omega)$. Denotaremos $c_O (B) = C_{O, B} (Z)$.

(1.4) Proposición.

a) $c_O (B) = v^\infty_{c, B}$.

b) $C_{O, B} (\Omega) \subset V^\infty_{c, B} (\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN.

a) $v^{\infty}_{c,B}$ es la clausura del espacio $c_{0,0}$ (B) de las sucesiones finitamente no nulas ([6], teorema 6.3). Por otra parte, $c_{0,0}$ (B) es denso en c_0 (B). Luego c_0 (B) $= v^{\infty}_{c,B}$.

b) Análogamente a (1.1), dada una función $f \in L^{\infty}_{B}(\Omega)$ la función de conjunto

$$\tilde{f}(A) = (B) \int_A f \, d\mu$$

pertenece a $V^{\infty}_{B}(\Omega)$, con lo cual podemos considerar $L^{\infty}_{B}(\Omega)$ incluido isométricamente en $V^{\infty}_{B}(\Omega)$ y verificándose

(1.4.1)

$$\|f\|_{V^{\infty}} = \|f\|_{\infty} \qquad \forall f \in L^{\infty}_{B}(\Omega)$$

Toda función f de $C_{c,B}(\Omega)$ tiene rango relativamente compacto y de aquí se sigue que f se puede aproximar en $|\,|\cdot|\,|_{\infty}$ por funciones simples ([3], pág. 67).

Entonces, por ser las funciones simples densas en $V^{\infty}_{c,B}(\Omega)$ ([6], teorema 6.1) y por (1.4.1) se tiene que

$$C_{c,B}(\Omega) \subset V^{\infty}_{c,B}(\Omega).$$

Ahora el teorema se sigue por (1.4.1) y por el hecho de que $C_{c,B}(\Omega)$ es denso en $C_{0,B}(\Omega)$ con $|\,|\cdot|\,|_{\infty}$.

2. Transformada de Fourier. Teorema de Plancherel

Sea G un grupo localmente compacto abeliano con grupo dual Γ. Suponemos en ambos las medidas de Haar normalizadas de forma que la transformada de Fourier sea una isometría de $L^2(G) \longrightarrow L^2(\Gamma)$.

(2.1) Dada $f \in L^1_B(G)$, se define su transformada de Fourier como:

$$\hat{f}(\gamma) = (B) \int_G f(x)\,(-x, \gamma)\, d\mu \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

La aplicación $f \longrightarrow \mathcal{F}(f) = \hat{f}$ es lineal y continua de $L^1_B(G)$ en $L^{\infty}_{B}(\Gamma)$, de hecho

(2.1.1) $\| f \|_\infty \leqslant \| f \|_1$ $(f \in L^1_B(G))$.

(2.2) LEMA *(Riemann-Lebesgue)*

Si $f \in L^1_B(G)$, *entonces* $\hat{f} \in C_{0,B}(\Gamma)$.

DEMOSTRACIÓN.—Para $B = C$ el resultado es cierto (ver [8]), luego si

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i \in B \otimes L^1(G),$$

entonces

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^{n} c_i \hat{\varphi}_i \in C_{0,B}(\Gamma).$$

Teniendo en cuenta la densidad de $B \otimes L^1(G)$ en $L^1_B(G)$ y (2.1.1) se sigue el resultado

(2.3) Dada $f \in L^p_B(G)$, una definición coherente de transformada de Fourier debería de cumplir que si

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i \in B \otimes L^p(G),$$

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^{n} c_i \hat{\varphi}_i \in B \otimes L^{p'}(\Gamma)$$

teniéndose así definida una aplicación lineal

$$\mathcal{F} : B \otimes L^p(G) \longrightarrow B \otimes L^{p'}(\Gamma)$$

Si esta aplicación fuera continua con las normas $\| \cdot \|_p$ y $\| \cdot \|_{p'}$, tendríamos definida, por densidad, la transformada de Fourier de $L^p_B(G)$ en $L^{p'}_B(\Gamma)$. Esto desgraciadamente no es cierto en general como lo demuestra el siguiente ejemplo:

Sean p y q fijos tales que $2 \leqslant q' < p'$ y $\{\lambda_n\}$ sucesión de complejos tales que $\{\lambda_n\} \in l^{p'} \setminus l^{q'}$. Consideraremos la función

$$\begin{aligned} F : T \cong [-\pi, \pi) &\longrightarrow l^{p'} \\ t \qquad &\longrightarrow \{\lambda_n e^{int}\} \end{aligned}$$

F es continua y

$$\hat{F}(k) = \{\lambda_k \cdot \delta_{kn}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$$

(ver [7]). Es decir tenemos $F \in L^q_{l^{p'}}(T)$ tal que

$$\Sigma \| \hat{F}(k) \|^{q'}_{l^{p'}} = \Sigma \mid \lambda_k \mid^{q'} = \infty \,.$$

Para el caso $p = q = 2$, véanse los resultados de Kwapien [4] mencionados en la introducción.

