UN NUEVO PUNTO DE VISTA SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETRASO

R. Fraile Peláez y J. M. Fraile Peláez

Recibido: 5 marzo 1980

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. ALBERTO DOU MASDEXEXÁS

Based upon some remarks concerning to the functional differential equations with constant delay, we propose and develop in this paper a new viewpoint for the functional differential equations with variable delay. Concretely, we prove existence, uniqueness and continuation results for the problem

$$x'(t) = \mathrm{A}(t, \hat{x}_t), \quad t \in [t_0, \mathrm{T}]$$

$$\hat{x}_t = \varnothing_t, \quad t \in \mathrm{B}_1,$$

with $\mathrm{B}_1 = \{ t \in [t_0, \mathrm{T}] \,/\, t - w(t) \leqslant t \}$, $w(t)$ is the delay, and $\hat{x}_t$ is a kind of translated function, related to $x(.)$, $w(.)$.

En este artículo, y basándonos en algunas observaciones concernientes a las ecuaciones diferenciales con retardo constante —en su versión funcional—, proponemos y desarrollamos un punto de vista nuevo para las ecuaciones diferenciales con retardo variable. Concretamente, demostramos la existencia, unicidad y prolongación de soluciones para el problema

$$x'(t) = \mathrm{A}(t, \hat{x}_t), \quad t \in [t_0, \mathrm{T}]$$

$$\hat{x}_t = \varnothing_t, \quad t \in \mathrm{B}_1,$$

donde $\mathrm{B}_1 = \{ t \in [t_0, \mathrm{T}] \,/\, t - w(t) \leqslant t_0 \}$. $w(t)$ es el retardo, y $\hat{x}_t$ es cierto tipo de función trasladada, relacionada con $x(.)$, $w(.)$.

Usualmente, el tratamiento de una ecuación diferencial con retardo acotado consiste en reducirla a un problema de retardo constante. Más concretamente (cf. [1]), dada la ecuación

$$x'(t) = f(t, x(t - w(t))),$$

donde $w(t) > 0$ es el retardo acotado por P sobre un determinado intervalo real de extremo izquierdo $t_0 \in \mathbb{R}^+$, y $f \in C(\mathbb{R}^+ \times X, X)$, con X espacio de Banach, se pasa a la ecuación

$$x'(t) = A(t, x_t),$$

donde

$$x_t(s) = x(t+s),\ A \in C(\mathbb{R}^+ \times X_0, X),\ x_t \in X_0 = C([-P, 0], X),$$

que es obviamente más general que la primera. Para ver esto basta definir

$$A(t, \psi) = f(t, \psi(-w(t))).$$

Por otra parte, es sabido que resolver un problema funcional con datos en un intervalo $[-P, 0]$ implica en realidad resolver el mismo problema sobre todos los subintervalos $[-r, 0]$ de $[-P, 0]$.

Precisamente, la base de nuestro planteamiento se remite a esta última observación. De hecho, la idea es considerar como dato una determinada familia de funciones, $\varnothing_t$, y mediante una modificación adecuada del concepto de trasladada, $x_t(\cdot)$, se llega a establecer resultados de existencia, unicidad y prolongación de soluciones. Cuando el dato es único, $\Psi(t)$, es fácil obtener a partir de él una tal familia. Y algunas modificaciones suplementarias permiten tratar este caso directamente (cf. [2]).

Finalmente, de este método se desprende inmediatamente una manera de tratar el problema de retardo variable, puntual, sobre hipótesis más débiles (cf. [3]), independientemente de que éste sea, o no, acotado.

Vamos a plantearnos ya el problema a tratar. Sea $(X, \|\cdot\|)$ espacio de Banach, $t_0 \in \mathbb{R}^+$, $T > t_0$, y una función real $w(t)$, definida sobre $[t_0, T]$, verificando:

(r_1) $w(t) > 0$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

(r_2) $w(t)$ es Lipschitz sobre $[t_0, T]$.

Consideramos ahora $[t_0, T] = B_1 \cup B_2$, donde

$$B_1 = \{t \in [t_0, T] / \varphi(t) \leq t_0\}, \quad B_2 = \{t \in [t_0, T] / \varphi(t) > t_0\}, \quad \text{y} \quad \varphi(t) = t - w(t).$$

Se añade una hipótesis de índole técnica:

(r_3) Los puntos $t \in [t_0, T]$ que verifican $\varphi(t) = t_0$ son aislados.

Llamaremos $\tau = \min\{\varphi(t) / t \in B_1\}$, $P = \max\{w(t) / t \in [t_0, T]\}$. Entonces dada una función $x \in C([\tau, \infty), X))$, definimos funciones trasladadas para puntos de B_1 de la siguiente manera:

$$x_t : [-w(t), t_0 - t] \longrightarrow X, \quad x_t(s) = x(t + s)$$

Y para puntos de B_2:

$$x_t : [-w(t), -w(t)] \longrightarrow X, \quad x_t(s) = x(t + s).$$

De nuevo definimos $X_0 = C([-P, 0], X)$, que es espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_0$, dada por

$$\|\varnothing\|_0 = \max\{\|\varnothing(s)\| / -P \leqslant s \leqslant 0\}.$$

Las funciones trasladadas, x_t, se extienden a $[-P, 0]$ con continuidad constantemente, es decir

$$\hat{x}_t(s) = \begin{cases} x_t(s) & \text{si} \quad -w(t) \leqslant s \leqslant t_0 - t \\ x_t(t_0 - t) & \text{si} \quad t_0 - t \leqslant s \leqslant 0 \\ x_t(-w(t)) & \text{si} \quad -P \leqslant s \leqslant -w(t) \end{cases} \qquad t \in B_1$$

$$\hat{x}_t(s) = x_t(-w(t)), \ -P \leqslant s \leqslant 0 \qquad t \in B_2$$

El problema que nos planteamos es

$$(1) \qquad \begin{cases} x'(t) = A(t, \hat{x}_t), & t_0 \leqslant t \leqslant T \\ \hat{x}_t = \varnothing_t, & t \in B_1 \end{cases}$$

donde los datos $\varnothing_t \in X_0$ van a verificar las siguientes condiciones:

(s_1) Si $\varphi(t) \leqslant \varphi(\sigma)$, es $\varnothing_t(s - t) = \varnothing_\sigma(s - \sigma)$, $s \in [\varphi(\sigma), t_0]$.

(s_2) Para cada $t \in B_1$, $\varnothing_t$ es lipschitziana de constante M_t, sobre $[-P, 0]$, y tal que $\sup\{M_t / t \in B_1\} < +\infty$.

(s_3) $\|\varnothing_t - \varnothing_\sigma\|_0 \leqslant M \cdot |t - \sigma|$, $t, \sigma \in B_1$.

Las hipótesis que vamos a utilizar son:

(A_1) $A \in C(\mathbb{R}^+ \times X_0, X)$.

(A_2) Dados $x, y \in X$, es

$$[x - y, A(t, \varnothing) - A(t, \psi)] \leqslant g(t, \| x - y \|),$$

donde

$$(\varnothing, \psi) \in \Omega_{xy} = \{(\varnothing, \psi) \in X_0 \times X_0 /$$
$$/ \| \varnothing - \psi \|_0 \leq \| x - y \| \}, t_0 \leq t \leq T, [\cdot, \cdot]_- : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

está definido por

$$[x, y]_- = \lim_{h \to 0^-} 1/h (\| x + hy \| - \| x \|),$$

y $g \in C(R^+ \times R^+; R^+)$, $g(t, 0) \equiv 0$, y $u \equiv 0$ es la única solución de $u'(t) = g(t, u(t))$, $u(t_0) = 0$ sobre $[t_0, \infty)$.

(A'_2) Para cada $(t, \varnothing) \in [t_0, T] \times X_0$ existen números positivos a_1, b_1, y una función $g(t, u)$ como la expresada arriba, tal que se verifica (A_2) sobre

$$([t - a_1, t + a_1] \cap J) \times \overline{S}_{b_1}(\varnothing),$$

donde $J = [t_0, T]$, y

$$\overline{S}_{b_1}(\varnothing) = \{ \varnothing_0 \in X_0 / \| \varnothing - \varnothing_0 \|_0 \leqslant b_1 \}.$$

(A_3) Para cada $t_0 < T_1 < T$, y cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta(T_1, \varepsilon) > 0$ tal que $\| A(t, \varnothing) - A(s, \varnothing) \| < \varepsilon$, cuando

$$(t, \varnothing), \quad (s, \varnothing) \in [t_0, T_1] \times X_0 \quad \text{y} \quad | t - s | < \delta.$$

Precisamente por (A_1) es posible encontrar números positivos a, b, M de modo que

$$\| A(t, \varnothing) \| \leqslant M, \quad (t, \varnothing) \in [t_0, t_0 + a] \times S_b(\hat{x}_{t_0})$$
$$\| \varnothing_t(s_1) - \varnothing_t(s_2) \| \leqslant M \, | s_1 - s_2 |, \quad s_1 s_2 \in [-P, 0], \quad t \in B_1$$
$$\| \varnothing_t - \varnothing_\sigma \|_0 \leqslant M \, | t - \sigma |, \quad t, \sigma \in B_1$$
$$2(M^2 + M) \leqslant b/a \quad \text{y} \quad B_3 \supset [t_0, t_0 + a],$$

donde

$$B_3 = \{ t \in [t_0, t_p] \, / \, \forall s > t_p, [t_0, s] \cap B_1 \text{ no es un intervalo}\}.$$

Asimismo cogemos a, b correspondientes a $(t_0, \hat{x}_{t_0})$ según la hipótesis (A'_2).