(2.4) Sin embargo teniendo en cuenta la desigualdad de Hausdorff-Young para el caso escalar se tiene

(2.4.1) Si $1 < p \leqslant 2$ y $\Sigma\, c_i\, \varphi_i \in B \otimes L^p(G)$

$$\| \Sigma c_i \hat{\varphi}_i \|_{V^{p'}} = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \| \langle \xi, \Sigma c_i \hat{\varphi}_i \rangle \|_{p'} = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \| (\Sigma \langle \xi, c_i \rangle \varphi_i)^\wedge \|_{p'} \leq$$
$$\leq \sup_{\|\xi\| \leq 1} \| \Sigma \langle \xi, c_i \rangle \varphi_i \|_p = \| \Sigma c_i \varphi_i \|_{V^p} \leq \| \Sigma c_i \varphi_i \|_p$$

Entonces $\mathcal{F}$ se extiende de modo único a una aplicación lineal y continua de $L^p_B(G)$ en $V^{p'}_{c,B}(\Gamma)$ verificando

(2.4.2)
$$\| \mathcal{F}(f) \|_{V^{p'}} \leq \| f \|_p \qquad f \in L^B_p(G) \quad 1 < p \leq 2$$

Para el caso $p = 1$, por la proposición 1.4 b) y el lema (2.2) también se verifica (2.4.2). Recopilamos estos resultados en la siguiente:

(2.5) Proposición.—*(Desigualdad de Hausdorff-Young).* *Sea* $1 \leqslant p \leqslant 2$

$$\mathcal{F} : L^p_B(G) \longrightarrow V^{p'}_{c,B}(\Gamma)$$

es lineal y continua. De hecho

$$\| \mathcal{F}(f) \|_{V^{p'}} \leq \| f \|_p \quad (f \in L^p_B(G))$$

Evidentemente $\mathcal{F}$ no es isometría para $p \neq 2$. Basta tener en cuenta (2.4.1).

Para el caso $p = 2$ tampoco es isometría en general. En efecto, si $\mathcal{F}$ fuese isometría se seguiría que, en particular, $L^2_B(G) = V^2_{c,B}(G)$ pero esto es falso aun en el caso de ser B espacio de Hilbert y G = = [0,1) (ver [2]).

Para salvar esta dificultad observemos en (2.4.1) que

$$\mathcal{F} : L^p_B(G) \longrightarrow V^{p'}_{c,B}(\Gamma)$$

también es continua con la norma $\|\cdot\|_{V^p}$ en $L^p_B(G)$.

(2.6) TEOREMA

$$\mathcal{F} : V^p_{c,B}(G) \longrightarrow V^{p'}_{c,B}(\Gamma)$$

es lineal y continuo verificando

a)

$$1 \leq p < 2 \quad \|\mathcal{F}(f)\|_{V^{p'}} \leq \|f\|_{V^p} \quad f \in V^p_{c,B}(G)$$

(Desigualdad de Hausdorff-Young)

b)

$$p = 2 \quad \|\mathcal{F}(f)\|_{V^2} = \|f\|_{V^2}$$

(Igualdad de Plancherel). Además $\mathcal{F}$ suprayectiva.

DEMOSTRACIÓN.

a) y la primera parte de b) son consecuencias inmediatas de la demostración de (2.4.1).

Para la suprayectividad en la parte b) es suficiente notar que $B \otimes L^2(\Gamma)$ es denso en $V^2_{c,B}(\Gamma)$ y toda

$$g = \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i \in B \otimes L^2(\Gamma)$$

posee una antiimagen

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i \in B \otimes L^2(G)$$

donde $\hat{\varphi}_i = \psi_i$.

Como caso particular de (2.5) y (2.6) cuando G = T tenemos los siguientes resultados

(2.7) COROLARIO.—*Sea* $1 \leqslant p \leqslant 2$. *Entonces*

$$\mathcal{F} : L_B^p(T) \longrightarrow v_{c,B}^{p'}$$

es lineal y continua verificándose

$$\| \mathcal{F}(f) \|_{v^{p'}} \leq \|f\|_p \quad f \in L_B^p(T)$$

(2.8) COROLARIO.—*Sea* $1 \leqslant p \leqslant 2$, *entonces*

$$\mathcal{F} : V_{c,B}^p(T) \longrightarrow v_{c,B}^{p'}$$

es lineal y continua con

$$\| \mathcal{F}(f) \|_{v^{p'}} \leq \|f\|_{V^p} \quad f \in V_{c,B}^p(T)$$

Además para $p = 2$ $\mathcal{F}$ *es una isometría de* $V_{c,B}^2$ (T) *sobre* $v_{c,B}^2$.

(2.9) Si

$$f \in L_B^p(T) \quad 1 \leq p \leq \infty \quad \mathcal{F}f(k) = \hat{f}(k).$$

Es evidente sin más que observar que se cumple por definición para $f \in B \otimes L^p(T)$.

El corolario (2.8) precisa a un teorema de Matuszewska y Orlicz [5], mientras que el teorema (2.6) extiende dicho resultado y su precisión al caso no discreto.

Queremos agradecer al profesor Rubio de Francia sus valiosas indicaciones sin las cuales no hubiera sido posible este trabajo.

Bibliografía

[1] S. BANACH (1932). Theorie des Operations Lineaires. Varsaw.

[2] G. BIRKHOFF (1935). Integration of functions with values in a Banach space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **38**, pp. 357-378.

[3] J. DIESTEL and J. J. UHL JR. (1977). Vector measures. *Amer. Math. Soc. Mathematical Surveys*, 15.

[4] S. KWAPIEN (1972). Isomorphic characterization of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients. *Studia Math.*, **44**, pp. 583-595.

[5] W. MATUSZEWSKA and W. ORLICZ (1972). On the Riesz-Fischer theorem for vector-valued functions. *Studia Math.*, **44**, pp. 149-164.

[6] R. S. PHILLIPS (1940). On linear transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **48**, pp. 516-541.

[7] J. L. RUBIO DE FRANCIA (1978). Análisis de Fourier de Funciones vectoriales. *Sem. An. de Fourier y E. D. P.*, Segovia.

[8] W. RUDIN (1967). Fourier Analysis on groups. *Intersciencie Publisher.*