Las soluciones aproximadas vienen dadas por:

LEMA 1.—«En la hipótesis (A_1), para cada $n \in \mathbb{N}$ hay un entero positivo $N = N_n$, una partición $\{t_i^n\}_{i=0}^N$ de $[t_0, t_0 + a]$, y una función x^n: $[\tau, t_0 + a] \longrightarrow X$ tal que:

(i) $x_t^n = \emptyset_t$ en $[-w(t), t_0 - t]$, $\quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a$.

(ii) $| t^n_{i-1} - t_i^n | \leqslant 1/n, \quad 1 \leqslant i \leqslant N$.

(iii) $\| \hat{x}_t^n - \hat{x}_\sigma^n \|_0 \leqslant 2(M^2 + M) \cdot | t - \sigma |, \quad t, \sigma \in [t_0, t_0 + a]$.

(iv) Si $t \in (t^n_{i-1}, t_i^n)$ existe $(x^n)'(t)$, y es igual a $A(t^n_{i-1}, \hat{x}^n_{t^n_{i-1}})$ para cada $1 \leqslant i \leqslant N$.

(v) Si $\| \emptyset - \hat{x}^n_{t^n_{i-1}} \|_0 \leqslant 2(M^2 + M) \, | t_i^n - t^n_{i-1} |$, es

$$\| A(t, \emptyset) - A(t^n_{i-1}, \hat{x}^n_{t^n_{i-1}}) \| \leqslant 1/n, \quad t \in [t^n_{i-1}, t_i^n].$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $t_q \in B_1$ tal que $\varphi(t_q) = \tau$. Por inducción cogemos $t^n_0 = t_0$, x^n: $[\tau, t_0] \longrightarrow X$, tal que

$$x^n(t) = \emptyset_{t_q}(t - t_q).$$

Se supone definidos $t^n_0 \dots t_i^n$, y x^n: $[\tau, t_i^n] \longrightarrow X$ verificando (i)-(v). Si $t_i^n = t_0 + a$ hemos terminado. Si $t_i^n < t_0 + a$, se escoge el máximo δ_i, verificando:

(1) $t_i^n + \delta_i \leqslant t_0 + a$.

(2) $\delta_i \leqslant 1/n$.

(3) Si $t \in [t_i^n, t_i^n + \delta_i]$ y $\| \psi - \hat{x}^n_{t_i^n} \|_0 \leqslant 2(M^2 + M)\, \delta_i$, es $\| A(t, \psi) - A(t_i^n, \hat{x}^n_{t_i^n}) \| \leqslant 1/n$.

Si δ_i es el mayor número que verifica (1), se define

$$\begin{aligned} t^n_{i+1} &= t_i^n + \delta_i = t_0 + a \\ x^n(t) &= x^n(t_i^n) + (t - t_i^n)\, A(t_i^n, \hat{x}^n_{t_i^n}), \quad t \in [t_i^n, t^n_{i+1}] \end{aligned}$$

y obviamente se verifican (i)-(v). Veamos (iii):

Si $s \in [-w(t), t_0 - t] \cap [-w(\sigma), t_0 - \sigma]$, $t, \sigma \in [t_i^n, t^n_{i+1}]$, $t \leqslant \sigma$,

$$\| \hat{x}_t^n(s) - \hat{x}_\sigma^n(s) \| = \| x_t^n(s) - x_\sigma^n(s) \| = \| \varnothing_t(s) - \varnothing_\sigma(s) \| \leqslant M \mid t - \sigma \mid ;$$

si $s \in [-w(t), t_0 - t]$, $s > t_0 - \sigma$,

$$\begin{aligned} \| \hat{x}_t^n(s) - \hat{x}_\sigma^n(s) \| &= \| x_t^n(s) - x_\sigma^n(t_0 - \sigma) \| = \| \varnothing_t(s) - \varnothing_\sigma(t_0 - \sigma) \| \leqslant \\ &\leqslant \| \varnothing_t(s) - \varnothing_\sigma(s) \| + \| \varnothing_\sigma(s) - \varnothing_\sigma(t_0 - \sigma) \| \leqslant \\ &\leqslant M \mid t - \sigma \mid + M \mid s - t_0 + \sigma \mid \leqslant 2 M \mid t - \sigma \mid ; \end{aligned}$$

si $s > t_0 - t$,

$$\begin{aligned} \| \hat{x}_t^n(s) - \hat{x}_\sigma^n(s) \| &= \| x_t^n(t_0 - t) - x_\sigma^n(t_0 - \sigma) \| = \\ = \| \varnothing_t(t_0 - t) - \varnothing_\sigma(t_0 - \sigma) \| &\leqslant \| \varnothing_t(t_0 - t) - \varnothing_\sigma(t_0 - t) \| + \\ + \| \varnothing_\sigma(t_0 - t) - \varnothing_\sigma(t_0 - \sigma) \| &\leqslant 2 M \mid t - \sigma \mid ; \end{aligned}$$

si $s \in [-w(t), t_0 - t]$, $s < -w(\sigma)$,

$$\begin{aligned} \| \hat{x}_t^n(s) - \hat{x}_\sigma^n(s) \| &= \| x_t^n(s) - x_\sigma^n(-w(\sigma)) \| = \\ = \| \varnothing_t(s) - \varnothing_\sigma(-w(\sigma)) \| &\leqslant \| \varnothing_t(s) - \varnothing_t(-w(\sigma)) \| + \\ + \| \varnothing_t(-w(\sigma)) - \varnothing_\sigma(-w(\sigma)) \| &\leqslant M \mid s + w(\sigma) \mid + M \mid t - \sigma \mid \leqslant \\ \leqslant M \mid w(\sigma) - w(t) \mid + M \mid t - \sigma \mid &\leqslant (M^2 + M) \cdot \mid t - \sigma \mid ; \end{aligned}$$

si $s < -w(\sigma), -w(t)$,

$$\begin{aligned} \| \hat{x}_t^n(s) - \hat{x}_\sigma^n(s) \| &= \| x_t^n(-w(t)) - x_\sigma^n(w(\sigma)) \| = \\ = \| \varnothing_t(-w(t)) - \varnothing_\sigma(-w(\sigma)) \| &\leqslant \| \varnothing_t(-w(t)) - \varnothing_t(-w(\sigma)) \| + \\ + \| \varnothing_t(-w(\sigma)) - \varnothing_\sigma(-w(\sigma)) \| &\leqslant (M^2 + M) \cdot \mid t - \sigma \mid ; \end{aligned}$$

si $s > t_0 - \sigma$, $s < -w(t)$,

$$\begin{aligned} \| \hat{x}_t^n(s) - \hat{x}_\sigma^n(s) \| &= \| x_t^n(-w(t)) - x_\sigma^n(t_0 - \sigma) \| \leqslant \| \varnothing_t(-w(t)) - \\ - \varnothing_\sigma(-w(t)) \| + \| \varnothing_\sigma(-w(t)) - \varnothing_\sigma(t_0 - \sigma) \| &\leqslant M \mid t - \sigma \mid + \\ + M \mid t_0 - \sigma + w(t) \mid &\leqslant 2 M \mid t - \sigma \mid . \end{aligned}$$

Luego

$$\| \hat{x}_t^n - \hat{x}_\sigma^n \|_0 \leqslant 2(M^2 + M) \cdot \mid t = \sigma \mid , \quad t, \sigma \in [t_i^n, t^n_{i+1}].$$

Si $t \leqslant t_i^n \leqslant \sigma$,

$$\| \hat{x}_t^n - \hat{x}_\sigma^n \|_0 \leqslant \| \hat{x}_t^n - \hat{x}^n_{t_i^n} \|_0 + \| \hat{x}^n_{t_i^n} + \hat{x}^n_\sigma \|_0 \leqslant 2(M^2 + M) \cdot \mid t - \sigma \mid .$$

Ahora, si δ_i no es el mayor número que verifica (1) iteramos el procedimiento, y si existe N con $t^n{}_N = t_0 + a$ habremos acabado por las mismas razones que antes.

Si esto no sucede, se tiene que

$$t_i{}^n \xrightarrow{i \to \infty} s \leqslant t_0 + a \quad \text{y} \quad \{ \hat{x}^n{}_{t_i^n} \}_{i=0}^{\infty} \text{ es sucesión de Cauchy en } X_0,$$

pues

$$\| \hat{x}^n{}_{t_j^n} - \hat{x}^n{}_{t_n^i} \|_0 \leqslant (M + M^2) \mid t_j{}^n - t_i{}^n \mid \xrightarrow{i, j \to \infty} 0,$$

por tanto, $\hat{x}^n{}_{t_i^n} \xrightarrow{i \to \infty} \psi_0 \in X_0$.

Ahora, por la continuidad de A en (s, ψ_0) existe $\alpha < 1/n$, tal que si $\| \varnothing - \psi_0 \|_0 < \alpha$, $\mid t - s \mid < \alpha$, es $\| A(s, \psi_0) - A(t, \varnothing) \| < 1/3n$.

Además, $\exists\, i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mid t^n{}_{i_0} - s \mid < \alpha / (3M + 1)$, y

$$\| \psi_0 - \hat{x}^n{}_{t_{i_0}^n} \|_0 < \alpha/3.$$

Pero,

$$\delta_{i_0} = t^n{}_{i_0+1} - t^n{}_{i_0} < s - t^n{}_{i_0} < \alpha / (3M + 1) < \alpha < 1/n,$$

por lo que δ_{i_0} no es el mayor número que cumple (2), y por consiguiente ha de ser el mayor número para el que se verifica (3), luego

$$\exists \left(t_{\frac{\alpha}{3M}}, \psi_{\frac{\alpha}{3M}} \right) \in [t^n{}_{i_0}, t^n{}_{i_0} + \delta_{i_0} + \alpha/3M] \times X_0,$$

con

$$\left\| \psi_{\frac{\alpha}{3M}} - \hat{x}^n{}_{t_{i_0}^n} \right\|_0 \leqslant M(\delta_{i_0} + \alpha/3M) \quad \text{y} \quad \left\| A\left(t_{\frac{\alpha}{3M}}, \psi_{\frac{\alpha}{3M}} \right) - A(t^n{}_{i_0}, \hat{x}^n{}_{t_{i_0}^n}) \right\| > 1/n.$$

Es decir, que

$$\left\| \psi_{\frac{\alpha}{3M}} - \hat{x}^n{}_{t_{i_0}^n} \right\|_0 \leqslant \alpha \cdot M/(3M + 1) + \alpha/3 < 2\alpha/3 < \alpha,$$

y $\mid t_{\frac{\alpha}{3M}} - s \mid < \alpha$.

Además,

$$\left\| \psi_{\frac{\alpha}{3M}} - \psi_0 \right\|_0 \leqslant \left\| \psi_{\frac{\alpha}{3M}} - \hat{x}^n{}_{t_{i_0}^n} \right\|_0 + \| \hat{x}^n{}_{t_{i_0}^n} - \psi_0 \|_0 < 2\alpha/3 + \alpha/3 = \alpha.$$

Entonces,

$$1/n < \left\| A\left(t_{\frac{a}{3M}}, \psi_{\frac{a}{3M}}\right) - A\left(t^n{}_{i_0}, \hat{x}^n{}_{t^n_{i_0}}\right) \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\| A\left(t_{\frac{a}{3M}}, \psi_{\frac{a}{3M}}\right) - A(s, \psi_0) \right\| + \left\| A(s, \psi_0) - A\left(t^n{}_{i_0}, \hat{x}^n{}_{t^n_{i_0}}\right) \right\| < 1/3\,n + 1/3\,n < 1/n,$$

y esta contradicción lleva a la verificación del lema.

Veamos ahora que la sucesión obtenida converge a una solución de (1). En principio tenemos:

Lema 2.—«En las hipótesis del lema 1 sean, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x^n(t)$, y $\{t_i^n\}_{i=1}^{N_n}$ la función y la partición obtenidas. Si para cada $t \in [t_0, t_0 + a]$, $x^n(t)$ converge puntualmente a $x(t)$, es $x(t)$ solución de (1).»

Demostración.—Como la familia $\{x^n\}_{n \in N}$ es equicontinua (nótese que cualquier x^n es Lipschitz de constante M), se tiene que $x^n \xrightarrow{n \to \infty} x$ uniformemente en $[\tau, t_0 + a]$, por lo que x es continua. Además, por esta convergencia, se tiene que $\hat{x}_t{}^n \longrightarrow \hat{x}_t$ uniformemente sobre $[-P, 0]$.

Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $t \in (t^n{}_{i_n}, t^n{}_{i_{n+1}})$, entonces,

$$\lim_{n \to \infty} \| \hat{x}_t - \hat{x}^n{}_{t^n_{i_n}} \|_0 \leqslant \lim \left(\| \hat{x}_t - \hat{x}^n{}_t \|_0 + \| \hat{x}^n{}_t - \hat{x}^n{}_{t^n_{i_n}} \|_0 \right) \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{n \to \infty} \left(\| \hat{x}_t - \hat{x}^n{}_t \|_0 + 2(M^2 + M) \cdot | t - t^n{}_{i_n} | \right) = 0.$$

Utilizando (iv) del lema 1, y la continuidad de A, tenemos que

$$\lim_{n \to \infty} (x^n)'(t) = A(t, \hat{x}_t),$$

puntualmente en $[t_0, t_0 + a] \setminus S$, donde

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ t_i^n / i = 1 \dots N_n \},$$

que es numerable.

Teniendo en cuenta que $\| A(t^n{}_i, \hat{x}^n{}_{t^n_i}) \| \leqslant M$, para cada $n \in \mathbb{N}$, estamos en condiciones de aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Por tanto, para cada $t \in [t_0, t_0 + a]$,

$$x(t) = \lim_{n \to \infty} x^n(t) = \lim_{n \to \infty} \left(x^n(t_0) + \int_{t_0}^{t} (x^n)'(s) \cdot d(s)\right) =$$

$$= \varnothing_{t_0}(0) + \int_{t_0}^{t} A(s, \hat{x}_s)\, d(s),$$

lo que da la verificación del lema, pues la aplicación $t \longrightarrow A(t, \hat{x}_t)$ es continua en $[t_0, t_0 + a]$.

Para asegurar la convergencia de la solución utilizaremos los dos siguientes lemas (cf. [4, 5]):

LEMA 3.—«Supongamos que:

(a) $g \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$, y $[t_0, \infty)$ es el mayor intervalo de existencia de la solución maximal $r(t, t_0, u_0)$ de

$$u'(t) = g(t, u(t)), \quad u(t_0) = u_0 \geq 0$$

(b) $m \in C([t_0 - P, \infty), \mathbb{R}^+)$; S es un subconjunto contable de $[t_0, t_0 + a]$, y para cada $t_1 \geqslant t_0$ con $t_1 \notin S$, y $m(t_1 + s) \leqslant m(t_1)$, $-P \leqslant s \leqslant 0$, es

$$\lim_{h \to 0^-} 1/h\,(m(t_1 + h) - m(t_1)) \leq g(t_1, m(t_1)).$$

Entonces, si $m(t_0 + s) \leqslant u_0$, $-P \leqslant s \leqslant 0$, se tiene que

$$m(t) \leq r(t, t_0, u_0), \quad t \in [t_0, \infty).$$

LEMA 4.—«En las hipótesis del lema 3, si $[t_0, t_1] \subset [t_0, \infty)$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ la solución maximal $r(t, t_0, u_0, \varepsilon)$ de

$$u'(t) = g(t, u(t)) + \varepsilon, \quad u(t_0) = u_0 + \varepsilon$$

existe sobre $[t_0, t_1]$, y

$$\lim_{\varepsilon \to 0} r(t, t_0, u_0, \varepsilon (= r(t, t_0, u_0)$$

uniformemente sobre $[t_0, t_1]$.»

La convergencia viene dada por:

LEMA 5.—«En las hipótesis (A_1), (A'_2), sean $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ las soluciones aproximadas construidas en el lema 1. Entonces $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función $x(t)$ sobre $[\tau, t_0 + a]$.»

DEMOSTRACIÓN.—Sean $m, n \in \mathbb{N}$, y

$$m(t) = \| x^n(t) - x^m(t) \|, \quad t \in [\tau, t_0 + a]$$

(se extiende constantemente con continuidad a $[t_0 - P, \infty)$).

Nótese que $\hat{m}_t = \| \hat{x}_t^n - \hat{x}_t^m \|$, y que $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t_i^n\}_{i=0}^{N_n}$ es contable.

Si $t_1 \in (t_0, t_0 + a) \setminus S$ es tal que $m(t_1 + s) \leqslant m(t_1)$, $-P \leqslant s \leqslant 0$, se observa que

$$(\hat{x}^n{}_{t_1}, \hat{x}^m{}_{t_1}) \in \Omega_{x^n(t_1), x^m(t_1)}, \quad \text{y} \quad \hat{x}^n{}_{t_1}, \hat{x}^m{}_{t_1} \in \overline{S_b}(\hat{x}_{t_0}).$$

Sean $t_1 \in (t^n{}_{i-1}, t_i^n) \cap (t^m{}_{j-1}, t_j{}^m)$, $h < 0$ de modo que $t_1 + h \geqslant t_0$, entonces

$$\begin{aligned} m(t_1 + h) + m(t_1) = {} & \| x^n(t_1) - x^m(t_1) + h \cdot (A(t_1, \hat{x}^n{}_{t_1}) - A(t_1, \hat{x}^m{}_{t_1})) \| - \\ & - \| x^n(t_1) - x^m(t_1) \| + \| x^n(t_1 + h) - x^m(t_1 + h \| - \\ & - \| x^n(t_1) - x^m(t_1) + h \cdot (A(t_1, \hat{x}^n{}_{t_1}) - A(t_1, \hat{x}^m{}_{t_1})) \| \geq \\ & \geq \| x^n(t_1) - x^m(t_1) + h \cdot (A(t_1, \hat{x}^n{}_{t_1}) - A(t_1, \hat{x}^m{}_{t_1})) \| - \\ & - \| x^n(t_1) - x^m(t_1) \| - \| x^n(t_1 + h) - x^n(t_1) - h \cdot A(t_1, \hat{x}^n{}_{t_1}) \| - \\ & - \| x^m(t_1 + h) - x^m(t_1) - h \cdot A(t_1, \hat{x}^m{}_{t_1})) \|, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} 1/h\,(m(t_1 + h) - m(t_1)) \leq {} & 1/h\,(\| x^n(t_1) - x^m(t_1) + h(A(t_1, \hat{x}^n{}_{t_1}) - A(t_1, \hat{x}^m{}_{t_1})) \| - \\ & - \| x^n(t_1) - x^m(t_1) \|) + \| 1/h\,(x^n(t_1 + h) - x^n(t_1)) - (x^n)'(t_1) \| + \\ & + \| (x^n)'(t_1) - A(t_1, \hat{x}^n{}_{t_1}) \| + \| (x^m)'(t_1) - A(t_1, \hat{x}^m{}_{t_1}) \| + \\ & + \| 1/h\,(x^m(t_1 + h) - x^m(t_1)) - (x^m)'(t_1) \|. \end{aligned}$$

Tomando límites, y aplicando (A'_2), queda

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^-} 1/h\,(m(t_1 + h) - m(t_1)) \leq {} & g(t_1, m(t_1)) + \| (x^n)'(t_1) - A(t_1, \hat{x}^n{}_{t_1}) \| + \\ & + \| (x^m)'(t_1) - A(t_1, \hat{x}^m{}_{t_1}) \|, \end{aligned}$$

y como

$$\| \hat{x}^n{}_{t^n_{i-1}} - \hat{x}^n{}_{t_1} \|_0 \leq M \cdot | t_1 - t^n{}_{i-1} | \leq M (t_i^n - t^n{}_{i-1}),$$

usando (iv) y (v) del lema 1 queda

$$\lim_{h \to 0^-} 1/h (m (t_1 + h) - m (t_1)) \leq g (t_1, m (t_1)) + 1/n + 1/m,$$

como

$$m (t_0 + s) = \| \emptyset_{t_0} (s) - \emptyset_{t_0} (s) \| = 0, \quad s \in [-P, 0],$$

por el lema 3 se tiene que

$$m (t) \leq r_{n,m} (t, t_0, 1/n + 1/m), \quad t \in [t_0, t_0 + a],$$

donde $r_{nm} (t, t_0, 1/n + 1/m)$ es la solución maximal de

$$u' (t) = g (t, u (t)) + 1/n + 1/m, \quad u (t_0) = 1/n + 1/m.$$

Aplicando ahora el lema 4,

$$\lim_{m, n \to \infty} r_{n,m} (t, t_0, 1/n + 1/m) = r (t, t_0, 0)$$

uniformemente sobre $[t_0, t_0 + a]$, donde $r (t, t_0, 0)$ es la solución maximal de

$$u' (t) = g (t, u (t)), \quad u (t_0) = 0$$

que es idénticamente nula por (A'_2).

Por tanto, $\{x^m (t)\}_{m \in N}$ es sucesión de Cauchy $\forall\, t \in [\tau, t_0 + a]$, y como X es espacio de Banach, el lema está demostrado.

PROPOSICIÓN 1.—«En las hipótesis (A_1), (A'_2), para cada familia $\{\emptyset_t\}_{t \in B_1}$, verificando (s_1) — (s_3), hay una única solución para el problema (1) sobre $[t_0, t_0 + a]$.»

DEMOSTRACIÓN.—La existencia es clara por los lemas 1, 2 y 5.

En cuanto a la unicidad, basta tomar dos soluciones de (1), $u (t)$, $v (t)$, y utilizar la misma técnica que en el lema 5 con

$$m (t) = \| u (t) - v (t) \| ,$$

para obtener $u \equiv v$.

Cabe prolongar ahora por puntos de B_3.

PROPOSICIÓN 2.—«En las hipótesis (A_1), (A'_2), (A_3), para cada familia $(\varnothing_t)_{t \in B_1}$, verificando (s_1) — (s_3), hay una única solución del problema (1) sobre $[t_0, t_p]$.»

DEMOSTRACIÓN.—Probada la existencia, la unicidad se deriva exactamente igual que en la proposición 1.

Por los resultados de existencia local, hay un $T_1 \in (t_0, T]$ tal que la solución de (1) existe sobre $[\tau, T_1)$. Basta probar la existencia de $\lim_{t \to T_1} x(t)$, donde $x(t)$ es tal solución.

Sea $\varepsilon > 0$, por (A_3) hay un $\delta(T_1, \varepsilon) > 0$, tal que

$$\| A(t, \varnothing) - A(s, \varnothing) \| \leq \varepsilon, \quad (t, \varnothing), (s, \varnothing) \in [t_0, T_1] \times X_0,$$

con $|t - s| < \delta$.

Cojamos $0 < h < \delta(T_1, \varepsilon)$, tal que $t_0 < T_1 - h$. De nuevo, tomando $m(t) = \| x(t + h) - x(t) \|$, $t \in [t_0, T_1 - h)$, y usando la misma técnica que en el lema 5, se llega a

$$\lim_{h \to 0^-} 1/h\,(m(t_1 + h) - m(t_1)) \leq g(t_1, m(t_1)) +$$
$$+ \| A(t_1, \hat{x}_{t_{1+h}}) - A(t_1 + h, \hat{x}_{t_{1+h}}) \| \leq g(t_1, m(t_1)) + \varepsilon \quad \text{por} \quad (A_3),$$

donde t_1 es un punto tal como se escoge en el lema 5.

Poniendo $\alpha(h) = \sup_{s \in [-P, 0]} \| x(t_0 + h + s) - x(t_0 + s) \|$, por el lema 3 se tiene que

$$\| x(t + h) - x(t) \| \leq r(t, t_0, \alpha(h) + \varepsilon), \quad t \in [t_0, T_1 - h),$$

donde el segundo miembro es la solución maximal de

$$u'(t) = g(t, u(t)) + \varepsilon, \quad u(t_0) = \alpha(h) + \varepsilon = u_0.$$

Utilizando el lema 4, es $\lim_{\varepsilon \to 0} r(t, t_0, u_0) = r(t, t_0, \alpha(h))$, uniformemente sobre cada subintervalo compacto de $[t_0, T_1 - h)$. Pero como cuando t y $t + h$ tienden hacia T_1, h tiende hacia 0, y $\lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0$, por (A'_2) se tiene que

$$\lim_{t,\, t+h \to T_1} \| x(t + h) - x(t) \| = 0,$$

lo que prueba la existencia de $\lim_{t \to T_1} x(t)$.

Ahora se nos presenta la cuestión de la existencia local a partir de t_p, pasando a puntos de B_2, cuestión que se resuelve utilizando las mismas técnicas que en la primera parte del problema, sólo teniendo en cuenta la lipschitzianidad de la solución construida hasta t_p. Es más, notando que en esta segunda parte tratamos un problema puntual, como ya hemos dicho antes (cf. [3]) precisaremos hipótesis más débiles que las utilizadas.

Por otro lado, no existe ningún problema en el empalme en t_p, pues $\lim_{t \to t_p^{\pm}} x'(t) = A(t_p, \hat{x}_{t_p})$.

También para la prolongación hasta el siguiente punto $t \in [t_0, T]$, tal que $\varphi(t) = t_0$, se utilizan las mismas técnicas que en la proposición 2. Y entonces estaremos en la situación de, o bien pasar a puntos de B_1, o bien pasar a puntos de B_2, que ya han sido tratadas anteriormente, por lo que el problema (1) queda resuelto en $[t_0, T]$.

El enunciado correspondiente es:

PROPOSICIÓN 3.—«En las hipótesis (A_1), (A'_2), (A_3), para cada familia $(\varnothing_t)_{t \in B_1}$, verificando (s_1) — (s_3), hay una única solución para el problema (1) sobre $[t_0, T]$.»

Referencias

[1] DRIVER, R. D. (1977). Ordinary and delay differential equations. *Applied Mathematical Sciences*, 20, Springer-Verlag, New York.

[2] FRAILE PELÁEZ, R. (1979). Tesis de licenciatura. Universidad Complutense. Facultad de Ciencias Matemáticas. Madrid, noviembre 1979.

[3] FRAILE PELÁEZ, J. y FRAILE PELÁEZ, R. On delay differential equations in a Banach space (en preparación).

[4] LAKSMIKANTHAM, V. y LEELA, S. (1969). Differential and integral inequalities. Vol. I and II. Academic Press, New York.

[5] LAKSMIKANTHAM, V., MITCHELL, A. R. y MICHELL, R. W. (1978). On the existence of solutions of differencial equations of retarded type in a Banach space. *Ann. Polon. Math.*, **35**, 253-260.

Departamento de Ecuaciones Funcionales
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
Ciudad Universitaria (Madrid-3)